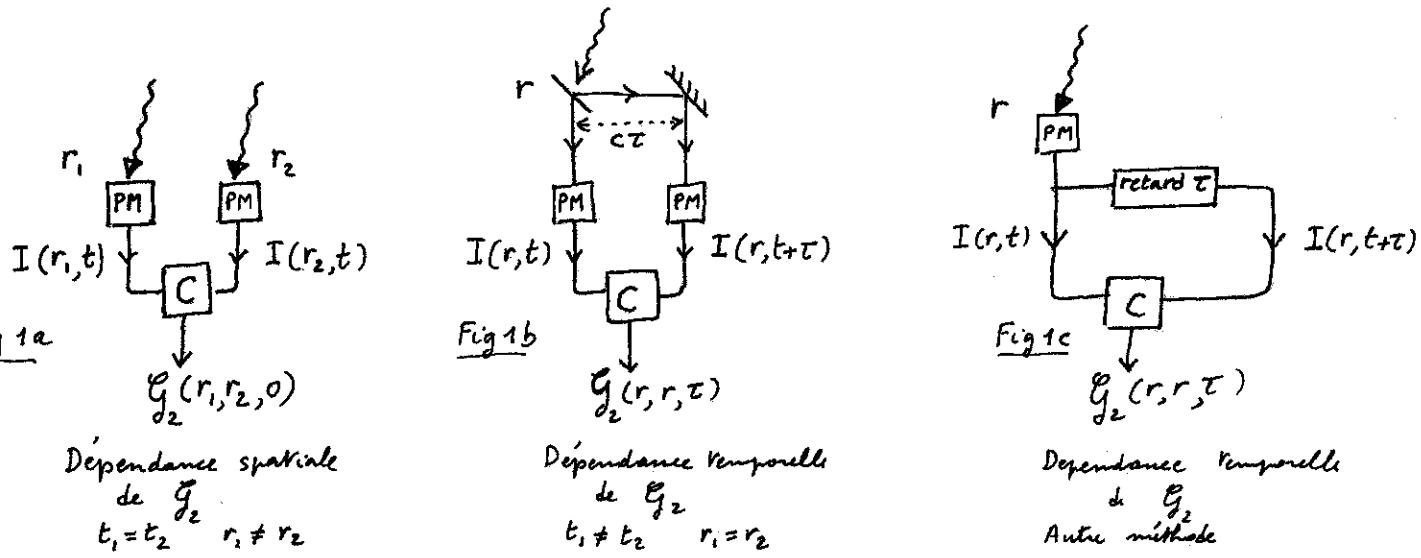


D - L'effet Hanbury Brown et Twiss

Dans tout ce §, on se limite à des champs stationnaires : G^2 (ou G^2) ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$. Pour simplifier les notations, on écrit $G_2(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2 t_2, r_1 t_1)$ sous la forme $G_2(r_1, r_2, \tau)$.

① Différents types d'expériences possibles

(PM : photomultiplicateur)
C : corrélateur



② Effet de "groupement" de photoclectrons pour une onde claire et fluette : L'effet Hanbury Brown et Twiss "sans photons".

a) Explication simple de l'effet de groupement

- Considérons les expériences des fig. 1b et 1c et comparons la valeur des fonctions de corrélation clairees $G_2(r, r, \tau)$ en $\tau = 0$ et $\tau = \infty$

$$G_2(r, r, 0) = \overline{I(r, t) I(r, t)} = \overline{I^2} \quad (\text{III - 1})$$

$$G_2(r, r, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{I(r, t) I(r, t+\tau)} \quad (\text{III - 2})$$

On dés que $\tau > \tau_c$ (τ_c : temps de corrélation), les 2 valeurs de I à des instants distants de τ sont non corrélées et la valeur moyenne du produit est égale au produit des valeurs moyennes. Donc

$$G_2(r, r, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{I(r, t)} \cdot \overline{I(r, t+\tau)} = (\overline{I})^2 \quad (\text{III - 3})$$

(On a utilisé la stationnarité : $\overline{I(r, t)}$ indépendant de t)

- On la valeur moyenne du carré d'une grande clarté est toujours supérieure au carré de la valeur moyenne

$$\overline{I^2} - \overline{I}^2 = \frac{1}{(I - \overline{I})^2} \geq 0 \quad (\text{III - 4})$$
 (Une variance clairee est toujours ≥ 0). On en déduit, en comparant III - 1 et III - 3 à III - 4, que :

$$G_2(r, r, 0) \geq G_2(r, r, \infty) \quad (\text{III - 5})$$

Une fois qu'on a détecté un photoélectron, on a plus (on attend) (III - 2)
de chances d'en détecter un autre tout de suite après, pas longtemps après.
Les photoélectrons sont groupés dans le temps ("bunching")

- La même propriété est vraie pour l'expérience de la figure 1 a.
 $(r_1 \neq r_2 \quad t_1 = t_2)$ si on admet de plus que $I(r)$ dépend peu de r .

$G_2(r_1, r_2, 0)$ est plus grand pour $r_1 = r_2$ ($\frac{G_2}{G_1} = \frac{I(r_1)}{I(r_2)}$) que
pour $|r_1 - r_2|$ grand [plus précisément pour $|r_1 - r_2|^2$ grand
devant l'aire de cohérence de l'onde incidente], auquel cas
 $\frac{G_2}{G_1} = \frac{I(r_1)}{I(r_2)} \frac{I(r_2)}{I(r_1)} = \left(\frac{I(r_1)}{I(r_2)}\right)^2$

- Le groupement temporel et spatial des photoélectrons
(mis en évidence la 1^{re} fois par Hahnung Brown et Twiss)
est parfois interprété en disant que les photons, étant des
bosons, aiment "s'agglomérer".

L'interprétation donnée plus haut ne fait aucunement appel
aux photons ni à leur caractère de bosons. Elle utilise seulement
le fait que un signal de corrélation d'intensité est un signal non linéaire en I
et que $\overline{I^2} \geq \overline{I}^2$

Comme l'effet photoélectrique, on peut donc comprendre l'effet
Hahnung Brown et Twiss sans faire appel au concept de photon.

b) Paramètre caractéristique du groupement : $g_2(0) - g_2(\infty)$

On se limite dans ce § à l'aspect temporel [figs 1 b et 1 c]

- Fonctions de corrélation normalisées

$$\begin{cases} g_1(\tau) = \frac{G_1(r, \tau)}{G_1(r, 0)} & (\text{rappelons que } G_1(r, \tau) = \overline{\mathcal{E}^{(+)}(r, t) \mathcal{E}^{(+)}(r, t+\tau)}) \\ g_2(\tau) = \frac{G_2(r, r, \tau)}{|G_1(r, 0)|^2} & \end{cases} \quad (\text{III - 6})$$

- On en déduit alors [comme $G_2(r, r, \infty) = |G_1(r, 0)|^2$ voir III-3]

$$g_2(0) - g_2(\infty) = g_2(0) - 1 = \frac{G_2(r, r, 0) - |G_1(r, 0)|^2}{|G_1(r, 0)|^2} = \frac{\overline{I^2} - \overline{I}^2}{\overline{I}^2} \quad (\text{III - 7})$$

- On peut exprimer $G_2(r, r, 0)$ et $G_1(r, 0)$ au moyen de la
densité de probabilité $P(\{\alpha\})$ [formule II-44]

$$\begin{aligned} G_2(r, r, 0) &= \int |\mathcal{E}^+(rt, \{\alpha\})|^4 P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \\ G_1(r, 0) &= \int |\mathcal{E}^+(rt, \{\alpha\})|^2 P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \end{aligned} \quad (\text{III - 8})$$

Il est commode de passer de la densité de probabilité $P(\{\alpha\})$ de
 $\{\alpha\}$ à la densité de probabilité $P(J)$ de $J = |\mathcal{E}^{(+)}(rt)|^2$

$$P(J) = \int \delta(J - |\mathcal{E}(rt, \{\alpha\})|^2) P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \quad (\text{III - 9})$$

Comme $P(\{\alpha\})$, $P(J)$ est une vraie densité de prob., définie > 0
et dont l'intégrale égale à 1. En reportant (III-9) dans (III-8), on obtient

$$g_2(r, r, 0) = \int j^2 P(j) dj \quad g_1(r, 0) = \int j P(j) dj \quad (\text{III-10})$$

(III-10)

et par suite

$$g_2(0) - g_2(\infty) = g_2(0) - 1 = \frac{\int dj P(j) [j - \int dj' j' P(j')]^2}{(\int dj j P(j))^2} \quad (\text{III-11})$$

L'effet de groupement des photoélectrons, c.-à-d le fait que $g_2(0) - g_2(\infty) \geq 0$, apparaît clairement sur cette formule comme étant lié au caractère positif de $P(j)$

c) Comment pourraient se manifester des effets quantiques ?

Tous les calculs précédents peuvent être repris dans le cadre d'une description quantique des champs.

D'après les considérations du § C ci-dessus, toutes les formules établies plus haut deviennent valables à condition de remplacer la densité de probabilité $P(\{\alpha\})$ par la densité de quasi-probabilité $P(\{d\})$. En particulier, l'analogie de (III-9) s'écrit

$$P(j) = \int \delta(j - 1/\epsilon(rt, \{d\}))^2 P(\{d\}) d^2\{d\} \quad (\text{III-12})$$

et définit une fonction $P(j)$ qui est, comme $P(\{d\})$, une densité de quasi-probabilité, c.-à-d pouvant prendre des valeurs négatives.

L'analogie de (III-11) s'écrit enfin

$$\xi_2(0) - \xi_2(\infty) = \xi_2(0) - 1 = \frac{\int dj P(j) [j - \int dj' j' P(j')]^2}{(\int dj j P(j))^2} \quad (\text{III-13})$$

Dans (III-13), toutes les quantités qui apparaissent sont positives, sauf éventuellement $P(j)$.

Si $\xi_2(0) - \xi_2(\infty)$ est strictement négatif, c.-à-d si l'on observe un effet de "dégroupement" ("antibunching"), cela ne peut provenir que du fait que $P(j)$ est une quasi-probabilité et non une probabilité, prenant des valeurs négatives.

Toute observation d'un dégroupement ne pourrait être donc comprise clairement et révélerait donc la nature quantique des champs arrivant sur le détecteur.

Il est amusant de constater que, dans les cas des expériences de corrélation d'intensité, le caractère quantique des champs électromagnétiques est révélé non pas par le groupement mais par le dégroupement des photoélectrons. Une analyse superficielle des phénomènes associerait le groupement au caractère boson des photons et exclurait le dégroupement en l'associant de manière exclusive et erronée à des fermions.

③ Cas des champs classiques gaussiens - Applications pratiques de l'effet Hanbury Brown et Twiss

a) Importance des champs gaussiens

Champs émis par des sources chaotiques (décharges, étoiles...) :
superposition d'un très grand nombre de trains d'ondes.
Théorème de la limite centrale \rightarrow champ total gaussien

b) Définition des fonctions de corrélation normalisées dans le cas $r_1 \neq r_2, t_1 \neq t_2$

$$g_2(r_1, r_2, \tau) = \frac{g^{(2)}(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r_1, t_1)}{g^{(1)}(r_1, t_1, r_1, t_1) g^{(2)}(r_2, t_2, r_2, t_2)} \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (\text{III-14})$$

On normalise g_2 en divisant $g^{(2)}$ par le produit des intensités en r_1, t_1 et r_2, t_2 . On pose de même

$$g_1(r_1, r_2, \tau) = \frac{g^{(1)}(r_1, t_1, r_2, t_2)}{\sqrt{g^{(1)}(r_1, t_1, r_1, t_1) g^{(2)}(r_2, t_2, r_2, t_2)}} \quad (\text{III-15})$$

c) Utilisation de la propriété générale des fonctions gaussienne

En utilisant (II-12), on obtient :

$$\begin{aligned} g^{(2)}(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r_1, t_1) &= \overline{E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1)} = \\ &= \overline{E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(+)}(r_1, t_1)} \overline{E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_2, t_2)} + \overline{E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(+)}(r_2, t_2)} \overline{E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1)} \\ &= g^{(1)}(r_1, t_1, r_1, t_1) g^{(1)}(r_2, t_2, r_2, t_2) + |g^{(1)}(r_1, t_1, r_2, t_2)|^2 \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

On a utilisé la définition de $g^{(1)}$ et le fait que $E^{(-)} = (E^{(+)})^*$

En portant (III-16) dans (III-14) et en utilisant (III-15), on obtient finalement

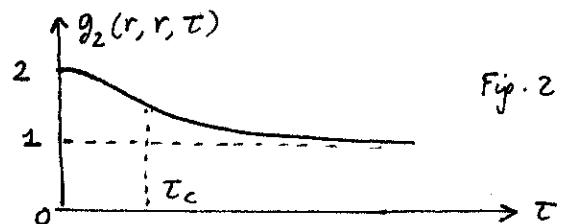
$$g_2(r_1, r_2, \tau) = 1 + |g_1(r_1, r_2, \tau)|^2 \quad (\text{III-17})$$

La mesure des corrélations d'intensité permet donc, dans le cas gaussien, d'obtenir simplement le module de la fonction de corrélation du champ classique.

d) 1ère application : mesure de temps de corrélation longs

On prend $r_1 = r_2 = r$ [figs 1b ou 1c]. D'après III-15 pour $r_1 = r_2$ et $t_1 = t_2$ ($\tau = 0$), $g_1 = 1$: $g_1(r, r, 0) = 1$. On en déduit l'allure suivante pour $g_2(r, r, \tau)$ en fonction de τ (fig 2)

g_2 décroît de 2 à 1 sur un intervalle $T_C \approx \frac{1}{\Delta\nu}$ de l'ordre de l'inverse de la largeur spectrale $\Delta\nu$ des champs incident.



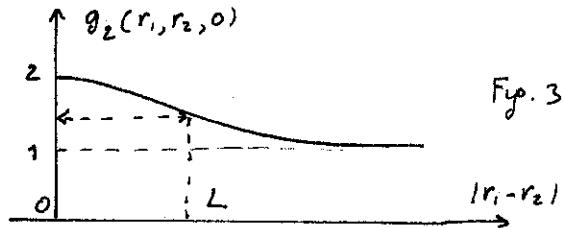
(III - 5)

Cette méthode est particulièrement intéressante quand t_c est long ($\Delta \tau$ trop petit pour pouvoir être mesuré par une analyse spectrale de la lumière)

e) 2^{me} application : mesure du diamètre apparent des étoiles

On prend $t_1 = t_2$ ($\tau = 0$) (fig 1a) et on étudie les variations de $g_2(r_1, r_2, 0)$ avec $|r_1 - r_2|$. Comme $g_2(r_1, r_2, 0) = 1$, on en déduit l'allure générale représentée sur la figure 3

g_2 décroît de 2 à 1 sur un intervalle de longueur L
 L^2 représente l'aire de cohérence du champ dans un plan \perp à la direction moyenne de propagation du faisceau.



Si la lumière provient d'une étoile vue sous l'angle apparent θ , on montre aisement que, λ étant la longueur d'onde du rayonnement,

$$\theta \approx \frac{\lambda}{L} \quad (\text{III} - 18)$$

La mesure de la dépendance spatiale des corrélations d'intensité permet donc de mesurer L , et par suite de remonter à θ .

Pour $\theta = 0,01''$, on a des longueurs L de l'ordre d'une dizaine de mètres.

On pourrait également mesurer directement g_1 en étudiant la visibilité de franges d'interférence obtenues en faisant interférer 2 ondes recueillies par 2 miroirs distants de p et en déterminant au bout de quelle distance ($p \approx L$) les franges disparaissent (méthode de Michelson).

La méthode de corrélation d'intensité semble plus commode pour les raisons suivantes (*):

- difficulté de faire de l'interférométrie avec des bases L de plusieurs mètres (**)
(stabilité mécanique, thermique...)
- les fluctuations de l'atmosphère affectent beaucoup plus le champ que l'intensité.
(introduction de déphasage différents sur les 2 bras de l'interféromètre)

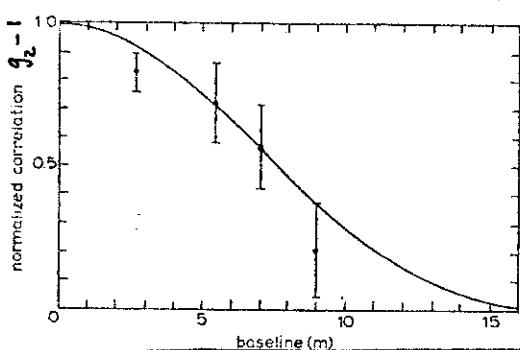


Fig 4. Exemple de résultat obtenu par Hanbury Brown et Twiss sur l'étoile Sirius A.
 θ correspond à $0,0069''$

Proc. Roy. Soc. A 248, 235 (1958)

(*) Elle ne s'applique cependant qu'à des étoiles suffisamment brillantes (voir remarque ii de la page suivante)

(**) En radioastronomie, on fait faire des corrélations d'intensité avec des bases de plusieurs kilomètres ("synthèse et supersynthèse d'ouverture")

Remarques

- (i) Que se passe-t-il lorsque la surface S des photocathodes est supérieure à l'aire de cohérence σ ?

Comme on mesure les signaux non pas avec des atomes détectés uniques, mais avec des surfaces de photocathode couvrant un grand nombre d'atomes, il faut sommer les fonctions $G^{(2)}$ correspondant à toutes les paires d'atomes possibles, l'un sur une photocathode, l'autre sur l'autre

$$\sum_i \sum_j G^{(2)}(r_i t_i, r_j t_j, r_i t_2, r_j t_2)$$

En remplaçant les sommes discrètes par des intégrales et en utilisant la dernière ligne (III-16), on obtient

$$\iint dr dr' \{ G^{(1)}(rt_i, rt_1) G^{(1)}(r't_2, r't_2) + |G^{(1)}(rt_i, r't_2)|^2 \} \quad (\text{III-19})$$

Si l'intensité lumineuse moyenne ne varie pas sur la surface S de la photocathode (on suppose par contre $S > \sigma$), la double intégrale de 1^{er} terme de (III-19) fait apparaître un facteur S^2 alors que celle du 2^{er} terme [après changement de variables $r, r' \rightarrow r, r-r'$] fait apparaître un facteur $S\sigma$.

Quand on augmente S , le fond constant, sans intérêt physique (1^{er} terme de III-19) augmente comme S^2 , et donc le bruit annexe comme $\sqrt{S^2} = S$, alors que le signal intéressant (2^{er} terme de III-19) augmente comme S . On ne gagne donc pas en signal sur bruit.

Il n'y a donc aucun intérêt à augmenter trop l'angle solide de détection. Il faut le choisir de manière que l'aire de détection soit égale à l'aire de cohérence σ .

- (ii) Que se passe-t-il lorsque le temps de réponse Θ de l'électronique est supérieur au temps de corrélation T_C des champs?

Un raisonnement très analogue au précédent montre que il faut "lisser" la dépendance temporelle de $G^{(2)}$, c.-à-d remplacer t_1 et t_2 par t et t' et faire l'intégrale $\frac{1}{\Theta} \int_{t_1}^{t_1+\Theta} dt \int_{t_2}^{t_2+\Theta} dt'$. Si $\Theta < T_C$ rien n'est changé, mais si $\Theta > T_C$, on trouve que le fond constant de $G^{(2)}(r_i, r_2)$ reste le même alors que l'amplitude de la courbe utile au-dessus du fond est réduite par un facteur T_C/Θ .

Si l'on veut mesurer le diamètre apparent d'une étoile au moyen de corrélations d'intensité, il ne faut donc pas opérer en lumière blanche, mais filtrer en fréquence la lumière qui arrive de manière à avoir un temps de corrélation pas trop court. Ceci réduit le flux lumineux et fait que la méthode de Hardbury Brown et Twiss n'est applicable qu'aux étoiles brillantes.

Par contre, il est toujours possible d'observer des franges d'interférence ordinaires en lumière blanche, ce qui rend la méthode de Michelson supérieure pour l'étude des étoiles peu brillantes à condition toutefois de remédier aux inconvénients mentionnés à la fin de la page (III-5). Des progrès très importants ont été réalisés dans cette direction au cours de la dernière décennie : contrôle par laser des variations de chemin optique et corrections, utilisation de l'interférométrie à bouclures ("speckle interferometry") conjuguée à des caméras électroniques très rapides pour éliminer l'effet des fluctuations de l'atmosphère (voir A. Labeyrie, La Recherche n° 67, mai 1976, page 421).

④ Absence d'effet Hanbury Brown et Twiss pour un faisceau laser

Lorsqu'on est suffisamment au-dessus du seuil, le champ issue d'un laser est stabilisé en amplitude. L'intensité I ne fluctue pas et reste constante. La fonction de corrélation $\overline{I(r, t_1) I(r, t_2)}$ ne dépend pas de $t_2 - t_1$, et par suite la courbe de la figure 2 se réduit alors à une horizontale d'ordonnée 1.

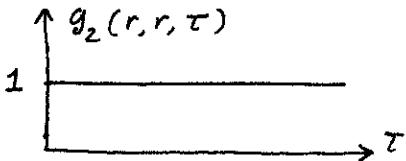


Fig. 5

La phase peut par contre diffuser, ce qui est à l'origine d'une largeur spectrale finie $\Delta\nu$ de l'onde laser. Un champ gaussien de même largeur spectrale donnerait un effet de groupement (figure 2 avec $T_c \approx 1/\Delta\nu$)

On voit ainsi que l'on peut très bien imaginer 2 champs de même largeur spectrale, c-a-d de même g , mais conduisant à des corrélations d'intensité complètement différentes.

E - Comptage de photoélectrons

Le problème est de déterminer la probabilité $p(n, T)$ de détecter n photoélectrons dans un intervalle T .

Pour simplifier, on ne présentera ici que les calculs semi-classiques. Les formules exactes résultent d'ailleurs simplement du remplacement de $P(\{\alpha\})$ par $P(\{d\})$ dans les expressions semi-classiques correspondantes.

① Cas d'une intensité I constante

- Divisons l'intervalle $t, t+T$ en N intervalles égaux Δt

$$T = N \Delta t \quad (\text{III-20})$$

- La probabilité de détecter un photoélectron dans l'un de ces intervalles est, d'après II-21, égale à $s I \Delta t$ celle de ne pas en détecter un est égale à $(1 - s I \Delta t)$

La probabilité de détecter n photoélectrons dans l'intervalle $t, t+T$ est donc donné par une loi binomiale

$$p(n, T) = C_n^N (s I \Delta t)^n (1 - s I \Delta t)^{N-n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} (s I \Delta t)^n (1 - s I \Delta t)^{N-n} \quad (\text{III-21})$$

- Limite $N \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\frac{N!}{(N-n)!} \rightarrow N^n$$

$$(1 - s I \Delta t)^{N-n} \rightarrow \left(1 - s \frac{I T}{N}\right)^N \rightarrow e^{-s I T} \quad (\text{III-22})$$

- En reportant (III-22) dans (III-21) et en utilisant (III-20), (III-8)
on obtient finalement

$$P(n, T) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad \text{avec } \mu = sIT \quad (\text{II-23})$$

c.-à-d une loi de Poisson de paramètre μ , où $\mu = sIT$ est le nombre moyen de photoélectrons dans l'intervalle T

(2) Cas d'une intensité $I(t)$ fluctuante avec $T \ll t_c$

- Comme T est très inférieur à t_c , on peut considérer que, pendant l'intervalle T , l'intensité I du champ ne fluctue pas et reste constante. D'une réalisation du champ à l'autre, I change cependant la distribution de probabilité $P(I)$ de I donnée par (III-9)

Pour chaque valeur possible de I , constante dans l'intervalle T , on a donc une loi de Poisson donnée par (II-23) qui joint ensuite moyennes sur toutes les valeurs possibles de I , pondérées par $P(I)$:

$$P(n, T) = \int dI P(I) \frac{(sIT)^n}{n!} e^{-sIT} \quad (\text{II-24})$$

On notera l'intégration des probabilités à 2 stades : même si I est bien défini, n est une variable aléatoire (le processus d'ionisation est aléatoire ; on ne peut prédire avec certitude quand il va se produire). Les fluctuations de I entraînent un caractère aléatoire supplémentaire

- Cas particulier d'un champ gaussien. La distribution de probabilité de E est alors gaussienne en $e^{-|E|^2/2E_0^2}$ et par suite celle de $I = |E|^2$ exponentielle

$$P(I) = \frac{1}{I_0} e^{-I/I_0} \quad (\text{II-25})$$

En reportant (II-25) dans (II-24), on obtient après des intégrales élémentaires

$$P(n, T) = \frac{\mu_0^n}{(1 + \mu_0)^{n+1}} \quad \text{avec } \mu_0 = sI_0 T \quad (\text{II-26})$$

c.-à-d une loi de Bose-Einstein de paramètre $\mu_0 = sI_0 T$

(3) Cas d'une intensité $I(t)$ fluctuante avec T quelconque

- Commençons par calculer $p(n, T)$ pour une réalisation bien définie de l'intensité, c.-à-d pour une certaine fonction $I(t)$ considérée comme certaine.

Le raisonnement du § 1 se généralise aisement : on divise l'intervalle T en N intervalles égaux, on calcule la probabilité d'avoir n succès et $N-n$ échecs et on passe à la limite $N \rightarrow \infty$ [voir le calcul détaillé dans L. Mandel, *Progress in Optics*, Vol II, 1963 p. 181, Appendice page 242]

On trouve le résultat suivant. Si l'on pose

$$\Omega(T) = s \int_t^{t+T} I(t') dt' \quad (\text{II-27})$$

on a pour $p(n, T)$ une loi de Poisson de paramètre $\Omega(T)$

$$p(n, T) = \frac{[\Omega(T)]^n}{n!} e^{-\Omega(T)} \quad (\text{II-28})$$

- Il faut ensuite moyenne sur toutes les réalisations possibles de l'intrante. Pour cela, il est commode d'introduire la distribution de probabilité $P(\Omega', T)$ de $\Omega(T)$ par une démarche identique à celle qui conduit à la formule (III-9). On a ainsi

$$P(\Omega', T) = \int S \left[\Omega' - s \int_t^{t+T} |\mathcal{E}(rt, \{\alpha\})|^2 \right] P(\{\alpha\}) d^2 \{\alpha\} \quad (\text{II-29})$$

d'où l'on déduit finalement la loi de Poisson composé

$$p(n, T) = \int d\Omega' P(\Omega', T) \frac{(\Omega')^n}{n!} e^{-\Omega'} \quad (\text{II-30})$$

- Le calcul quantique de $p(n, T)$ est présenté dans les références R. Glauber . Les Houches 1964 Quantum Optics and Electronics page 176
R. Glauber Physics of quantum Electronics (eds Kelley, Lax, Tannenwald) McGraw-Hill 1966 p. 788
P.L. Kelley, W.H. Kleiner , Phys Rev A 316 , 136 (1964)

Le résultat est très simple : il suffit de remplacer dans (II-30) la densité de probabilité $P(\Omega', T)$ par la densité de quasiprobabilité $P(\Omega', T)$ définie par une équation identique à (II-29) au remplacement de $P(\alpha)$ par $P(\alpha)$ près.

- Quelques applications du comptage de photoélectrons à l'étude expérimentale de la statistique du rayonnement laser ont été décrites dans le cours 1978-79 (voir pages x-5 à x-7)