19/2/74

III - Equations de Lagrange pour un champ classique

But de ce §

Etablir les équations du mouvement d'un champ qui obéit à un principe variationnel (principe de moindre action).

Montrer que les équations couplées d'un système de charges interagissant avec un champ électromagnétique (équations de Maxwell en présence des charges + équations du mouvement des charges en présence des champs) peuvent être toutes déduites d'un principe de moindre action.

Intermédiaire important pour la formulation hamiltonienne et la quantification

A - Lagrangien du champ - Action - Principe de moindre action.

① "Coordonnées" du champ à l'instant t.

- $u(\vec{r},t)$ valeurs prises par le champ en tout point $\vec{r}$ à l'instant t.
- Le champ peut avoir plusieurs composantes en chaque point $\vec{r}$ (champ vectoriel, tensoriel ...) : $u_i(\vec{r},t)$
- Vitesse du champ à l'instant t : $\dot{u}_i(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{r},t)$ (VIII-1)
- Mouvement du champ : connu lorsqu'on a déterminé la dépendance temporelle de chaque coordonnée, c-à-d lorsqu'on connaît les fonctions $u_i(\vec{r},t)$ pour tout $\vec{r}$ et tout i. On s'intéresse ici aux champs dont le mouvement peut être obtenu à partir d'un principe variationnel. Plus précisément, on va montrer comment on peut déduire de ce principe les équations aux dérivées partielles satisfaites par $u_i(\vec{r},t)$

② Densité de Lagrangien $\mathcal{L}$. (généralisation des résultats du § I)

$\mathcal{L}$: fonction de u_i, $\dot{u}_i$, $\vec{\nabla} u_i$.
(Peut dépendre explicitement du temps et des dérivées spatiales d'ordre supérieur de u_i).

$$\mathcal{L}(u_i, \dot{u}_i, \vec{\nabla} u_i) \qquad \text{(VIII-2)}$$

③ Lagrangien - Action.

- Lagrangien L
$$L = \int d^3r\, \mathcal{L}\left(u_i(\vec{r},t), \dot{u}_i(\vec{r},t), \vec{\nabla} u_i(\vec{r},t)\right) \qquad \text{(VIII-3)}$$

A chaque instant t, L est une fonctionnelle de $u_i(\vec{r},t)$ et $\dot{u}_i(\vec{r},t)$.
En effet, à tout jeu de coordonnées $u_i(\vec{r},t)$ et de vitesses $\dot{u}_i(\vec{r},t)$ on associe grâce à (VIII-3) un nombre.

- Action S
$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \mathcal{L}\left(u_i(\vec{r},t), \dot{u}_i(\vec{r},t), \vec{\nabla} u_i(\vec{r},t)\right) \qquad \text{(VIII-4)}$$

S est une fonctionnelle de $u_i(\vec{r},t)$. En effet, à tout mouvement du champ entre les instants t_1 et t_2, défini par les fonctions $u_i(\vec{r},t)$, on associe grâce à (VIII-4) un nombre.

④ Principe de moindre action

- On suppose que le champ satisfait à un tel principe :
on se donne les valeurs des champs aux instants t_1 et t_2.
$$u_i(\vec{r},t_1) \text{ et } u_i(\vec{r},t_2) \text{ donnés} \qquad \text{(VIII-5)}$$
Parmi tous les mouvements possibles du champ satisfaisant à ces conditions aux limites, celui qui est effectivement suivi par le système est celui qui rend l'action S extrêmale.

– Les fonctions $u_i(\vec{r},t)$ correspondant au mouvement effectivement suivi par le champ sont donc telles que, quelles que soient les variations $\delta u_i(\vec{r},t)$ infinitésimales qu'on leur fait subir, S ne varie pas.

$$\frac{\delta S}{\delta u_i} = 0 \qquad \forall\ \vec{r}, t, i \tag{VIII-6}$$

est une condition évidemment suffisante pour qu'il en soit ainsi puisque, d'après VII-61 et VII-62, δS est alors nul, quelles que soient les δu_i. C'est aussi une condition nécessaire : il suffit d'envisager un δu nul partout sauf dans le volume d^3r autour de $\vec{r}$, dans l'intervalle dt autour de dt et pour la seule composante i. On a alors

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta u_i}\ \delta u_i(\vec{r},t)\ d^3r\ dt \tag{VIII-7}$$

et la condition $\delta S = 0$ entraîne $\dfrac{\delta S}{\delta u_i(\vec{r},t)} = 0$.

– D'après VII-62, les équations du mouvement du champ (équations de Lagrange) s'écrivent donc :

$$\frac{\delta S}{\delta u_i} = \frac{\delta L}{\delta u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = 0 \tag{VIII-8}$$

– Remarque : La formulation de la théorie peut être aisément rendue relativiste si $\mathcal{L}$ est un scalaire d'espace temps. L'action S est alors un invariant relativiste, intégrale de $\mathcal{L}$ dans un volume d'espace temps (les valeurs des champs étant fixées sur la surface qui limite ce volume).

B – Application au champ électromagnétique.

1 Lagrangien du système global : charges + champ électromagnétique

– Champ électromagnétique

Potentiels $\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) \\ U(\vec{r},t)\end{cases}$ champs $\begin{cases} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} U \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{cases}$ (VIII-9)

Les coordonnées du champ sont $\{\vec{A}(\vec{r},t), U(\vec{r},t)\}$ les vitesses $\{\dot{\vec{A}}(\vec{r},t), \dot{U}(\vec{r},t)\}$.

– Particules

Particule α : charge e_α, masse m_α, position $\vec{q}_\alpha(t)$, vitesse $\dot{\vec{q}}_\alpha(t)$.

– Densité de charge et de courant associées aux particules

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha\ \delta\left(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)\right) & \text{(VIII-10)} \\ \vec{J}(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha\ \dot{\vec{q}}_\alpha(t)\ \delta\left(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)\right) & \text{(VIII-11)}\end{cases}$$

On vérifie aisément à partir des définitions (VIII-10) et (VIII-11) que :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{VIII-12}$$

Equation de conservation de l'électricité.

– Nous allons montrer que toutes les équations relatives aux champs et aux charges peuvent être déduites du Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2} + \sum_\alpha\left[e_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) - e_\alpha U(\vec{q}_\alpha,t)\right] + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\vec{E}(\vec{r},t)^2 - c^2\vec{B}(\vec{r},t)^2\right] \tag{VIII-13}$$

(Dans le 3° terme, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent être exprimés en fonction de $\vec{A}$ et U).

- Autre forme équivalente du 2ème terme de (VIII-13). En utilisant (VIII-10) et (VIII-11), on peut écrire ce terme sous la forme

$$\int d^3r \left[\vec{J}(\vec{r},t) \cdot \vec{A}(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t)\, U(\vec{r},t) \right] \qquad \text{(VIII-14)}$$

② Discussion physique.

- Le 3ème terme de (VIII-13) subsiste seul en l'absence de particules : c'est le lagrangien du champ libre. Le 1er terme représente l'énergie cinétique des particules, c-à-d le lagrangien des particules non couplées au champ. Le 2ème terme décrit les interactions entre particules et champ.

- La densité de lagrangien correspondant au 3ème terme de (VIII-13) peut s'écrire en notations relativistes :

$$-\frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{(VIII-15)}$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur champ électromagnétique. Elle est visiblement scalaire (contraction de 2 tenseurs) et invariante de jauge (elle s'exprime directement en fonction des champs).

- Le lagrangien (VIII-13) n'est valable que pour des particules de vitesse faible devant c. Il faudrait, dans le cas contraire, remplacer le 1er terme de (VIII-13) par

$$-\sum_\alpha m_\alpha c^2 \sqrt{1-(\dot{\vec{q}}_\alpha)^2/c^2} \qquad \text{(VIII-16)}$$

- La densité de lagrangien correspondant à (VIII-14) peut s'écrire en notations relativistes

$$J^\mu A_\mu \qquad \text{(VIII-17)}$$

- Invariance de jauge

• Changeons de jauge (voir chapitre 8, 1ère partie)

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ U' = U - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{(VIII-18)}$$

• Le 1er terme de VIII-13 ne change pas (il ne dépend que de $\dot{\vec{q}}_\alpha$), de même que le 3ème (il fait intervenir directement les champs qui demeurent inchangés dans la transformation VIII-18). Le seul changement peut donc venir du 2ème terme : (VIII-14).

• Calculons la variation de l'action $S'-S$ lorsqu'on passe de la jauge $\{\vec{A}, U\}$ à la jauge $\{\vec{A}', U'\}$. D'après (VIII-14) et (VIII-18), on a :

$$S'-S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\vec{J}\cdot\vec{\nabla}\chi - \rho \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \qquad \text{(VIII-19)}$$

Intégrons par parties. Il vient :

$$S'-S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \vec{\nabla}(\chi\vec{J}) + \int d^3r \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t}(\rho\chi) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left(\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\chi \qquad \text{(VIII-20)}$$

Le dernier terme s'annule grâce à (VIII-12). Le premier terme après transformation de l'intégrale de volume en intégrale de surface fait intervenir les valeurs des courants pour $|\vec{r}| = \infty$ et s'annule donc. Le 2ème terme après intégration sur t ne fait intervenir que les positions des charges à $t = t_1$ et $t = t_2$. Lorsqu'on fait varier les valeurs des champs et les positions des particules entre t_1 et t_2 sans changer ces valeurs aux limites $t = t_1$ et $t = t_2$, $S' - S$ ne change donc pas. <u>S' et S ont donc les mêmes extrêma.</u> Le "chemin" de moindre action est donc indépendant de la jauge.

On voit ainsi le lien qui existe entre invariance de jauge et conservation de la charge (équation VIII-12 utilisée pour VIII-20)

③ <u>Equations du mouvement des champs</u>.

– D'après (VIII-13) et (VIII-16), on peut écrire :

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{q}_\alpha^2 + \int d^3r\, \mathcal{L} \qquad \text{(VIII-21)}$$

où

$$\mathcal{L} = \vec{J} \cdot \vec{A} - \rho U + \frac{\varepsilon_0}{2} \left[(-\vec{\nabla} U - \dot{\vec{A}})^2 - c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right] \qquad \text{(VIII-22)}$$

Pour les équations des champs, le 1er terme de (VIII-21) n'intervient pas.

– Dérivées de $\mathcal{L}$ par rapport à A_i et U. De (VIII-22), on tire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = J_i \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = -\rho \qquad \text{(VIII-23)}$$

– $\mathcal{L}$ ne dépend des dérivées spatiotemporelles de A_i et U que par l'intermédiaire des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le dernier terme de (VIII-22)

Des définitions des champs

$$E_i = -\dot{A}_i - \partial_i U \qquad B_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j A_k \qquad \text{(VIII-24)}$$

on tire

$$\frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_i} = -1 \qquad \frac{\partial E_i}{\partial(\partial_i U)} = -1 \qquad \frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = \varepsilon_{ijk} \qquad \text{(VIII-25)}$$

Par suite, on a par exemple

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_j} \frac{\partial E_j}{\partial \dot{A}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_j} \frac{\partial B_j}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_i} = -\varepsilon_0 E_i \qquad \text{(VIII-26)}$$

Des calculs analogues donnent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}} = 0 \qquad \text{(VIII-27)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j A_k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i} \frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = -\varepsilon_0 c^2 \varepsilon_{ijk} B_i \qquad \text{(VIII-28)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i U)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial(\partial_i U)} = -\varepsilon_0 E_i \qquad \text{(VIII-29)}$$

– Equation de Lagrange relative à A_k.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j A_k)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = 0 \qquad \text{(VIII-30)}$$

c-à-d

$$J_k + \varepsilon_0 c^2 \varepsilon_{ijk}\, \partial_j B_i + \varepsilon_0 \dot{E}_k = 0 \qquad \text{(VIII-31)}$$

soit encore

$$\varepsilon_{kji}\, \partial_j B_i = \frac{1}{c^2} \dot{E}_k + \mu_0 J_k \qquad \text{(VIII-32)}$$

projection sur k de l'équation :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}} \qquad \text{(VIII-33)}$$

qui est bien l'une des équations de Maxwell.

– Equation de Lagrange relative à U

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i U)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot U} = 0 \qquad \text{(VIII-34)}$$

c-à-d

$$-\rho + \varepsilon_0 \partial_i E_i = 0 \qquad \text{(VIII-35)}$$

soit encore

$$\boxed{\vec\nabla \cdot \vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(VIII-36)}$$

On retrouve bien les équations de Maxwell en présence des charges, puisque les 2 autres équations $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ et $\vec\nabla \times \vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ sont automatiquement satisfaites grace aux relations (VIII-9).

(4) Equations du mouvement des charges.

– Seuls les 2 premiers termes de VIII-13 interviennent puisque le dernier ne dépend ni de $\vec q_\alpha$ ni de $\dot{\vec q}_\alpha$.

– Etablissons tout d'abord une relation vectorielle qui nous sera utile :

$$\vec\nabla(\vec A\cdot\vec B) = (\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A + (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B + \vec B\times(\vec\nabla\times\vec A) + \vec A\times(\vec\nabla\times\vec B) \qquad \text{(VIII-37)}$$

Pour cela, partons de l'égalité

$$\partial_j A_k = \partial_k A_j + \varepsilon_{ijk}(\vec\nabla\times\vec A)_i \qquad \text{(VIII-38)}$$

qui se demontre en utilisant les 2 égalités déjà données

$$(\vec\nabla\times\vec A)_i = \varepsilon_{i\ell m}\partial_\ell A_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} \qquad \text{(VIII-39)}$$

et appliquons la à

$$\partial_i(A_j B_j) = (\partial_i A_j)B_j + A_j(\partial_i B_j) \qquad \text{(VIII-40)}$$

Il vient :

$$\partial_i(A_j B_j) = B_j\partial_j A_i + A_j\partial_j B_i + \underbrace{\varepsilon_{kij}}_{=\varepsilon_{ijk}} B_j(\vec\nabla\times\vec A)_k + \underbrace{\varepsilon_{kij}}_{=\varepsilon_{ijk}} A_j(\vec\nabla\times\vec B)_k \qquad \text{(VIII-41)}$$

On reconnait la projection sur i de l'égalité (VIII-37).

– Calcul de $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}_\alpha}$ et $\frac{\partial L}{\partial \vec q_\alpha}$. D'après (VIII-13), on a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec q}_\alpha + e_\alpha \vec A(\vec q_\alpha, t) \qquad \text{(VIII-42)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec q_\alpha} = -e_\alpha \vec\nabla U(\vec q_\alpha, t) + e_\alpha \vec\nabla\left(\dot{\vec q}_\alpha\cdot\vec A(\vec q_\alpha, t)\right) \qquad \text{(VIII-43)}$$

En appliquant (VIII-37) au dernier terme de (VIII-43) et en remarquant que $\vec q_\alpha$ et $\dot{\vec q}_\alpha$ sont independants, on obtient.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec q_\alpha} = -e_\alpha\vec\nabla U(\vec q_\alpha,t) + e_\alpha(\dot{\vec q}_\alpha\cdot\vec\nabla)\vec A(\vec q_\alpha,t) + e_\alpha\dot{\vec q}_\alpha\times(\vec\nabla\times\vec A(\vec q_\alpha,t)) \qquad \text{(VIII-44)}$$

– Equation de Lagrange relative à $\vec q_\alpha$.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}_\alpha} = 0 \qquad \text{(VIII-45)}$$

D'après (VIII-42),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}_\alpha} = m_\alpha \ddot{\vec q}_\alpha + e_\alpha\frac{\partial}{\partial t}\vec A(\vec q_\alpha,t) + e_\alpha(\dot{\vec q}_\alpha\cdot\vec\nabla)\vec A(\vec q_\alpha,t) \qquad \text{(VIII-46)}$$

En portant (VIII-44) et (VIII-46) dans (VIII-45), on obtient finalement :

$$m_\alpha\ddot{\vec q}_\alpha = e_\alpha\left[-\vec\nabla U(\vec q_\alpha,t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec A(\vec q_\alpha,t) + \dot{\vec q}_\alpha\times(\vec\nabla\times\vec A(\vec q_\alpha,t))\right]$$

$$= e_\alpha\left[\vec E(\vec q_\alpha,t) + \dot{\vec q}_\alpha\times\vec B(\vec q_\alpha,t)\right] \qquad \text{(VIII-47)}$$

On reconnait l'equation de Newton relative à la particule α soumise à la force de Lorentz de la part des champ