

① Amplitude de transition en électrodynamique quantique

- Hamiltonien en jauge de Coulomb.
- Amplitudes de transition - Calcul perturbatif.
- Représentation diagrammatique.
- Quelques résultats généraux.

② Exemples de processus physiques

- Absorption et émission de photons par un atome.
- Diffusion Compton par une particule
- "Bremsstrahlung".
- Emission et reabsorption de photons par une particule.
- Echange de photons entre 2 particules

③ Exemples d'effets physiques associés à des photons virtuels

- Correction de masse pour une particule libre.
- Corrections radiatives à la diffusion par un potentiel
- Interactions magnétiques et effets de retard.

Hamiltonien (voir Appendice A)

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = H_P + H_R \quad H_P = \sum_{\alpha} \frac{\vec{p}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + V_{\text{Coul}} \quad H_R = \sum_i \hbar \omega_i (a_i^{\dagger} a_i + \frac{1}{2})$$

$$H_I = H_{I1} + H_{I1}^S + H_{I2}$$

$$H_{I1} = - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})$$

$$H_{I1}^S = \sum_{\alpha} -g_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{S}_{\alpha} \cdot \vec{B}(\vec{r}_{\alpha})$$

$$H_{I2} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \vec{A}_{\perp}^2(\vec{r}_{\alpha})$$

Amplitude de transition entre un état initial $|\Psi_i\rangle$ à t_i
et un état final $|\Psi_f\rangle$ à t_f .

$$\langle \Psi_f | U(t_f, t_i) | \Psi_i \rangle$$

$U(t_f, t_i)$ Opérateur d'évolution associé à $H = H_0 + H_I$
(en représentation d'interaction par rapport à H_0)

Expression perturbative de U

$$U = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t_f, t_i) \quad \text{II-2}$$

$$U^{(n)}(t_f, t_i) = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int \dots \int_{t_f \geq \tau_n \geq \tau_{n-1} \dots \geq \tau_1 \geq t_i} d\tau_n \dots d\tau_1$$

$$e^{iH_0\tau_n/\hbar} H_I e^{-iH_0(\tau_n-\tau_{n-1})/\hbar} H_I \dots H_I e^{-iH_0(\tau_2-\tau_1)/\hbar} H_I e^{-iH_0\tau_1/\hbar}$$

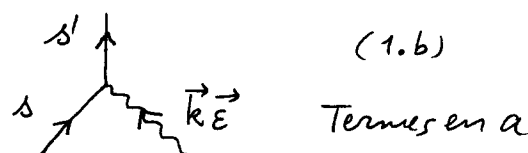
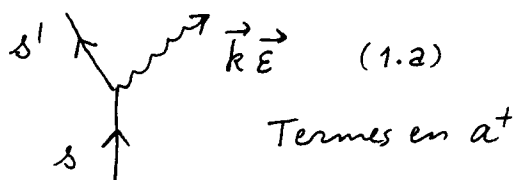
Produit alterné d'opérateurs H_I et d'opérateurs d'évolution libre

↳ Amplitude d'ordre n (en H_I) entre états propres de H_0

$$\langle \varphi_f | U^{(n)}(t_f, t_i) | \varphi_i \rangle \quad H_0 | \varphi_f \rangle = E_f | \varphi_f \rangle \quad H_0 | \varphi_i \rangle = E_i | \varphi_i \rangle$$

Représentations diagrammatiques

Éléments de matrice de H_{I1} ou H_{I1}^S (termes à 1 photon en a ou a^+)

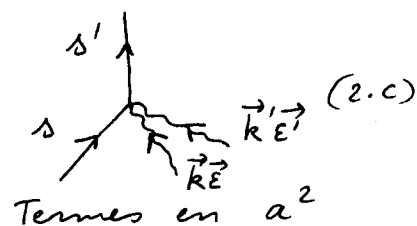
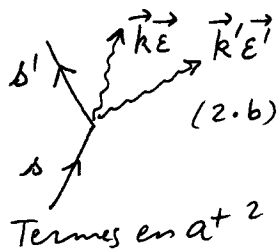
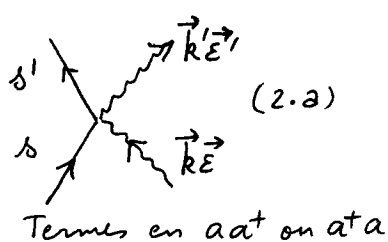


s : nombre quantique du système des particules

$s = \vec{p}, \mu$ pour une particule d'impulsion $\vec{p}$, d'état de spin μ

$s = \vec{K}, b$ pour un atome d'impulsion globale $\hbar \vec{K}$ (centre de masse), dans l'état interne b

Éléments de matrice de H_{I2} (termes à 2 photons en a^2, a^{+2}, aa^+, a^+a)



Amplitudes

Juxtaposition de lignes de particules ou de photons (associées à des propagations libres) séparées par des "vertex" (associés aux éléments de matrice de H_I entre l'état arrivant au vertex et l'état partant du vertex). Voir par exemple diagrammes des §§ 2 et 3

Intégration sur tous les temps intermédiaires et sommation sur tous les états intermédiaires sous-entendues.

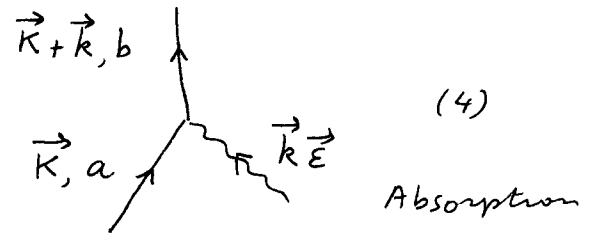
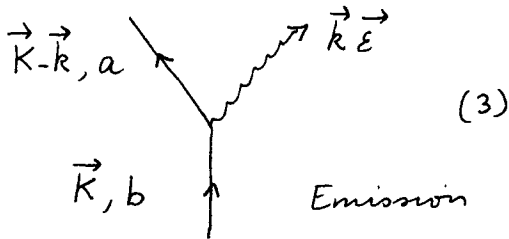
Quelques résultats généraux

- L'intégration sur les temps intermédiaires fait apparaître une fonction $\delta^{(T)}(E_f - E_i)$ (fonction delta de largeur $\hbar/T$ ou $T = t_f - t_i$) exprimant la conservation de l'énergie non perturbée à $\hbar/T$ près entre l'état initial et l'état final.

- L'énergie non perturbée peut par contre n'être pas conservée dans les états intermédiaires (Transitions "virtuelles")
↳ Dénominateur d'énergie d'autant plus grand que le défaut d'énergie est plus grand.
- Conservation de l'impulsion globale à chaque vertex (Invariance de H_{I1} , H_{I1}^S et H_{I2} par translation globale)

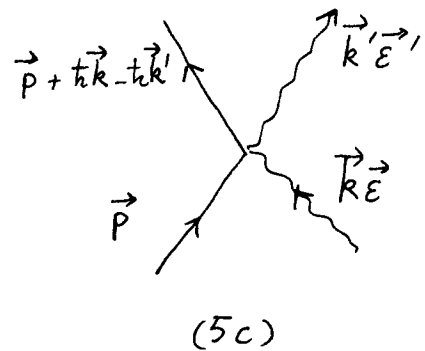
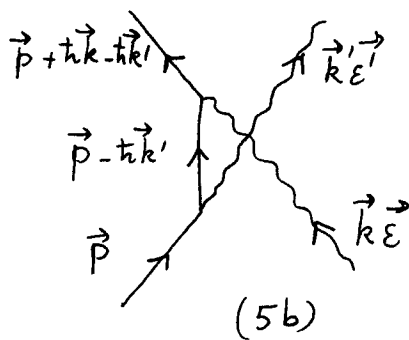
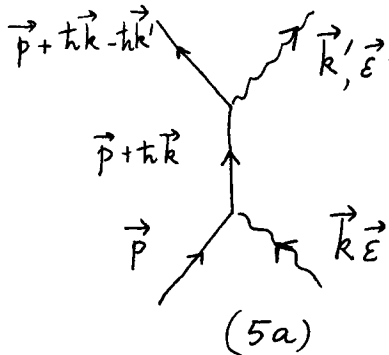
Exemples de processus physiques

- Emission et absorption de photons par un atome



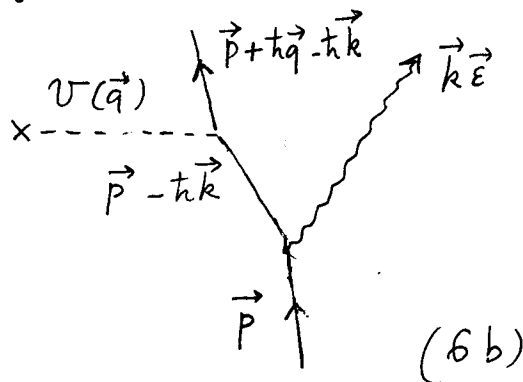
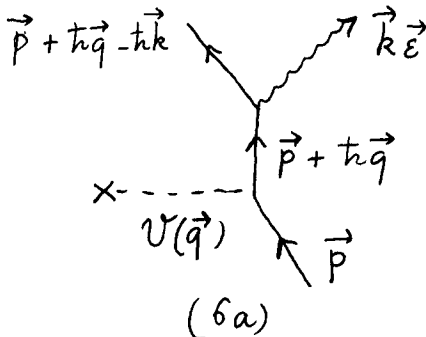
Une particule libre ne pourrait pas émettre ou absorber réellement un photon (impossibilité de conserver l'énergie et l'impulsion globales)

- Diffusion Compton par une particule chargée libre



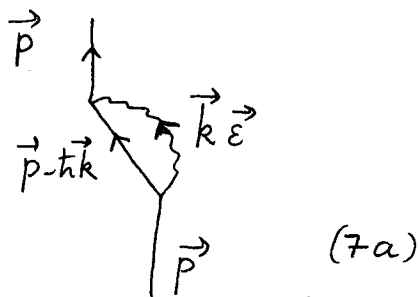
- "Bremsstrahlung"

(Emission d'un photon par une particule chargée en présence d'un potentiel)

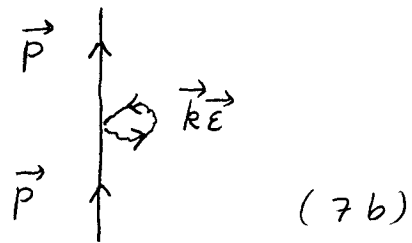


Le potentiel fournit l'impulsion nécessaire pour rendre l'émission d'un photon réel possible.

- Emission et réabsorption d'un photon par une particule chargée II-4



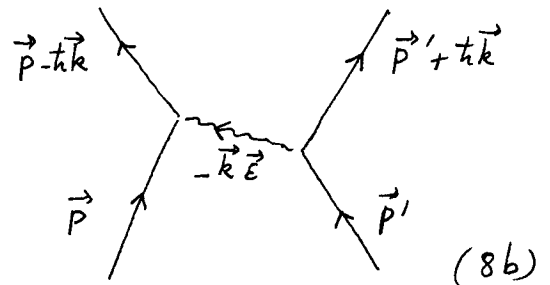
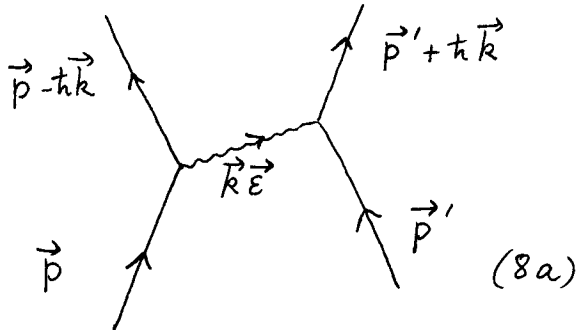
H_{I1} au 2^{ème} ordre



H_{I2} au 1^{er} ordre
(termes en $a_{kE} a_{kE}^+$)

Le photon émis en (7a) ne peut rester indéfiniment (car l'énergie n'est pas conservée). Il doit être réabsorbé. Transition réelle de $|\vec{p}; 0\rangle$ à $|\vec{p}; 0\rangle$ avec une transition virtuelle vers l'état intermédiaire $|\vec{p} - \hbar\vec{k}; \vec{k}\vec{E}\rangle$

- Echange d'un photon entre 2 particules chargées



Dans les 2 derniers exemples, un photon est émis et réabsorbé et n'apparaît ni dans l'état initial ni dans l'état final.

De tels photons (émis et réabsorbés) sont appelés parfois photons "virtuels" par opposition aux photons "réels" qui apparaissent dans l'état initial ou final.

Correction de masse pour une particule libre

1 - Effet physique associé au diagramme (7a)

- Amplitude d'ordre 0 $\uparrow \vec{p}$ + Amplitude (7a) $\left. \begin{matrix} \vec{p} - \hbar\vec{k} \\ \vec{k}\vec{E} \\ \vec{p} \end{matrix} \right\}$

= Début du développement de $e^{-i\delta E_1 T/\hbar} = 1 - i\delta E_1 T/\hbar + \dots$

où δE_1 représente le déplacement de l'état $|\vec{p}; 0\rangle$ dû au couplage introduit par H_I au second ordre avec $|\vec{p} - \hbar\vec{k}; \vec{k}\vec{E}\rangle$

$$\delta E_1 = \sum_{\vec{k}\vec{E}} \frac{|\langle \vec{p} - \hbar\vec{k}; \vec{k}\vec{E} | H_{I1} | \vec{p}; 0 \rangle|^2}{\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p} - \hbar\vec{k})^2}{2m} - \hbar\omega}$$

Remarque : l'amplitude (7a) est proportionnelle à T car $\delta^{(T)}(E_i - E_f)$ se réduit à $\delta^{(T)}(0)$ puisque $|\varphi_i\rangle = |\varphi_f\rangle$ et $\delta^{(T)}(0)$ est proportionnel à T (une fonction de largeur $\hbar/T$ et d'intégrale égale à 1 a une hauteur proportionnelle à T)

- Le diagramme (7a) est donc associé à une correction d'énergie de l'état $|\vec{p}; 0\rangle$

- Résultats du calcul de δE_1 (voir calcul de δE_1 page II-7)

$$\delta E_1 = - \frac{\vec{p}^2}{2m} \frac{\delta m_1}{m} \quad \text{avec} \quad \delta m_1 = \frac{q^2 k_c}{3\pi^2 \epsilon_0 c^2}$$

k_c coupe dans l'intégrale (divergente) sur k apparaissant dans l'expression donnant δE_1

$$\delta m_1 c^2 = \frac{q^2 k_c}{3\pi^2 \epsilon_0} = \frac{4}{3} E_{\text{Coul}}$$

$$\frac{\delta m_1}{m} = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\hbar \omega_c}{m c^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \quad \omega_c = c k_c$$

$$\frac{\delta m_1}{m} \ll 1 \quad \text{si} \quad \hbar \omega_c \ll m c^2 \quad (\text{Calcul non relativiste})$$

- Interprétation de δE_1 : Regroupement de δE_1 avec l'énergie non perturbée $\vec{p}^2/2m$ de l'état $|\vec{p}\rangle$

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + \delta E_1 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \left(1 - \frac{\delta m_1}{m} \right) \simeq \frac{\vec{p}^2}{2(m + \delta m_1)}$$

δm_1 : Correction de masse pour la particule représentant l'interaction électromagnétique (équation de Abraham-Lorentz)

- Fonction d'onde perturbée associée à $|\vec{p}; 0\rangle$

$$|\vec{p}; 0\rangle = \sqrt{Z} |\vec{p}; 0\rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} |\vec{p} - \hbar \vec{k}; \vec{k}, \vec{\epsilon}\rangle \frac{\langle \vec{p} - \hbar \vec{k}; \vec{k}, \vec{\epsilon} | H_{I1} | \vec{p}; 0 \rangle}{\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p} - \hbar \vec{k})^2}{2m} - \hbar \omega}$$

Z : coefficient de normalisation

$$Z = 1 - \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{|\langle \vec{p} - \hbar \vec{k}; \vec{k}, \vec{\epsilon} | H_{I1} | \vec{p}; 0 \rangle|^2}{\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p} - \hbar \vec{k})^2}{2m} - \hbar \omega \right]^2}$$

Image d'un nuage de photons virtuels "habsillant" la particule.

Équivalent quantique du champ transverse lié à une particule classique en mouvement uniforme (voir cours III)

2 Effet physique associé au diagramme 7b

$$\begin{aligned} \delta E_2 &= \langle \vec{p}; 0 | H_{I2} | \vec{p}; 0 \rangle = \frac{q^2}{2m} \langle \vec{p}; 0 | \vec{A}_\perp^2(\vec{r}) | \vec{p}; 0 \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{q^2}{2m} \mathcal{A}_\omega^2 = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{q^2 E_\omega^2}{2m \omega^2} \end{aligned}$$

- Interpretation physique de δE_2 : énergie cinétique de vibrations de la charge sous l'effet des "fluctuations du vide"

- Calcul de $\delta E_2 \rightarrow \delta E_2 = \frac{q^2 \hbar}{8\pi^2 \epsilon_0} \frac{k_c^2}{m}$

$$\delta E_2 = \delta m_2 c^2$$

Pourquoi n'apparaît-il pas un terme en $-\frac{\vec{p}^2}{2m} \frac{\delta m_2}{\delta m}$ analogue à celui trouvé plus haut pour δm_1 ?

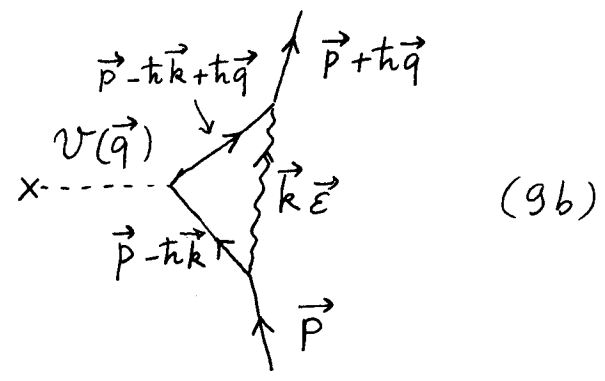
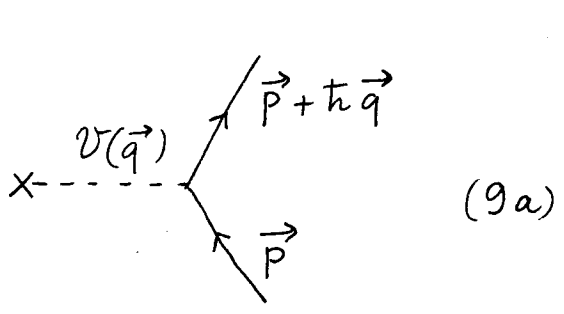
$\frac{\delta m_2}{m_2}$ est d'un ordre plus élevé en $1/c$ que $\frac{\delta m_1}{m_1}$

$$\frac{\delta m_1}{m} = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\hbar \omega_c}{mc^2}$$

$$\frac{\delta m_2}{m} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\hbar \omega_c}{mc^2} \right)^2$$

Il faut pousser le calcul plus loin en $1/c$ pour voir apparaître un tel terme

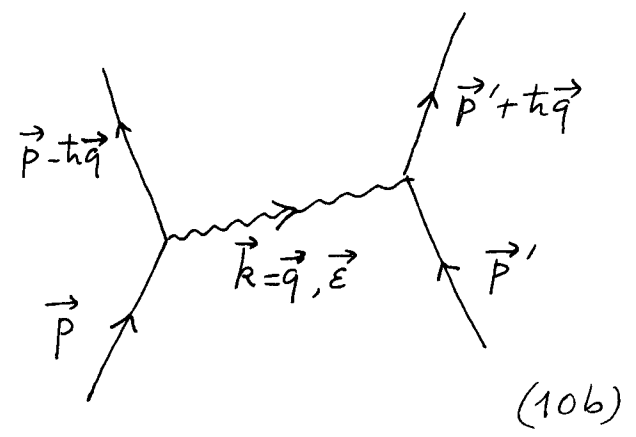
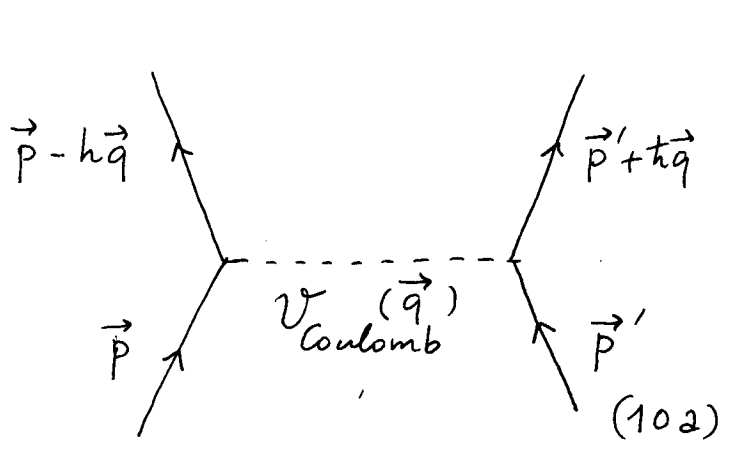
Corrections radiatives à la diffusion par un potentiel



Le diagramme (9b) est un exemple de processus (faisant intervenir un photon virtuel) qui corrige l'amplitude de diffusion à l'ordre le plus bas associée au diagramme (9a)

Apparition d'un "facteur de forme" $f(\vec{q})$ qui corrige $V(\vec{q})$. Justification de l'image de l'électron vibrant sous l'effet des fluctuations du vide et moyennant le potentiel $V(\vec{r})$ sur l'étendue de son mouvement de vibrations (Welton).

Interactions magnétiques et effet de retard



L'amplitude associée à l'échange d'un photon transverse (diagramme 10-b) corrige l'amplitude associée à l'interaction de Coulomb instantanée entre les 2 particules (diagramme 10-a)

L'amplitude 10-b représente donc ~~plussieurs~~ la contribution (d'ordre 2 en q) des effets de retard et des effets magnétiques

Calcul de δE_1

- Numérateur de l'expression donnant δE_1 (bas page II-4)

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} - \hbar \vec{k} ; \vec{k} \vec{E} | H_{I1} | \vec{p} ; 0 \rangle &= -\frac{q}{m} \mathcal{A}_\omega \langle \vec{p} - \hbar \vec{k} | \vec{E} \cdot \vec{p} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} | \vec{p} \rangle \\ &= -\frac{q}{m} \mathcal{A}_\omega \vec{E} \cdot (\vec{p} - \hbar \vec{k}) \langle \vec{p} - \hbar \vec{k} | \vec{p} - \hbar \vec{k} \rangle = -\frac{q}{m} \mathcal{A}_\omega \vec{E} \cdot \vec{p} \quad (\text{car } \vec{E} \cdot \vec{k} = 0) \end{aligned}$$

- Dénominateur

$$-\hbar\omega + 2\hbar \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

2^{ème} terme plus petit que le 1^{er} par un facteur $\frac{p}{mc} \sim \frac{v}{c}$

3^{ème} terme plus petit que le 1^{er} par un facteur $\frac{\hbar\omega}{mc^2}$

Dans le domaine non relativiste ($\hbar\omega \ll mc^2$, $v \ll c$), il est légitime de remplacer le dénominateur par $-\hbar\omega$

$$-\delta E_1 = - \sum_{\vec{k} \vec{E}} \left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3} \frac{(\vec{E} \cdot \vec{p})^2}{\hbar\omega}$$

$$\text{Si } L \rightarrow \infty \quad \sum_{\vec{k} \vec{E}} \sim \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}}$$

- Sommation sur les polarisations $\sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \epsilon_i \epsilon_j p_i p_j$ avec $i, j = x, y, z$

$$\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon'_i \epsilon'_j + k_i k_j = \delta_{ij} \quad \begin{array}{l} \text{Relations de fermeture} \\ \text{sur } \{ \vec{E}, \vec{E}', \vec{k} = \vec{k}/k \} \end{array}$$

$$\hookrightarrow \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij} - k_i k_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

- Intégration angulaire sur les angles polaires de $\vec{k}$ $\int d\Omega (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) = 4\pi (1 - \frac{1}{3}) \delta_{ij} = \frac{8\pi}{3} \delta_{ij}$

$$\hookrightarrow \delta E_1 = - \frac{q^2}{m^2 c^2} \frac{1}{6\pi^2 \epsilon_0} \vec{p}^2 \int_0^{k_c} dk$$

$$\hookrightarrow \delta E_1 = - \frac{\vec{p}^2}{2m} \frac{q^2 k_c}{3\pi^2 \epsilon_0 m c^2}$$