

But de ce chapitre

Procéder à un rapide survol des notions les plus importantes relatives aux processus aléatoires classiques (en ne se limitant plus aux seules moyennes à 1 ou 2 temps).

Étudier plus particulièrement les processus de Markoff dont la simplicité permet une analyse mathématique beaucoup plus poussée. Introduire à propos de ces processus des équations importantes telles que l'équation de Fokker-Planck.

Souligner les simplifications qui apparaissent également lorsque le processus est gaussien, ou lorsque il est à la fois markoffien et gaussien. Appliquer les résultats généraux obtenus au mouvement Brownien.

① Quelques notions valables pour tous les processus aléatoires classiques

a) Définition d'un processus aléatoire

- Fonction $y(t)$ [ou ensemble de fonctions $y(t), z(t), \dots$] non connue avec certitude
- Très grand nombre de "réalisations" possibles de cette fonction.
- Prévisions statistiques effectuées grâce à des moyennes d'ensemble sur ces diverses réalisations.

b) Comment caractériser complètement un processus aléatoire?

$W_1(y, t_1) dy$: Probabilité d'avoir à l'instant t_1 y compris entre y_1 et $y_1 + dy$,

$W_2(y_1, t_1, y_2, t_2) dy_1 dy_2$: Pbté d'avoir y entre y_1 et $y_1 + dy_1$ à t_1 et y entre y_2 et $y_2 + dy_2$ à t_2

et ainsi de suite

Le processus aléatoire est entièrement défini si l'on connaît toutes les densités de probabilité $W_n(y_1, t_1, y_2, t_2, \dots, y_n, t_n)$ pour toutes les valeurs de n , et, n étant fixé, pour tous les instants $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Exemples de calculs de moyennes :

$$\overline{y(t_1)} = \int dy_1 y_1 W_1(y_1, t_1) \quad \overline{y(t_1) y(t_2)} = \iint dy_1 dy_2 y_1 y_2 W_2(y_1, t_1, y_2, t_2) \quad (IV-1)$$

c) Egalités satisfaites par les densités de probabilité W_n

Sont postulées - Découlent de l'interprétation probabiliste des W_n

$$W_n \geq 0 \quad \iint \dots \int dy_1 \dots dy_n W_n(y_1, t_1, \dots, y_n, t_n) = 1 \quad (\text{Normalisation}) \quad (IV-2)$$

W_n : fonction symétrique de $y_1, t_1, y_2, t_2, \dots, y_n, t_n$

Si $p < n$, W_p peut s'obtenir à partir de W_n . Par exemple :

$$W_2(y_1, t_1, y_3, t_3) = \int dy_2 W_3(y_1, t_1, y_2, t_2, y_3, t_3) \quad (IV-3)$$

d) Stationnarité. Si le processus est stationnaire,

$$W_n(y_1, t_1, y_2, t_2, \dots, y_n, t_n) = W_n(y_1, t_1 + \tau, y_2, t_2 + \tau, \dots, y_n, t_n + \tau) \quad (IV-4)$$

Nous le supposons à partir de maintenant.

e) Probabilités conditionnelles

- A partir de W_1 et W_2 , on peut introduire une probabilité conditionnelle p_1 :

$$W_2(y_1, t_1, y_2, t_2) = W_1(y_1, t_1) p_1(y_1, t_1 | y_2, t_2) \quad (IV-5)$$

$p_1(y_1, t_1 | y_2, t_2)$: pbté pour que, ayant trouvé y_1 à t_1 , on trouve ensuite y_2 à t_2 .

- De même, à partir de W_2 et W_3 , on introduit p_2 :

$$W_3(y_1, t_1, y_2, t_2, y_3, t_3) = W_2(y_1, t_1, y_2, t_2) p_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3) \quad (IV-6)$$

$P_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3)$: pbté pour que ayant trouvé y_1 à t_1 , et y_2 à t_2 , on trouve ensuite y_3 à t_3 .

- Et ainsi de suite, ... $P_{n-1}(y_1, t_1, y_2, t_2 \dots y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n)$ est la pbté pour que ayant trouvé y_1 à t_1 , y_2 à t_2 , ..., y_{n-1} à t_{n-1} , on trouve ensuite y_n à t_n .

- De (IV-5) et (IV-6) on déduit :

$$W_3(y_1, t_1, y_2, t_2, y_3, t_3) = W_1(y_1, t_1) P_1(y_1, t_1 | y_2, t_2) P_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3) \quad (IV-7)$$

et plus généralement

$$W_n(y_1, t_1, y_2, t_2 \dots y_n, t_n) = W_1(y_1, t_1) P_1(y_1, t_1 | y_2, t_2) P_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3) \dots P_{n-1}(y_1, t_1, y_2, t_2 \dots y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) \quad (IV-8)$$

Chaque densité W_n peut donc s'exprimer en fonction de W_1 , et des pbtés conditionnelles $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$.

- En identifiant les 2 valeurs de $W_2(y_1, t_1, y_3, t_3)$ obtenues, d'une part en remplaçant y_2, t_2 par y_3, t_3 dans (IV-5), d'autre part en intégrant (IV-7) sur y_2 et en utilisant (IV-3), on obtient l'identité suivante

$$P_1(y_1, t_1 | y_3, t_3) = \int dy_2 P_1(y_1, t_1 | y_2, t_2) P_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3) \quad (IV-9)$$

- Stationnarité. Elle implique qu'on peut écrire :

$$P_1(y_1, t_1 | y_2, t_2) = P_1(y_1 | y_2, \tau) \quad \text{avec } \tau = t_2 - t_1 \quad (IV-10)$$

- Normalisation. De (IV-2) on déduit aisément :

$$\int dy_2 P_1(y_1, t_1 | y_2, t_2) = 1 \quad (IV-11)$$

2) Processus de Markoff

a) Définition : Un processus est dit de Markoff si, $\forall n$

$$P_{n-1}(y_1, t_1, y_2, t_2 \dots y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) = P_1(y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) \quad (IV-12)$$

Interprétation : une fois arrivé en y_{n-1} à l'instant t_{n-1} après être passé par y_1 à t_1 , y_2 à t_2 , ..., le système évolue ensuite d'une manière qui ne dépend que de y_{n-1} . En d'autres termes, l'évolution d'un système markoffien à partir d'un instant donné ne dépend que de l'état à cet instant et non de toute l'histoire passée.

b) Comment caractériser complètement un processus de Markoff ?

En reportant la définition (IV-12) dans (IV-8) et en écrivant, pour simplifier les notations, $p(y, t | y', t')$ au lieu de $P_1(y, t | y', t')$, on obtient :

$$W_n(y_1, t_1, y_2, t_2, \dots y_n, t_n) = W_1(y_1, t_1) p(y_1, t_1 | y_2, t_2) p(y_2, t_2 | y_3, t_3) \dots p(y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) \quad (IV-13)$$

Toutes les densités de pbté W_n sont donc déterminées si l'on connaît

- la densité W_1
- la probabilité conditionnelle élémentaire $p(y, t | y', t')$

Très souvent la densité $W_1(y)$ (indépendante de t par suite de la stationnarité) représente la distribution d'équilibre que l'on atteint au bout d'un temps τ suffisamment long, quel que soit l'état y_0 d'où l'on parte. Dans ce cas, on a

$$W_1(y) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} p(y_0 | y, \tau) \quad (IV-14)$$

et le processus de Markoff est ^(alors) entièrement défini par la donnée de $p(y_0 | y, \tau)$. On notera la simplification énorme par rapport à un processus aléatoire quelconque qui nécessite la donnée d'une infinité de densités W_n .

Physiquement, $P(y_0|yT)$ permet d'étudier comment le "bruit" IV-3
apparaît dans le système. Si l'on part d'un très grand nombre de
systèmes, tous dans l'état certain y_0 , ils seront distribués, un instant
 T après, suivant la loi $P(y_0|yT)$ [comparer avec la discussion du
§ B 2 du chapitre précédent, en notant toutefois qu'on étudie ici la
distribution complète et non pas seulement l'écart quadratique moyen]

c) Equation de Smoluchowski

La relation (IV-9) est valable pour tout processus aléatoire. Si le
processus est markoffien, cette relation devient, compte tenu de (IV-12) :

$$P(y_1 t_1 | y_3 t_3) = \int dy_2 P(y_1 t_1 | y_2 t_2) P(y_2 t_2 | y_3 t_3) \quad (IV-15)$$

C'est l'équation de Smoluchowski qui impose une contrainte sur
la pble conditionnelle élémentaire.

Remarque : On notera la ressemblance entre (IV-15) et l'équation fondamentale

$$\langle y_1 t_1 | y_3 t_3 \rangle = \int dy_2 \langle y_1 t_1 | y_2 t_2 \rangle \langle y_2 t_2 | y_3 t_3 \rangle \quad (IV-16)$$

où $|y t\rangle$ représente le vecteur propre, de valeur propre y , de l'opérateur
position $Y(t)$ dans le point de vue de Heisenberg [l'équation (IV-16) s'obtient
en insérant la relation de fermeture relative à $Y(t_2)$ entre $\langle y_1 t_1 |$ et $|y_3 t_3 \rangle$]
Il faut bien noter cependant que $\langle y_1 t_1 | y_3 t_3 \rangle$ est une amplitude de
pble et non une pble. L'équation (IV-16) exprime que pour aller de
 $y_1 t_1$ à $y_3 t_3$, la particule peut emprunter plusieurs chemins et que les
amplitudes associées à ces divers chemins interfèrent. Les interprétations des
équations (IV-15) et (IV-16) sont donc tout à fait différentes.

d) Etablissement d'une "équation pilote" à partir de l'équation de Smoluchowski

i) Fonction de distribution $P(y, t)$

Supposons qu'à un instant initial t_0 on possède sur le système une
certaine information, caractérisée par une fonction de distribution $P(y_0, t_0)$
donnant la pble d'avoir y entre y_0 et $y_0 + dy_0$. $P(y_0, t_0)$ n'est en général
pas la distribution d'équilibre $W_1(y_0)$. On peut dire encore qu'on considère
à t_0 un très grand nombre de systèmes identiques, dont une proportion
 $P(y_0, t_0) dy_0$ part de la valeur certaine y_0 . Que vont devenir ces systèmes
à l'instant t ? Quelle va être leur distribution $P(y, t)$? Peut-on
obtenir une équation d'évolution pour $P(y, t)$? [analogie avec la
densité dans l'espace des phases et l'équation de Liouville en mécanique
statistique].

ii) Equations d'évolution de la fonction de distribution

- les systèmes partis de y_0 sont distribués, un instant t après,
suivant la loi $P(y_0|y, t)$. On en déduit que :

$$P(y, t) = \int dy_0 P(y_0, t_0) P(y_0|y, t-t_0) \quad (IV-17)$$

$$P(y, t+\Delta t) = \int dy_0 P(y_0, t_0) P(y_0|y, t+\Delta t-t_0) \quad (IV-18)$$

- Peut-on relier directement $P(y, t+\Delta t)$ à $P(y, t)$ sans passer
par l'intermédiaire de la distribution initiale? Il suffit pour cela
d'utiliser l'équation de Smoluchowski

$$P(y_0|y, t+\Delta t-t_0) = \int dy' P(y_0|y', t-t_0) P(y'|y, \Delta t) \quad (IV-19)$$

qui, reportée dans (IV-18) donne, compte tenu de (IV-17) :

$$\begin{aligned}
 P(y, t + \Delta t) &= \iint dy_0 dy' P(y_0, t_0) P(y_0 | y', t - t_0) P(y' | y, \Delta t) \\
 &= \int dy' P(y', t) P(y' | y, \Delta t) \quad (IV-20)
 \end{aligned}$$

- Il importe de bien réaliser que l'établissement d'une relation directe entre $P(y, t + \Delta t)$ et $P(y', t)$ n'est possible qu'en raison du processus est de Markoff. Dans le cas d'un processus quelconque, on peut toujours écrire (IV-17) et (IV-18) [en remplaçant p par p_1]. Mais l'équation (IV-19) n'est plus valable. Il faut repartir de (IV-9) qui donne dans ce cas

$$P_1(y_0 | y, t + \Delta t - t_0) = \int dy' P_1(y_0 | y', t - t_0) P_2(y_0; y', t - t_0 | y, t + \Delta t - t_0) \quad (IV-21)$$

l'équivalent de l'équation (IV-20) devient alors

$$P(y, t + \Delta t) = \iint dy_0 dy' P(y_0, t_0) P_1(y_0 | y', t - t_0) P_2(y_0; y', t - t_0 | y, t + \Delta t - t_0) \quad (IV-22)$$

le fait que P_2 dépende maintenant de y_0 empêche de faire apparaître simplement $P(y', t)$ lors de l'intégration sur y_0 (comme dans IV-20).

iii) Interprétation physique

Pour interpréter (IV-20), "discretisons" y , c-à-d découpons l'axe des y en intervalles très petits repérés par un indice discret i et remplaçons la fonction $P(y, t)$ par la suite discrète $P(y_i, t)$. L'équation (IV-20) devient alors

$$P(y_i, t + \Delta t) = \sum_j P(y_j, t) P(y_j | y_i, \Delta t) \quad (IV-23)$$

$P(y_j | y_i, \Delta t)$ peut être interprété comme la probabilité de transition de la "case" j vers la "case" i au cours du temps Δt . Récrivons alors (IV-23) :

$$P(y_i, t + \Delta t) = P(y_i, t) P(y_i | y_i, \Delta t) + \sum_{j \neq i} P(y_j, t) P(y_j | y_i, \Delta t) \quad (IV-24)$$

Comme, d'après la normalisation (IV-11)

$$\sum_e P(y_e | y_e, \Delta t) = 1 \quad (IV-25)$$

le 1^{er} terme du 2nd membre de (IV-24) peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned}
 P(y_i, t) P(y_i | y_i, \Delta t) &= P(y_i, t) + P(y_i, t) [P(y_i | y_i, \Delta t) - 1] \\
 &= P(y_i, t) - \sum_{e \neq i} P(y_i, t) P(y_i | y_e, \Delta t) \quad (IV-26)
 \end{aligned}$$

de sorte qu'il vient finalement :

$$\begin{aligned}
 P(y_i, t + \Delta t) - P(y_i, t) &= - \sum_{e \neq i} P(y_i, t) P(y_i | y_e, \Delta t) \\
 &\quad + \sum_{j \neq i} P(y_j, t) P(y_j | y_i, \Delta t) \quad (IV-27)
 \end{aligned}$$

L'interprétation de (IV-27) est très claire : la variation du nombre de systèmes dans la case i au cours de Δt est due au départ de systèmes initialement dans i vers d'autres cases e et à l'arrivée dans la case i de systèmes initialement dans d'autres cases j .

Equation très analogue à l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz.

Remarque : On peut se demander comment définir un processus de Markoff quantique. Par suite de la différence fondamentale d'interprétation entre IV-15 et IV-16, il ne semble pas possible de partir de la notion de probabilité conditionnelle. Par contre, on peut partir de l'opérateur dérivé p [analogue de $P(y, t)$] et dire que le processus est de Markoff si la vitesse de variations de p à l'instant t ne dépend que de $p(t)$ et non de l'histoire passée de p . Bien sûr, si p englobe tous les degrés de liberté, on a $i \frac{d}{dt} p = [H, p]$ et une telle situation est réalisée. Mais ce n'est plus forcément le cas si l'on considère un sous-système du système global et l'opérateur dérivé réduit correspondant.

e) Cas d'un processus à diffusion lente - Équation de Fokker-Planck

(IV-5)

Reprenons de (IV-20), mais supposons maintenant que le processus soit à diffusion lente, c-à-d que, pour Δt petit, $P(y'|y, \Delta t)$ ne prend de valeurs notable que pour des valeurs de y' très proches de y . Posons alors

$$\Delta y = y' - y \quad (IV-28)$$

et récrivons (IV-20) sous la forme :

$$P(y, t + \Delta t) = \int d\Delta y P(y - \Delta y, t) P(y - \Delta y | y, \Delta t) \quad (IV-29)$$

L'intégrant de (IV-29) est une fonction de y et Δy , variant lentement en fonction de y . La présence de P entraine que Δy reste petit, ce qui permet d'effectuer un développement de Taylor de l'intégrant en puissances de Δy autour du point $y + \Delta y$:

$$P(y - \Delta y, t) P(y - \Delta y | y, \Delta t) = P(y, t) P(y | y + \Delta y, \Delta t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\Delta y)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} P(y, t) P(y | y + \Delta y, \Delta t)$$

Reprenons alors (IV-30) dans (IV-29) et intervenons l'intégrale sur Δy (IV-30) et la dérivation par rapport à y . Il vient :

$$P(y, t + \Delta t) = P(y, t) \int d\Delta y P(y | y + \Delta y, \Delta t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} P(y, t) \frac{1}{n!} \int d\Delta y (\Delta y)^n P(y | y + \Delta y, \Delta t) \quad (IV-31)$$

D'après la normalisation (IV-11), le 1^{er} terme du 2nd membre vaut $P(y, t)$. Faisons alors passer ce terme au 1^{er} membre, divisons par Δt , et prenons la limite $\Delta t \rightarrow 0$. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} P(y, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta y (\Delta y)^n P(y | y + \Delta y, \Delta t) \quad (IV-32)$$

Introduisons alors les moments $M_n(y)$

$$M_n(y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta y (\Delta y)^n P(y | y + \Delta y, \Delta t) \quad (IV-33)$$

$M_n(y)$ est, au facteur $1/n!$ près, le produit par Δt de la moyenne de l'accroissement $(\Delta y)^n$ subi au cours du temps Δt par la fonction aléatoire partant de y . Par exemple, $M_2(y)$ a la signification d'un coefficient de diffusion. On obtient donc finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} M_n(y) P(y, t) \quad (IV-34)$$

équation aux dérivées partielles appelée équation de Fokker-Planck généralisée. Calculer $P(y_0, t_0 | y, t)$ revient à trouver la solution de cette équation se réduisant à $\delta(y - y_0)$ pour $t = t_0$, c-à-d la fonction de Green de (IV-34).

Remarques

(i) Dans de nombreux cas, les moments d'ordre > 2 sont nuls. L'équation (IV-34) se réduit alors à une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 en t et 2 en y , qui est la vraie équation de Fokker-Planck.

Nous avons rencontré une telle équation dans le cours 75-76 (page XII-8) et montré alors que le terme en M_1 correspond à un déplacement de la distribution (drift) alors que le terme en M_2 correspond à un élargissement (diffusion).

(ii) L'équation de Fokker-Planck étudiée en 75-76 était obtenue à partir d'une équation quantique. Or nous avons indiqué plus haut les difficultés qu'il y avait à introduire en théorie quantique une telle conditionnelle et une équation de Smoluchowski (différences d'interprétation entre IV-15 et IV-16). Le paradoxe est levé si l'on se souvient que l'équation de Fokker-Planck étudiée en 75-76 décrivait l'évolution non d'une vraie densité de probabilité mais d'une densité de quasi-probabilité.

③ Processus aléatoires gaussiens

IV-6

a) Rapports sur les variables aléatoires gaussiennes

Variable aléatoire gaussienne à 1 dimension

C'est une grandeur x non connue avec certitude à laquelle est associée une loi de prob. gaussienne :

$$P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (IV-35)$$

σ : écart quadratique moyen (on suppose $\bar{x} = 0$)

La fonction caractéristique $\varphi(u)$, T.F. de $P(x)$, s'écrit

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{iux} P(x) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \quad (IV-36)$$

Variable aléatoire gaussienne à n dimensions

- Une v.a. à n dimensions est un ensemble de n grandeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ non connues avec certitude. Soient $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ la loi de prob. et la fonction caractéristique.

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n e^{i \sum u_i x_i} P(x_1, \dots, x_n) \quad (IV-37)$$

L'intérêt de φ est que les dérivées de φ à l'origine sont liés aux divers moments. Par exemple, on obtient aisément à partir de IV-37

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \varphi(u_1, \dots, u_n) \Big|_{u_1=\dots=u_n=0} = -\overline{x_i x_j} \quad (IV-38)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k \partial u_l} \varphi(u_1, \dots, u_n) \Big|_{u_1=\dots=u_n=0} = \overline{x_i x_j x_k x_l} \quad (IV-39)$$

- Une v.a. à n dimensions est gaussienne si la fonction caractéristique est de la forme :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = e^{-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} u_i u_j} \quad (IV-40)$$

- Interprétation des C_{ij} . En portant (IV-40) dans (IV-38), on obtient :

$$C_{ij} = \overline{x_i x_j} = C_{ji} \quad (IV-41)$$

Une variable aléatoire gaussienne est donc entièrement définie par les corrélations $C_{ij} = \overline{x_i x_j}$. En écrivant que, $\forall \lambda_i, (\sum_i \lambda_i x_i)^2 \geq 0$, on démontre aisément que la matrice C , d'éléments C_{ij} est définie positive et admet donc une inverse.

- Moments d'ordre supérieur à 2. En portant (IV-40) dans (IV-39), on obtient aisément

$$\overline{x_i x_j x_k x_l} = \overline{x_i x_j} \overline{x_k x_l} + \overline{x_i x_k} \overline{x_j x_l} + \overline{x_i x_l} \overline{x_j x_k} \quad (IV-42)$$

égalité qui se généralise aisément à tous les moments pairs, qui se calculent ainsi en fonction des corrélations C_{ij} (les moments impairs étant nuls)

- Expression explicite de la loi de prob. $P(x_1, \dots, x_n)$, T.F. de $\varphi(u_1, \dots, u_n)$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int du_1 \dots du_n e^{-i \sum u_i x_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} u_i u_j} \quad (IV-43)$$

En faisant apparaître les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\|C_{ij}\|$, on transforme l'intégrale à n dimensions (IV-43) en 1 produit de n intégrales simples, ce qui donne

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \text{Det } C}} e^{-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij} x_i x_j} \quad (IV-44)$$

$\|b_{ij}\|$ est la matrice inverse de la matrice C d'éléments $\|C_{ij}\|$

- Indépendance et non-corrélation

2 v.a. x_i et x_j sont non corrélés si $\overline{x_i x_j} = \overline{x_i} \overline{x_j}$. Elles sont indépendantes si la loi de prob. factorise $P(x_i, x_j) = P(x_i) P(x_j)$. L'indépendance entraîne la non-corrélation mais la réciproque n'est pas vraie.

S'il s'agit de v.a. gaussiennes, la non-corrélation entraîne que les matrices C et B sont diagonales, et que par suite P est factorisé. Dans le cas gaussien, indépendance et non-corrélation sont donc des notions équivalentes.

- Un théorème utile (énoncé sans démonstration)

(IV-7)

Toute superposition linéaire de v.à. gaussiennes est une v.à. gaussienne.

b) Définition d'un processus aléatoire gaussien stationnaire (dans l'espace des temps)

Fixons n instants arbitraires $t_1, t_2, \dots, t_n$. L'ensemble des valeurs prises par la fonction aléatoire $y(t)$ en ces n instants $\{y(t_1), \dots, y(t_n)\}$ forme une v.à. à n dimensions.

La fonction aléatoire est gaussienne si, quels que soient $t_1, t_2, \dots, t_n$, et quel que soit le nombre n de ces instants, $\{y(t_1), \dots, y(t_n)\}$ est une v.à. gaussienne à n dimensions.

Comme chacun de ces ensembles est alors entièrement défini par la somme des corrélations $y(t_i)y(t_j)$, il en est de même pour la fonction aléatoire elle-même qui est entièrement définie par la fonction de corrélation $g(t'-t) = \overline{y(t)y(t')}$. En particulier, toutes les moyennes à plus de 2 temps sont calculables à partir de la fonction de corrélation. Par exemple, d'après (IV-42)

$$\overline{y_1 y_2 y_3 y_4} = \overline{y_1 y_2} \overline{y_3 y_4} + \overline{y_1 y_3} \overline{y_2 y_4} + \overline{y_1 y_4} \overline{y_2 y_3} \quad \text{où } y_i = y(t_i) \quad (IV-45)$$

c) Conséquences sur les coefficients de Fourier

- D'après (III-2) ou (III-3), chaque coefficient de Fourier est une combinaison linéaire des $y(t)$ correspondant à toutes les valeurs de t . D'après le théorème énoncé à la fin du § 3a, les coefficients de Fourier de $y(t)$ sont donc aussi des v.à. gaussiennes.

- Nous avons vu au § C 2 du chapitre précédent que la stationnarité de $y(t)$ impliquait que les deux coefficients de Fourier étaient non-corrélés.

Comme ils sont de plus gaussiens, ils sont indépendants.

- En résumé, les coefficients de Fourier d'une fonction aléatoire gaussienne sont des v.à. indépendantes gaussiennes, l'écart quadratique moyen de chacun de ces coefficients étant tout simplement proportionnel à la densité spectrale du processus, T.F. de la fonction de corrélation.

d) Calcul de quelques probabilités conditionnelles.

- Nous pouvons toujours supposer sans perte de généralité que

$$\overline{y^2} = 1 \quad (IV-46)$$

(il suffit de normer y en le divisant par $\sqrt{\overline{y^2}}$).

- $W_1(y, t_1)$, qui ne dépend pas de t_1 , est la loi de prob. de la v.à. gaussienne à 1 dimension $y(t_1)$. D'après (IV-35) et (IV-46), on a

$$W_1(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_1^2/2} \quad (IV-47)$$

- $W_2(y_1, t_1, y_2, t_2)$, qui ne dépend que de $t_2 - t_1$, est la loi de prob. de la v.à. gaussienne à 2 dimensions $\{y(t_1), y(t_2)\}$. Posons

$$C_{ij} = \overline{y(t_i)y(t_j)} = C_{ji} = g(t_j - t_i) \quad (IV-48)$$

D'après (IV-46), $C_{ii} = 1$. On déduit alors de (IV-44) que

$$W_2(y_1, t_1, y_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det C}} e^{-\frac{1}{2} [b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + 2b_{12} y_1 y_2]} \quad (IV-49)$$

où la matrice $B = \|b_{ij}\|$ est l'inverse de $C = \|C_{ij}\|$

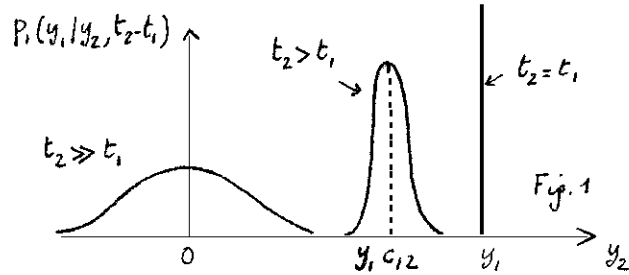
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = C = \begin{pmatrix} 1 & C_{12} \\ C_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (IV-50)$$

On obtient ainsi

$$W_2(y_1, t_1, y_2, t_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - C_{12}^2}} e^{-\frac{1}{2} [y_1^2 + y_2^2 - 2C_{12} y_1 y_2] / (1 - C_{12}^2)} \quad (IV-51)$$

- A partir des expressions (IV-47) et (IV-51) de W_1 et W_2 , on déduit aisément, compte tenu de (IV-5) :

$$P_1(y_1 | y_2, t_2 - t_1) = \frac{W_2(y_1, t_1, y_2, t_2)}{W_1(y_1, t_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - c_{12}^2}} e^{-\frac{(y_2 - y_1 c_{12})^2}{2(1 - c_{12}^2)}} \quad (IV-52) \quad [IV-8]$$



Considérée comme fonction de y_2 , $P_1(y_1 | y_2, t_2 - t_1)$ est une gaussienne normalisée, centrée en $y_1 c_{12}$ et de largeur $\sqrt{1 - c_{12}^2}$. Quand $t_2 - t_1$ croît de 0 à ∞ , c_{12} décroît de 1 à 0. Le centre de la gaussienne décroît donc de y_1 à 0 et sa largeur croît de 0 à 1 (Fig. 1)

- On pourrait de même calculer $W_3(y_1, t_1, y_2, t_2, y_3, t_3)$ qui, d'après (IV-44) s'écrit

$$W_3(y_1, t_1, y_2, t_2, y_3, t_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \text{Det } C}} e^{-\frac{1}{2} [\beta_{11} y_1^2 + \beta_{22} y_2^2 + \beta_{33} y_3^2 + 2\beta_{12} y_1 y_2 + 2\beta_{13} y_1 y_3 + 2\beta_{23} y_2 y_3]} \quad (IV-53)$$

où la matrice $B = \|\beta_{ij}\|$ est l'inverse de $C = \|c_{ij}\|$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 1 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad (IV-54)$$

En divisant $W_3(y_1, t_1, y_2, t_2, y_3, t_3)$ par $W_2(y_1, t_1, y_2, t_2)$, on obtiendrait alors, compte tenu de (IV-6), la p.d.f. conditionnelle $P_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3)$.

④ Processus à la fois markoffiens et gaussiens. Théorème de Doob.

- Si l'on veut que le processus soit markoffien, il faut, d'après (IV-12), que $P_2(y_1, t_1, y_2, t_2 | y_3, t_3)$ ne dépende pas de y_1 .

- En comparant (IV-53) et (IV-49), on voit qu'il n'y a pas de terme en $y_1 y_3$ dans W_2 . Les termes en $y_1 y_3$ de W_3 ne peuvent donc disparaître lors de la division de W_3 par W_2 (qui donne P_2). Comme y_1 ne doit pas apparaître dans P_2 , le coefficient de $y_1 y_3$ dans W_3 doit être nul

$$\beta_{13} = 0 \quad (IV-55)$$

Par contre, les 2 expressions (IV-53) et (IV-49) contiennent toutes deux des termes en y_1^2 et $y_1 y_2$. Ces termes disparaîtront lors de la division de W_3 par W_2 si

$$b_{11} = \beta_{11} \quad b_{12} = \beta_{12} \quad (IV-56)$$

- D'après (IV-54), β_{13} est proportionnel au mineur de c_{13} dans C . Donc la condition (IV-55) entraîne

$$c_{32} c_{21} - c_{31} = 0 \quad (IV-57)$$

- Calculons alors le déterminant de la matrice C donnée en (IV-54) :

$$\text{Det } C = 1 + 2c_{12} c_{23} c_{31} - c_{12}^2 - c_{13}^2 - c_{23}^2 \quad (IV-58)$$

Si l'on utilise la relation (IV-57), on peut alors transformer cette expression. En effet, comme $2c_{12} c_{23} c_{31} = 2c_{12}^2 c_{23}^2$ et que $c_{13}^2 = c_{12}^2 c_{23}^2$, il vient

$$\text{Det } C = (1 - c_{12}^2)(1 - c_{23}^2) \quad (IV-59)$$

En inversant C , on obtient alors, compte tenu de (IV-59)

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 - c_{12}^2} \quad \beta_{12} = \frac{-c_{12}}{1 - c_{12}^2} \quad (IV-60)$$

Ces expressions de β_{11} et β_{12} coïncident avec celles de b_{11} et b_{12} obtenues en inversant la matrice C donnée en (IV-50)

- Finalement, il ressort de ce qui précède que, si la relation (IV-57) est satisfaite, alors les conditions (IV-55) sont remplies. Or, d'après (IV-48), la relation (IV-57) s'écrit

$$g(t_3 - t_2) g(t_2 - t_1) = g(t_3 - t_1) \quad (IV-61)$$

Il s'agit là d'une équation fonctionnelle dont la solution est une exponentielle $g(t) = e^{-\gamma t}$ (rappelons que $g(0) = 1$)

En conclusion, pour qu'un processus gaussien soit de plus markoffien, il faut que la fonction de corrélation soit une exponentielle, et donc que la densité spectrale soit une lorentzienne (théorème de Doob)

- Nous avons considéré jusqu'ici un processus aléatoire à 1 dimension, défini par une seule fonction aléatoire $y(t)$. On peut envisager des situations plus compliquées de processus aléatoire à n dimensions. Par exemple, pour $n=2$, on a 2 fonctions aléatoires $y(t)$ et $z(t)$, et au lieu d'une fonction de corrélation une "matrice de corrélation"

$$R(T) = \begin{pmatrix} \overline{y(t)y(t+T)} & \overline{y(t)z(t+T)} \\ \overline{z(t)y(t+T)} & \overline{z(t)z(t+T)} \end{pmatrix} \quad (IV-62)$$

On a alors $R(T) = \tilde{R}(-T)$ (ou $\tilde{A}$ est la transposée de A). Le théorème de Doob se généralise aisément. Pour qu'un processus gaussien à n dimensions soit de plus markoffien, il faut que la matrice de corrélation $R(T)$ soit de la forme e^{QT} où Q est une matrice $n \times n$ généralement non symétrique (on a supposé $R(0) = I$). Comme les valeurs propres de Q sont en général complexes, les densités spectrales, obtenues en prenant la TF des éléments de (IV-62) ont une forme plus compliquée que celle d'une simple lorentzienne.

⑤ Application au modèle de Langevin du mouvement Brownien.

- Revenons à l'équation de Langevin (II-2), en supposant maintenant (hypothèse 3) que $F(t)$ est une fonction aléatoire gaussienne.
- D'après la relation (III-21) entre les coeff^s de Fourier $C_v(\omega)$ et $C_F(\omega)$ de $v(t)$ et $F(t)$

$$C_v(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\gamma + i\omega} C_F(\omega) \quad (IV-63)$$

Comme $(\gamma + i\omega)^{-1}$ est une fonction certaine de ω , $C_v(\omega)$ a les mêmes propriétés statistiques que $C_F(\omega)$. $C_v(\omega)$ est donc, comme $C_F(\omega)$, une variable aléatoire gaussienne. Donc $v(t)$ est, comme $F(t)$, une fonction aléatoire gaussienne, entièrement caractérisée par la fonction de corrélation $\overline{v(t)v(t')}$.

- Revenons à l'égalité (III-22) entre densités spectrales $J_v(\omega)$ et $J_F(\omega)$

$$J_v(\omega) = \frac{1}{m^2} \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} J_F(\omega) \quad (IV-64)$$

Si l'on veut que le processus aléatoire $v(t)$ soit de plus Markoffien, il faut, d'après le théorème de Doob, que $J_v(\omega)$ soit une lorentzienne, donc, d'après (IV-64), que $J_F(\omega)$ soit indépendant de ω , c-à-d que la fonction de corrélation de $F(t)$ [T.F. de $J_F(\omega)$] soit en $\delta(t)$.

Ce résultat se comprend bien physiquement: l'évolution de v est régie par une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre en t , avec $F(t)$ comme terme source. Si $F(t)$ n'a aucune mémoire du passé de t , l'évolution de $v(t)$ à partir de t ne peut dépendre que de $v(t)$ et non du passé de t .

- Si $v(t)$ est markoffien, on peut, comme $v(t)$ diffuse lentement, ^(IV-10) écrire une équation de Fokker-Planck.

Si l'on part de la valeur certaine v à l'instant t , on a d'après (II-15)

$$v(t+\Delta t) = v e^{-\gamma \Delta t} + \frac{1}{m} \int_t^{t+\Delta t} dt' F(t') e^{-\gamma(t-t')} \quad (IV-65)$$

On en déduit que le moment $M_1(v)$, défini en (IV-33), vaut

$$M_1(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -\gamma v \quad (IV-66)$$

Un calcul, identique à celui de (II-19), donne le moment $M_2(v)$

$$M_2(v) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v(t+\Delta t) - v(t))^2}{\Delta t} = D$$

Enfin, les hypothèses 2' et 3 sur F permettent de montrer que tous les moments suivants sont nuls. Par exemple $\Delta t M_4$ est proportionnel à $\int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 F(t_1) F(t_2) F(t_3) F(t_4)$, c-à-d, d'après (IV-45) et (II-5) à $(\Delta t)^4$. Donc $M_4 v \Delta t$ et tend vers 0 à la limite $\Delta t \rightarrow 0$. On en déduit que la fonction de distribution $P(v, t)$ satisfait à la vraie équation de F-P.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial v} [v P(v, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial v^2} P(v, t) \quad (IV-67)$$

Remarque: Mouvement Brownien d'une particule soumise ^(de plus) à une force de rappel $-m\omega_0^2 x$. L'équation de Langevin devient alors pour x (position de la particule):

$$m \left[\frac{d^2}{dt^2} x + \gamma \frac{d}{dt} x + \omega_0^2 x \right] = F(t) \quad (IV-68)$$

Soient $C_x(\omega)$, $J_x(\omega)$ et $C_F(\omega)$, $J_F(\omega)$ les coefficients de Fourier et densités spectrales de $x(t)$ et $F(t)$. De (IV-68), on déduit:

$$C_x(\omega) = \frac{1}{m} \frac{C_F(\omega)}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \quad J_x(\omega) = \frac{1}{m^2} \frac{J_F(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (IV-69)$$

Si $F(t)$ est gaussienne, il en est donc de même de $x(t)$ [et de $v(t) = dx(t)/dt$]. Par contre, même si la fonction de corrélation de $F(t)$ est en $\delta(t)$, $J_x(\omega)$ n'est pas lorentzienne. Donc $x(t)$ n'est pas markoffienne. On vérifie de même que $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ n'a pas une densité spectrale lorentzienne et donc que $v(t)$ n'est pas markoffienne.

Par contre, si l'on considère le processus aléatoire à 2 dimensions $\{x(t), v(t)\}$, il est décrit par les équations:

$$\frac{d}{dt} v(t) + \gamma v(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \quad \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad (IV-70)$$

Comme il s'agit d'équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre et que $F(t)$ a une mémoire nulle, le processus $\{x(t), v(t)\}$ est markoffien (on peut aussi utiliser le théorème de Doob généralisé).

D'où l'idée importante: dans un problème physique, certaines grandeurs peuvent ne pas être markoffiennes, mais faire partie d'un ensemble plus grand qui soit lui markoffien. Le problème est bien sûr de trouver les grandeurs physiques de cet ensemble et de les trouver toutes. [dans l'exemple étudié ici la probabilité conditionnelle $P(x_1, v_1 | x_2, v_2, t)$ satisfait à l'équation de Smoluchowski, et par suite à une équation de Fokker-Planck, alors que ce n'est pas le cas pour $P(x_1 | x_2, t) = \iint dv_1 dv_2 P(x_1, v_1 | x_2, v_2, t)$ ou pour $P(v_1 | v_2, t)$]

Bibliographie

- N. Wax - Selected papers on Noise and Stochastic Processes (Dover)
M.C. Chang, G.E. Uhlenbeck - Rev. Mod. Phys. (1945), 17 323
F. Reif - Statistical and Thermal Physics (McGraw-Hill) section 15
D.K.C. MacDonald - Noise and fluctuations An Introduction (John Wiley)
C. De Dominicis - Cours donné au D.E.A. de Physique Atomique et Statistique
B. Picinbono - " " " " " "