

TABLE DES MATIÈRES

REINTERPRETATION "QUANTIQUE" DES EQUATIONS DE MAXWELL

But de ce §	I-1
A - Transformées de Fourier des champs \vec{E} et \vec{B}	I-1
B - Developpement en ondes planes progressives.....	I-1
C - Energie du champ électromagnétique H_R	I-3
D - Impulsion du champ électromagnétique \vec{P}	I-3
E - Moment cinétique du champ électromagnétique.....	II-1
But de ce §	II-1
Quelques formules utiles	II-1
(1) Rappels de mécanique quantique.....	II-1
i) Spin 1	II-1
ii) Analogie entre les 3 états $[a\rangle]$ d'un spin 1 et les 3 vecteurs unitaires d'un trièdre trirectangle	II-2
iii) Fonction d'onde d'une particule de spin 1	II-2
(2) Calcul de $\vec{J} = \epsilon_0 \int d^3 r \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$	II-3
i) Calcul préliminaire en fonction de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ et $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$	II-3
ii) Calcul en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$	II-4
(3) \vec{L} et \vec{S} ne sont pas physiques alors que \vec{J} l'est	II-4
F - Fonctions d'onde correspondant à un photon de moment cinétique et de parité définis.....	III-1
But de ce §	III-1
(1) Moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ d'une particule de spin 1	III-1
i) Valeurs propres de \vec{J}^2 et J_z	III-1
ii) Vecteurs propres communs à $\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_z$	III-1
iii) Valeur des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle \ell 1 m \mu JM \rangle$	III-1
(2) Fonctions propres communes à $\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_z$: Harmoniques sphériques vectorielles.....	III-1
i) Fonction d'onde associée à $ \ell m\rangle$ dans l'espace des \vec{k}	III-1
ii) Composantes de $ \mu\rangle$ dans la base $[a\rangle]$ introduite au § 5a.....	III-1
iii) Harmoniques sphériques vectorielles.....	III-2
iv) Relation d'orthonormalisation	III-2
v) Parité.....	III-2
vi) Fonctions propres correspondant à une énergie et un moment cinétique bien définis.....	III-3

(3) Une autre méthode pour obtenir des fonctions propres du moment cinétique total...	III-3
i) Construction d'une fonction d'onde vectorielle à partir d'une fonction d'onde scalaire et d'un opérateur vectoriel \vec{V} définis dans l'espace des \vec{k}	III-3
ii) Action de \vec{J} sur la fonction d'onde précédente.....	III-3
iii) Théorème.....	III-4
(4) Fonctions propres longitudinales et transversales de \vec{J}^2 et J_z	III-4
i) Premier choix de \vec{V} : opérateur multiplicateur par \vec{n}	III-4
ii) Deuxième choix de \vec{V} : opérateur \vec{L}	III-5
iii) Troisième choix de \vec{V} : opérateur gradient / \vec{k} ou plus exactement $k\vec{V}$	III-5
iv) Relations entre $\vec{N}_\ell^m, \vec{X}_\ell^m, \vec{Z}_\ell^m$	III-6
(5) Conclusion	III-6

G - Ondes Multipolaires **IV-1**

But de ce §

(1) Regroupement des formules importantes	IV-1
i) Développement de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$	IV-1
ii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'impulsion $\hbar \vec{k}_0$ et de polarisation \vec{e} données	IV-1
iii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$, de moment cinétique (J, M) , de parité $(-1)^J$	IV-1
iv) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$ de moment cinétique (J, M) , de parité $(-1)^{J+1}$	IV-1
(2) Calcul de quelques intégrales	IV-2
i) Développement de $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ en harmoniques sphériques.....	IV-2
ii) Calcul de $\int d\Omega_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} Y_{J,\ell,1}^m(\vec{n})$	IV-2
(3) Structure d'une onde multipolaire électrique JM	IV-2
i) Calcul de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$	IV-2
ii) Discussion physique	IV-3
(4) Structure d'une onde multipolaire magnétique JM	IV-3
(5) Passage des ondes planes aux ondes multipolaires.....	IV-4
i) Produits scalaires et relations de fermeture	IV-4
ii) 1 ^{ère} application : distribution angulaire du rayonnement émis dans une onde multipolaire.....	IV-4
iii) 2 ^{ème} application : développement d'une onde plane polarisée en ondes multipolaires ou en harmoniques sphériques vectorielles.....	IV-5

H - Potentiels	V-1
But de ce §	V-1
(1) Définition.....	V-1
(2) Jauges	V-1
(3) Choix d'une première jauge pour décrire le rayonnement libre	V-2
(4) Changements de jauge conservant pour \vec{A} et \vec{U} une structure de développement en ondes planes progressives de vitesse c	V-2
i) Détermination de $\chi(\vec{r}, t)$	V-2
ii) Ces changements de jauge conservent la condition de Lorentz.....	V-3
(5) Potentiels correspondants à divers types de photons	V-3
i) Photon d'impulsion $\hbar \vec{k}_0$ et de polarisation \vec{e} données	V-3
ii) Photon multipolaire électrique JM , d'énergie $\hbar c k_0$	V-4
iii) Photon multipolaire magnétique JM , d'énergie $\hbar c k_0$	V-5
I - Moments Multipolaires d'une distribution de charges, de courants et de magnétisation.....	VI-1
(1) Equations de Maxwell en présence des sources.....	VI-1
i) Les sources.....	VI-1
ii) Equations de Maxwell	VI-1
iii) Régime sinusoïdal	VI-1
iv) Transformée de Fourier	VI-2
v) Parties longitudinale et transversale des termes sources	VI-2
(2) Développement des sources et des champs en états de moment cinétique et de parité bien définis	VI-2
(3) Comportement asymptotique des champs $\vec{B}(\vec{r})$ et $\vec{E}(\vec{r})$ pour r grand.....	VI-3
(4) Moments multipolaires électriques.....	VI-4
i) Première expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r}, t)$	VI-4
ii) Autre expression équivalente	VI-4
iii) Limite des grandes longueurs d'onde (grandes devant les dimensions des sources)	VI-5
(5) Moments multipolaires magnétiques.....	VI-5
i) Expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r}, t)$	VI-5
ii) Limite des grandes longueurs d'onde.....	VI-5

2^{ème} partie

DESCRIPTION LAGRANGIENNE ET HAMILTONIENNE D'UN CHAMP

Application au champ électromagnétique

I – Etude d'un système simple

But de ce §	VII-1
A - Description d'un système mécanique discret.....	VII-1
(1) Variables dynamiques.....	VII-1
(2) Energie cinétique T , potentielle V , Lagrangien L	VII-1
(3) Equations du mouvement - Vitesse d'un ébranlement de grande longueur d'onde ...	VII-1
(4) Moments conjugués – Hamiltonien.....	VII-2
(5) Relations de commutation du système quantique.....	VII-2
B - Système continu obtenu par passage à la limite	VII-2
(1) Conditions du passage à la limite	VII-2
(2) Variables dynamiques.....	VII-2
(3) Lagrangien – Densité de lagrangien	VII-3
(4) Equation du mouvement	VII-3
(5) Moments conjugués – Hamiltonien.....	VII-4
(6) Relations de commutation.....	VII-4

II – Notion de dérivée fonctionnelle

But de ce §	VII-5
A - Exemple de fonctionnelle définie sur des fonctions d'une variable.....	VII-5
(1) Définition de la fonctionnelle	VII-5
(2) Variation δS correspondant à une variation $\delta u(t)$	VII-5
(3) Définition de la dérivée fonctionnelle	VII-5
(4) Application : calcul des variations	VII-5
B - Exemple de fonctionnelle définie sur les fonctions de plusieurs variables	VII-6
(1) Définition de 2 fonctionnelles	VII-6
(2) Variation de u , δu	VII-6
(3) Calcul de δL . Dérivées fonctionnelles de L	VII-6
(4) Calcul de δS . Dérivée fonctionnelle de S	VII-6

III – Equations de Lagrange pour un champ classique

But de ce §	VIII-1
A - Lagrangien du champ – Action – Principe de moindre action	VIII-1
(1) "Coordonnées" du champ à l'instant t	VIII-1
(2) Densité de lagrangien \mathcal{L}	VIII-1

(3) Lagrangien – action.....	VIII-1
(4) Principe de moindre action.....	VIII-1
B - Application au champ électromagnétique.....	VIII-2
(1) Lagrangien du système global : charges + champ électromagnétique	VIII-2
(2) Discussion physique.....	VIII-3
(3) Equations du mouvement des champs	VIII-4
(4) Equations du mouvement des charges.....	VIII-5

IV – Equations de Hamilton-jacobi pour un champ classique

But de ce §	IX-1
C - Cas général	IX-1
(1) Moments conjugués	IX-1
(2) Densité d'hamiltonien – Hamiltonien.....	IX-1
(3) Equations de Hamilton-Jacobi	IX-1
(4) Quantification	IX-2
D - Cas du champ électromagnétique.....	IX-2
(1) Moments conjugués	IX-2
(2) Hamiltonien	IX-2
(3) Equations de Hamilton-Jacobi	IX-3

V- Lois de conservation pour un système de charges et de champs en interaction

But de ce §	X-1
E - Impulsion totale	X-1
(1) Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale des axes de coordonnées ..	X-1
(2) Cas d'un mouvement réel du système – Définition de l'impulsion totale.....	X-3
F - Moment cinétique total.....	X-4
(1) Variation de l'action lors d'une rotation du système d'axes	X-4
(2) Cas d'un mouvement réel du système – Définition du moment cinétique total	X-5
G - Energie totale.....	X-6
(1) Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale de l'axe des temps.....	X-6
(2) Cas d'un mouvement réel du système – Définition de l'énergie totale	X-7

VI – Choix d'une jauge particulière : la jauge de Coulomb

But de ce §	XI-1
-------------------	------

(3) Résultats des équations de Lagrange valables quelle que soit la jauge	XI-1
(4) Jauge de Coulomb	XI-1
(5) Pourquoi choisir la jauge de Coulomb	XI-2
(6) Elimination de U (et \vec{E}_{\parallel}) dans le Lagrangien	XI-3
(7) Elimination de U (et \vec{E}_{\parallel}) dans le Hamiltonien	XI-4
(8) Elimination de U (et \vec{E}_{\parallel}) dans l'impulsion totale \vec{P}	XI-4
(9) Elimination de U (et \vec{E}_{\parallel}) dans le moment cinétique total \vec{J}	XI-5

VII - Quantification

But de ce §	XII-1
H - Relations de commutation canoniques ne tenant pas compte de la transversalité des champs et potentiels en jauge de Coulomb	XII-1
I - Relations de commutation correctes tenant compte de la transversalité	XII-1
J - Opérateurs de création et d'annihilation	XII-3
(1) Définition.....	XII-3
(2) Relations de commutation.....	XII-3
(3) Développement des opérateurs \vec{A} , \vec{E}_{\perp} , \vec{B} en ondes planes	XII-4
(4) Lien avec la 2 ^{ème} quantification	XII-4
(5) Développement en ondes multipolaires	XII-5
(6) Grandeurs physiques	XII-6