

Modèle de Langevin pour le mouvement Brownien (suite)

C - Analyse harmonique

But de ce § : Montrer tout l'intérêt qu'il y a à passer de l'espace des temps à l'espace des fréquences lorsqu'on étudie des processus aléatoires. En profiter pour compléter la discussion physique du § B (on se limite toujours aux 2 hypothèses minimales 1 et 2' sur la force de Langevin).

① Introduction

Soit $y(t)$ une fonction aléatoire [comme la force de Langevin $F(t)$ ou la vitesse $v(t)$ qui en résulte]. L'analyse harmonique consiste à étudier les propriétés des coefficients de Fourier de $y(t)$, qui, comme $y(t)$, sont aléatoires.

Définition des coefficients de Fourier

Pour éviter les difficultés liées au fait que $|y(t)|$ ne tend pas vers 0 quand $|t| \rightarrow \infty$, on considère la fonction $y(t)$ sur un grand intervalle $[-\Theta, +\Theta]$ de l'axe des t , puis

(i) Soit on répète périodiquement la fonction ainsi obtenue en dehors de cet intervalle, ce qui revient à introduire une série de Fourier :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t} \quad \omega_k = \frac{2\pi}{2\Theta} k \quad (k: \text{entier} \geq 0) \quad (\text{III-1})$$

avec

$$c_k = \frac{1}{2\Theta} \int_{-\Theta}^{+\Theta} y(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (\text{III-2})$$

(ii) Soit on remplace $y(t)$ par 0 en dehors de $[-\Theta, +\Theta]$, ce qui permet d'introduire la transformée de Fourier $C(\omega)$ de la fonction ainsi "tronquée" $y_\Theta(t)$:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y_\Theta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{+\Theta} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{III-3})$$

$$y_\Theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{III-4})$$

On passe à la limite $\Theta \rightarrow \infty$ à la fin des calculs. Dans l'intervalle $[-\Theta, +\Theta]$, les 2 fonctions définies par (III-1, 2) et (III-3, 4) coïncident bien sur. En comparant (III-2) et (III-3), on déduit aisément la relation

$$c_k = \frac{\pi}{\Theta} C(\omega_k) \quad (\text{III-5})$$

Avantages de l'analyse harmonique

(i) Nous montrons au § 2 que les coefficients de Fourier c_k correspondant à 2 fréquences différentes sont non-correlés (alors que les valeurs de y à 2 instants différents t et t' le sont en général). Cette simplification importante résulte de la stationnarité de $y(t)$.

(ii) Nous verrons au § 3 que la T.F. de la fonction de corrélation de $y(t)$ est simplement proportionnelle à $|C(\omega)|^2$, ce qui fournit une méthode de calcul des fonctions de corrélation, souvent plus simple que les autres : calculer d'abord $|C(\omega)|^2$ puis prendre la T.F. de cette fonction (comparer par exemple les calculs du § C-3-b et ceux du § B-5).

Le même avantage réapparaîtra pour les fonctions de corrélation croisées. Dans l'espace des t , elles satisfont à une équation intégrodifférentielle qui se transforme dans l'espace des ω en équation algébrique, beaucoup plus agréable à manier.

(iii) Un grand nombre de transformations physiques que l'on peut faire subir à un signal (certain ou aléatoire) entrent dans la catégorie des filtrages linéaires qui seront définis au § C5.

La relation entrée - sortie du filtre est beaucoup plus simple à écrire dans l'espace des fréquences, ce qui permet de bien comprendre la modification de la fonction de corrélation et du spectre de bruit d'un signal aléatoire après traversée d'un filtre.

② Conséquences de la stationnarité

Dans ce §, on utilise le développement en série de Fourier (III-1). On étend la définition des fonctions de corrélation à des fonctions aléatoires complexes $y(t)$

$$g(\tau) = y(t) y^*(t+\tau) \quad (\text{III-6})$$

(définition qui coïncide avec les précédentes pour $y(t)$ réel).

(i) Stationnarité du 1^{er} ordre (les moyennes à 1 temps ne dépendent pas de t)

En écrivant que $\overline{y(t)}$ ne dépend pas de t , on obtient à partir de (III-1)

$$\overline{c_k} = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \quad (\text{III-7})$$

Si la fonction aléatoire est de plus entrée, c-à-d si $\overline{y} = 0$, on a en plus

$$\overline{c_0} = 0 \quad (\text{III-8})$$

(ii) Stationnarité du 2^{ème} ordre (les moyennes à 2 temps ne dépendent que de la différence de ces 2 temps)

En reportant (III-1) dans (III-6), on obtient :

$$y(t) y^*(t+\tau) = \sum_k \sum_{k'} \overline{c_k c_{k'}^*} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} e^{-i\omega_{k'}\tau} \quad (\text{III-9})$$

Si l'on impose à cette quantité d'être indépendante de t pour toute valeur de τ , il vient :

$$\overline{c_k c_{k'}^*} = |c_k|^2 \delta_{kk'} \quad (\text{III-10})$$

Ce résultat se comprend bien physiquement : s'il y avait une corrélation entre 2 composantes de Fourier de fréquences différentes, la fréquence de battement correspondante apparaîtrait dans la dépendance en t de la fonction de corrélation.

Remarque . Si $y(t)$ est réel, on a

$$c_k = c_{-k}^* \quad (\text{III-11})$$

Si l'on pose $c_k = (a_k - i b_k)/2$ (a_k et b_k réels) et si l'on suppose $c_0 = 0$, on obtient pour $y(t)$ le développement

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (\text{III-12})$$

On montre alors aisément à partir de (III-10) que

$$\begin{cases} \overline{a_k a_{k'}} = \overline{b_k b_{k'}} = a_k^2 \delta_{kk'} \\ \overline{a_k b_{k'}} = 0 \end{cases} \quad (\text{III-13})$$

③ Densité spectrale et fonction de corrélation.

a) Théorème de Wiener - Khintchine

Reportons la relation (III-10) dans (III-9). Il vient :

$$g(\tau) = \overline{y(t) y^*(t+\tau)} = \sum_k \overline{|c_k|^2} e^{-i \omega_k \tau} \quad (\text{III-14})$$

Utilisons alors la relation (III-5) entre c_k et $C(\omega_k)$. On obtient :

$$g(\tau) = \frac{\pi^2}{\Theta^2} \sum_k \overline{|C(\omega_k)|^2} e^{-i \omega_k \tau} \quad (\text{III-15})$$

Or, à la limite $\Theta \rightarrow \infty$, on peut remplacer la sommation discrète dans (III-15) par une intégrale ($\frac{\pi}{\Theta}$ étant l'intervalle entre 2 valeurs successives de ω_k , on a $\frac{\pi}{\Theta} \sum_k = \int d\omega$). Il vient donc

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega) e^{-i \omega \tau} \quad (\text{III-16})$$

où la fonction $J(\omega)$, définie par

$$J(\omega) = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\Theta} \overline{|C(\omega)|^2} = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\Theta} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{+\Theta} y(t) e^{-i \omega t} dt \right|^2 \quad (\text{III-17})$$

est une grandeur positive appelée densité spectrale (ou encore spectre de bruit) de la fonction aléatoire $y(t)$.

Le résultat précédent, appelé théorème de Wiener - Khintchine, montre que la fonction de corrélation $g(\tau)$ est la T.F. de la densité spectrale $J(\omega)$, elle-même proportionnelle à la moyenne du carré du module des coefficients de Fourier de la fonction aléatoire. La formule inverse de (III-16) s'écrit :

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(\tau) e^{i \omega \tau} \quad (\text{III-18})$$

Si $y(t)$ est réel, on a d'après (III-11) et (III-5) $C^*(\omega) = C(-\omega)$ et par suite

$$y(t) \text{ réel} \rightarrow J(\omega) = J(-\omega) \quad (\text{III-19})$$

Faisons alors $\tau = 0$ dans (III-16). Il vient :

$$g(0) = \overline{y(t)^2} = \overline{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega) = 2 \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \quad (\text{III-20})$$

L'égalité (III-20) justifie le nom de densité spectrale donnée à $J(\omega)$. Si $\overline{y^2}$ peut être considérée comme une énergie moyenne,

$g(\tau)$ est donc la T.F. d'une fonction non négative

2J(ω) donne alors la répartition spectrale de cette énergie.

III - 4

b) Application : calcul simple de la fonction d'auto-corrélation de la vitesse dans le modèle de Langevin.

Soient $C_F(\omega)$ et $C_v(\omega)$ les coefficients de Fourier relatifs aux fonctions aléatoires $F(t)$ et $v(t)$ du modèle de Langevin. Par transformation de Fourier de l'équation de Langevin (II-2), on obtient la relation suivante entre $C_F(\omega)$ et $C_v(\omega)$:

$$m(i\omega + \gamma) C_v(\omega) = C_F(\omega) \quad (\text{III-21})$$

et, par suite, d'après (III-17), la relation

$$J_v(\omega) = \frac{1}{m^2} \frac{J_F(\omega)}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (\text{III-22})$$

entre densités spectrales de $v(t)$ et $F(t)$.

On en déduit alors immédiatement que la fonction de corrélation de $v(t)$ [qui est la T.F. de $J_v(\omega)$] est le produit de convolution de la T.F. d'une Lorentzienne $(\gamma^2 + \omega^2)^{-1}$, c-à-d $e^{-\gamma|t|}$, par la T.F. de $J_F(\omega)$, c-à-d par la fonction de corrélation de $F(t)$ qui est une fonction de largeur très étroite, de l'ordre de τ_c . On prévoit ainsi très simplement l'allure de la courbe représentée page II-8 (fig 6)

On peut encore dire, d'après (III-22), que $J_v(\omega)$ est pratiquement une Lorentzienne, $\frac{1}{m^2} \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} J_F(0)$, car $J_F(\omega)$ est une fonction très large, de largeur $\sim \tau_c^{-1}$, qui ne varie pratiquement pas sur la largeur γ de la Lorentzienne. En fait, la décroissance de $J_F(\omega)$ pour $\omega \gg \tau_c^{-1}$, entraîne que les "pieds" de la Lorentzienne sont coupés par $J_F(\omega)$ au delà de τ_c^{-1} . $J_v(\omega)$ a donc l'allure d'une Lorentzienne "tronquée" (cf figure 8), ce qui permet par T.F. de comprendre l'allure de la courbe de la figure 6 (superposition d'une structure étroite de largeur τ_c et d'une structure large de largeur γ^{-1})

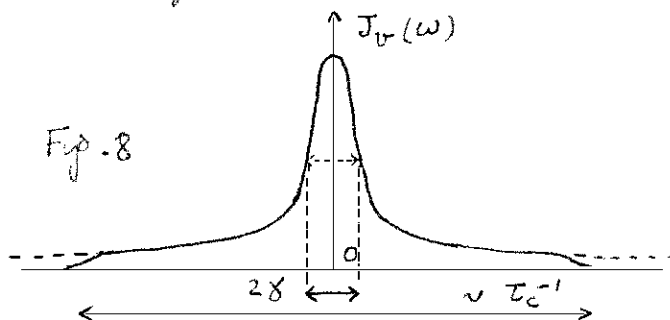


Fig. 8

L'amplitude relative de la structure étroite de la figure 6 par rapport à celle de la structure large est égale à la différence entre l'aire de la Lorentzienne exacte de la fig 8 (courbe en traits tiretés) et celle de la Lorentzienne tronquée, rapportée à celle de la Lorentzienne exacte. On retrouve ainsi simplement le rapport $\tau_c/\tau_R = \gamma\tau_c$.

④ Relations fluctuation-dissipation dans l'espace des fréquences : Théorème de Nyquist.

- Repartons de la relation (II-25) entre le coefficient de friction γ et la fonction de corrélation de $F(t)$

On en déduit immédiatement, en remplaçant $\int_0^\infty F(t)F(t+\tau) dt$

par $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(t) F(t+\tau)} d\tau$ [l'intégrant est une fonction pair de τ],
et en faisant apparaître la densité spectrale $J_F(\omega)$ de $F(t)$
[cf équation III-18]

$$\gamma = \frac{1}{2mkT} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(t) F(t+\tau)} d\tau = \frac{\pi}{mkT} J_F(0) \quad (\text{III-23})$$

La relation fluctuation-dissipation apparaît ainsi comme une relation entre la constante de friction et la densité spectrale de la force de Langevin.

Analogie électrique

Dans un circuit électrique, par exemple une self L , le courant I manifeste des fluctuations dues aux interactions des électrons de conduction avec les nombreux autres degrés de liberté du système. Ces fluctuations de courant peuvent être considérées comme étant dues à une tension fluctuante aux bornes du circuit. Comme dans l'analyse du mouvement Brownien, on peut séparer dans cette tension, une partie systématique, $-RI$, représentant la dissipation due à la résistance R du circuit, et une partie purement fluctuante $V(t)$. L'équation du circuit s'écrit alors :

$$L \frac{dI}{dt} = -RI + V(t) \quad (\text{II-24})$$

et est très analogue à l'équation de Langevin (II-2) moyennant la correspondance :

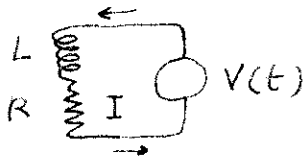


Fig 9

$$\begin{aligned} I &\rightarrow v \\ L &\rightarrow m \\ R &\rightarrow m\gamma \\ V &\rightarrow F \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

Par ailleurs, la mécanique statistique classique permet de montrer que l'énergie moyenne emmagasinée dans la self est à l'équilibre thermodynamique, égale à $\frac{1}{2} kT$, ce qui est bien l'équivalent de $\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} kT$.

On peut donc généraliser au circuit électrique de la figure 9, la relation (III-23) qui devient compte tenu de (III-25)

$$J_V(0) = \frac{1}{\pi} kT R \quad (\text{III-26})$$

Si l'on utilise le fait que $V(t)$ étant réel, $J_V(\omega) = J_V(-\omega)$ et que l'on pose $J_V^+(\omega) = 2J_V(\omega)$, $J_V^+(\omega)$ étant défini seulement entre 0 et $+\infty$, on a

$$J_V^+(0) = \frac{2}{\pi} kT R \quad (\text{III-27})$$

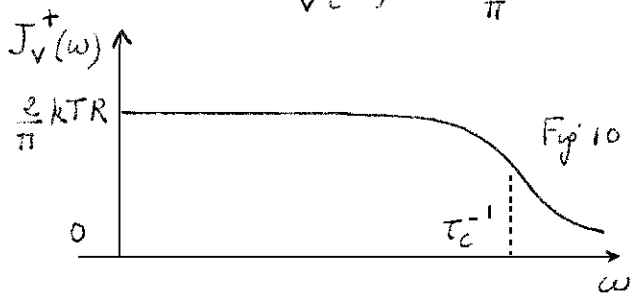


Fig 10

La relation (III-27) (théorème de Nyquist) donne, une fois T connue, ainsi que la résistance R , la valeur à la fréquence nulle du spectre de bruit du voltage aux bornes de R, L . En fait, ω_c étant très court $J_V^+(\omega)$ est une fonction très plate, ne commençant à décroître de la valeur $\frac{2}{\pi} kT R$ qu'à partir de $\omega \gtrsim \omega_c^{-1}$ [Fig. 10]

⑤ Filtrage linéaire

a) Relation entrée - sortie dans l'espace des temps - Réponse impulsionnelleDéfinitions d'un filtre linéaire

Un filtre linéaire fait correspondre à tout signal d'entrée $y_e(t)$ (certain ou aléatoire) un signal de sortie $y_s(t)$ avec les propriétés suivantes :

- (i) La sortie dépend linéairement de l'entrée.
- (ii) Les propriétés du filtre ne changent pas au cours du temps.
- (iii) Causalité : la sortie (effet) ne peut précéder l'entrée (cause).

Réponse impulsionnelle $R(t)$

C'est la sortie correspondant à une entrée "impulsionnelle" $\delta(t)$

$$\delta(t) \rightarrow R(t) \quad (\text{III-28})$$

- D'après (iii)

$$R(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (\text{III-29})$$

- D'après (ii), (III-28) entrainé

$$\delta(t-\theta) \rightarrow R(t-\theta) \quad (\text{III-30})$$

Comme tout signal d'entrée $y_e(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$y_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta y_e(\theta) \delta(t-\theta) \quad (\text{III-31})$$

on en déduit d'après (III-30) et la linéarité (i)

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta y_e(\theta) R(t-\theta) = \int_{-\infty}^t d\theta y_e(\theta) R(t-\theta) \quad (\text{III-32})$$

(On a utilisé (III-29)). On voit que la sortie à un instant donné t dépend de l'entrée à tous les instants antérieurs à t .

- Si l'entrée est aléatoire, il en est de même pour la sortie. Par contre, nous supposons toujours ici $R(t)$ certain.

b) Relations entrée - sortie dans l'espace des fréquences - Gain complexe

Soient $\tilde{y}_e(\omega)$, $\tilde{y}_s(\omega)$, $G(\omega)$ les T.F. de $y_e(t)$, $y_s(t)$, $R(t)$

$$\tilde{y}_{e,s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt y_{e,s}(t) e^{i\omega t} \quad (\text{III-33})$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt R(t) e^{i\omega t} \quad (\text{III-34})$$

Comme le produit de convolution se transforme par T.F. en produit ordinaire, on obtient à partir de (III-32) la relation beaucoup plus simple :

$$\tilde{y}_s(\omega) = G(\omega) \tilde{y}_e(\omega) \quad (\text{III-35})$$

$G(\omega)$ s'appelle le gain complexe. C'est le facteur par lequel est modifiée une exponentielle $e^{i\omega t}$ de fréquence ω lors de la traversée du filtre. On peut dire encore que les exponentielles $e^{i\omega t}$ sont les fonctions propres du filtre, de valeurs propres $G(\omega)$.

c) Puissance spectrale et fonctions de corrélation d'un signal filtré

De (III-35), on déduit aisément compte tenu de la définitions (III-17) de la densité spectrale :

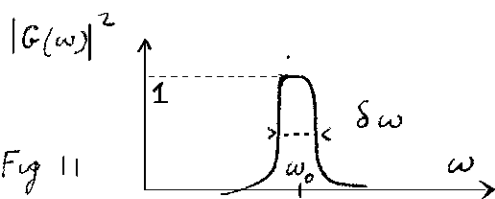
$$J_s(\omega) = |G(\omega)|^2 J_e(\omega) \quad (\text{III-36})$$

La densité spectrale du signal de sortie s'obtient en multipliant la densité spectrale du signal d'entrée par le carré du module du gain complexe.

Comme la fonction de corrélation est la T.F. de la densité spectrale, on déduit de (III-36) que la fonction de corrélation du signal de sortie est le produit de convolution de la fonction de corrélation du signal d'entrée par la T.F. du carré du module du gain complexe.

La formule (III-36) est fondamentale pour comprendre les modifications d'un signal aléatoire à la traversée d'un filtre.

Supposons par exemple que le filtre laisse passer sans modifications les fréquences contenues dans un intervalle $\Delta\omega$ autour de ω_0 et coupe toutes les autres fréquences (filtre sélectif représenté sur la fig 11)



$J_s(\omega)$ s'obtient alors à partir de $J_e(\omega)$ en ne conservant que la partie contenue dans l'intervalle $\Delta\omega$ autour de ω_0 . C'est un bel résultat qui permet de justifier de manière précise le nom de densité spectrale donné à $J(\omega)$.

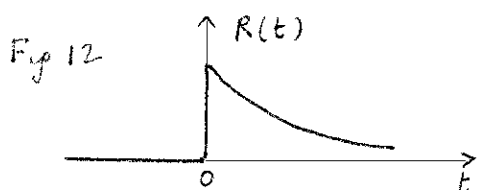
Comme l'importance du bruit associé à une fonction aléatoire centrée $y(t)$ est caractérisé par $\overline{y^2}$, et est donné d'après (III-20) par l'intégrale de $J(\omega)$, on voit sur (III-36) que le bruit peut être considérablement réduit à la traversée d'un filtre si la largeur de la fonction $|G(\omega)|^2$ est beaucoup plus faible que celle de la courbe $J_e(\omega)$. Par exemple, le mouvement Brownien observé à l'œil semble beaucoup moins erratique qu'il ne l'est en réalité (l'œil coupe en effet toutes les fréquences supérieures à quelques dizaines de hertz).

d) Possibilité d'améliorer l'équation de Langevin.

Si, dans la discussion du § B2, on reporte l'instant initial à $-\infty$, on voit que la vitesse $v(t)$ est reliée à la force $F(t)$ par la relation :

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t dt' F(t') e^{-\gamma(t-t')} \quad (\text{III-37})$$

En comparant (III-37) à (III-32), on voit que la correspondance $F(t) \rightarrow v(t)$ peut être considérée comme un filtrage linéaire de réponse impulsionnelle $\frac{1}{m} e^{-\gamma t} \theta(t)$ et de gain complexe $\frac{1}{2\pi m} \frac{1}{\gamma - i\omega}$.



En fait, une telle réponse impulsionnelle, représentée sur la figure 12, est peu physique, dans la mesure où elle a un temps de montée infiniment court. Or, la friction ne peut s'établir instantanément. Elle nécessite un temps au moins égal au temps de collision. Il faudrait donc "arrondir" la montée de la courbe de la figure 10, ou, ce qui revient au même, remplacer la constante γ dans le gain complexe par une fonction $\gamma(\omega)$, égale à γ pour $\omega = 0$, et décroissant très lentement pour $\omega \gg \tau_c^{-1}$.

On se convainc ^{remplace} alors aisément que l'équation de Langevin est avantagusement par une équation intégrodifférentielle du type :

$$m \frac{dv}{dt} = -m \int_{-\infty}^t \gamma(t-t') v(t') dt' + F(t) \quad (\text{III-38})$$

où $\gamma(t)$ est une fonction du temps, de l'ordre de l'ordre de τ_c , et d'intégrale égale à γ .

Notons en passant qu'il semble beaucoup plus cohérent, si l'on veut tenir compte du temps de corrélation non nul de $F(t)$, de tenir compte aussi du caractère retardé de la friction. Nous reviendrons plus loin sur ce point important.

c) Quelques autres propriétés importantes du filtrage linéaire

Nous nous contenterons ici de les énoncer sans démonstration.

- (i) Le fait que $R(t) = 0$ pour $t < 0$ (causalité) entraîne des relations importantes entre les parties réelles et imaginaires du gain complexe $G(\omega)$

$$G(\omega) = G'(\omega) + i G''(\omega) \quad (\text{III-39})$$

$$\begin{cases} G'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{G''(\omega')}{\omega' - \omega} \\ G''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{G'(\omega')}{\omega' - \omega} \end{cases} \quad (\text{III-40})$$

$\mathcal{P}$ désigne partie principale. G' et G'' sont dites transformées de Hilbert l'une de l'autre.

- (ii) Un signal aléatoire passant à travers un filtre linéaire très sélectif (de bande passante très étroite devant les inverses des temps de corrélation du signal) tend à devenir gaussien