

# Table des matières

|          |                                                                                                                                                       |          |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction générale, concepts et outils de base : statistique quantique et interaction</b>                                                       | <b>1</b> |
| 1.1      | Le gaz parfait de bosons : rappels et mise en bouche . . . . .                                                                                        | 3        |
| 1.1.1    | Dans l'ensemble grand-canonique . . . . .                                                                                                             | 4        |
| 1.1.1.1  | Condensation par saturation des modes excités . . . . .                                                                                               | 5        |
| 1.1.1.2  | Signatures à un corps : profil de densité, fonction $g_1$ . . . . .                                                                                   | 8        |
| 1.1.1.3  | Signatures à deux corps : fonction $g_2$ , fluctuations géantes de $n_0$ , bruit de partition symétrique . . . . .                                    | 12       |
| 1.1.2    | Dans l'ensemble canonique puis microcanonique . . . . .                                                                                               | 14       |
| 1.1.2.1  | Motivation expérimentale . . . . .                                                                                                                    | 14       |
| 1.1.2.2  | Élimination du mode du condensat et approximation du condensat jamais vide . . . . .                                                                  | 15       |
| 1.1.2.3  | Fluctuations canoniques de $\hat{N}_0$ : premiers moments et distribution de probabilité . . . . .                                                    | 16       |
| 1.1.2.4  | Fluctuations microcanoniques de $\hat{N}_0$ . . . . .                                                                                                 | 20       |
| 1.2      | Quel modèle pour l'interaction . . . . .                                                                                                              | 22       |
| 1.2.1    | Le problème de la métastabilité, la solution par l'universalité et la discrétisation de l'espace . . . . .                                            | 22       |
| 1.2.2    | Ce fil conducteur qu'est la matrice $T$ . . . . .                                                                                                     | 27       |
| 1.2.3    | La notion de longueur de diffusion dans l'onde $s$ . . . . .                                                                                          | 29       |
| 1.2.3.1  | En dimension trois . . . . .                                                                                                                          | 29       |
| 1.2.3.2  | En dimensionnalité réduite . . . . .                                                                                                                  | 31       |
| 1.3      | Amplitude de diffusion, matrice $T$ et lien avec les atomes froids pour le modèle de Wigner-Bethe-Peierls d'une interaction de portée nulle . . . . . | 32       |
| 1.3.1    | En dimension trois . . . . .                                                                                                                          | 32       |
| 1.3.2    | En dimensionnalité réduite . . . . .                                                                                                                  | 37       |
| 1.3.2.1  | Cas $d = 2$ . . . . .                                                                                                                                 | 37       |
| 1.3.2.2  | Cas $d = 1$ . . . . .                                                                                                                                 | 41       |
| 1.4      | L'interaction de contact la plus simple : le modèle sur réseau . . . . .                                                                              | 43       |
| 1.4.1    | Dans l'espace réel discrétisé . . . . .                                                                                                               | 43       |
| 1.4.2    | Dans l'espace des impulsions . . . . .                                                                                                                | 45       |

|          |                                                                                                                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4.3    | Matrice $T$ , constante de couplage nue et hamiltonien . . .                                                                                              | 46        |
| <b>2</b> | <b>Le régime du condensat pur : l'équation de Gross-Pitayevski</b>                                                                                        | <b>49</b> |
| 2.1      | Cas stationnaire . . . . .                                                                                                                                | 52        |
| 2.1.1    | En dimension trois . . . . .                                                                                                                              | 52        |
| 2.1.1.1  | Une formulation variationnelle . . . . .                                                                                                                  | 52        |
| 2.1.1.2  | Cas $a > 0$ et longueur de relaxation $\xi$ . . . . .                                                                                                     | 53        |
| 2.1.1.3  | Cas $a < 0$ et instabilité par effondrement . . . . .                                                                                                     | 54        |
| 2.1.1.4  | Cas piégé et limite de Thomas-Fermi . . . . .                                                                                                             | 54        |
| 2.1.2    | En dimension deux . . . . .                                                                                                                               | 57        |
| 2.1.2.1  | Une invariance d'échelle critiquable . . . . .                                                                                                            | 57        |
| 2.1.2.2  | Limite de Thomas-Fermi . . . . .                                                                                                                          | 59        |
| 2.1.3    | En dimension un : le soliton brillant . . . . .                                                                                                           | 59        |
| 2.1.3.1  | Analyse critique de la constante de couplage . . .                                                                                                        | 61        |
| 2.1.3.2  | Applications : équation d'état, limite de Thomas-Fermi, soliton brillant et brisure d'invariance par translation . . . . .                                | 62        |
| 2.1.3.3  | Ce que nous apprend l'ansatz de Bethe : forte ou faible densité, condensat ou pas, soliton quantique, chat de Schrödinger, transition liquide-gaz . . . . | 64        |
| 2.1.4    | Complément : condition de minimisation locale de l'énergie                                                                                                | 69        |
| 2.2      | Applications : condensats stationnaires avec des défauts de phase                                                                                         | 73        |
| 2.2.1    | Une équation enrichie par un terme de rotation . . . . .                                                                                                  | 73        |
| 2.2.2    | En dimension un : soliton gris et seconde branche de Lieb                                                                                                 | 76        |
| 2.2.2.1  | Une formulation salvatrice . . . . .                                                                                                                      | 76        |
| 2.2.2.2  | Intégrabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire . . . . .                                                                                         | 78        |
| 2.2.2.3  | À la limite thermodynamique . . . . .                                                                                                                     | 79        |
| 2.2.2.4  | Obtention de la seconde branche de Lieb par l'énergie . . . . .                                                                                           | 80        |
| 2.2.2.5  | Obtention de la seconde branche de Lieb par le déphasage . . . . .                                                                                        | 81        |
| 2.2.2.6  | Et dans le cas attractif? . . . . .                                                                                                                       | 83        |
| 2.2.3    | En dimension deux : condensats piégés tournants avec des tourbillons quantiques . . . . .                                                                 | 84        |
| 2.2.3.1  | Une fonction d'essai de Thomas-Fermi avec tourbillons . . . . .                                                                                           | 85        |
| 2.2.3.2  | Énergie moyenne de $n$ tourbillons . . . . .                                                                                                              | 87        |
| 2.2.3.3  | Discussion physique à $\Omega$ fixé . . . . .                                                                                                             | 89        |
| 2.2.3.4  | Discussion physique à $L_z$ fixé pour $n = 1$ . . . . .                                                                                                   | 92        |
| 2.2.3.5  | Ni des condensats au sens strict ni des superfluides                                                                                                      | 93        |
| 2.2.4    | En dimension trois : le tourbillon à ligne de cœur courbée .                                                                                              | 95        |

|         |                                                                                                                                                        |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.2.4.1 | Un raisonnement simple par découpage en tranches . . . . .                                                                                             | 95  |
| 2.2.4.2 | Des prédictions à l'épreuve du numérique . . . . .                                                                                                     | 97  |
| 2.2.4.3 | À moment cinétique $L_z$ fixé . . . . .                                                                                                                | 98  |
| 2.3     | Cas dépendant du temps . . . . .                                                                                                                       | 99  |
| 2.3.1   | Forme de l'équation et de ses réductions dimensionnelles .                                                                                             | 101 |
| 2.3.2   | Les équations hydrodynamiques comme un équivalent de l'approximation de Thomas-Fermi dans le cas dépendant du temps, et comment les résoudre . . . . . | 102 |
| 2.3.2.1 | Obtention par passage en représentation phase-module . . . . .                                                                                         | 102 |
| 2.3.2.2 | Solution des équations hydrodynamiques . . . . .                                                                                                       | 104 |
| 2.3.2.3 | En point de vue de Lagrange . . . . .                                                                                                                  | 106 |
| 2.3.2.4 | Équations hydrodynamiques linéarisées . . . . .                                                                                                        | 107 |
| 2.3.2.5 | Modes propres en l'absence de rotation . . . . .                                                                                                       | 109 |
| 2.3.3   | Quelques solutions exactes de l'équation de Gross-Pitayevski . . . . .                                                                                 | 115 |
| 2.3.3.1 | Cas 1D : mettre en mouvement le soliton brillant .                                                                                                     | 115 |
| 2.3.3.2 | Cas 2D : se ramener à un piège de raideur constante par changement de jauge et d'échelle . . . . .                                                     | 117 |
| 2.3.3.3 | Cas général : modifier le mouvement d'ensemble dans un piège . . . . .                                                                                 | 121 |
| 2.3.4   | Application : élucidation du mécanisme de formation des réseaux de tourbillons dans l'expérience de l'ENS . . . . .                                    | 122 |
| 2.3.4.1 | La procédure expérimentale de l'ENS et l'échec des scénarios thermodynamiques . . . . .                                                                | 122 |
| 2.3.4.2 | Un nouveau mécanisme en deux temps, résonance et instabilité dynamique . . . . .                                                                       | 125 |
| 2.3.4.3 | Une procédure vérificatoire : mise en rotation lente                                                                                                   | 129 |
| 2.3.4.4 | Le scénario thermodynamique à la Landau, suite et fin . . . . .                                                                                        | 134 |
| 2.3.4.5 | Moralité . . . . .                                                                                                                                     | 136 |
| 2.3.4.6 | Complément : solutions stationnaires générales des équations hydrodynamiques dans un piège harmonique tournant autour d'un de ses axes propres         | 137 |
| 2.3.5   | Étude de la stabilité dynamique . . . . .                                                                                                              | 140 |
| 2.3.5.1 | Un calcul très simple . . . . .                                                                                                                        | 141 |
| 2.3.5.2 | Une obtention plus rigoureuse de $\mathcal{L}(t)$ . . . . .                                                                                            | 143 |
| 2.3.5.3 | Cas indépendant du temps : modes propres normaux et anormaux, transformation de Bogolioubov, stabilité dynamique et thermodynamique . .                | 144 |
| 2.3.5.4 | Cas dépendant du temps . . . . .                                                                                                                       | 153 |

|         |                                                                                                          |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.4     | Limitations à la validité de l'équation de Gross-Pitayevski pour l'évolution temporelle . . . . .        | 154 |
| 2.4.1   | Évolution d'un soliton brillant « au repos » . . . . .                                                   | 155 |
| 2.4.1.1 | Par équations de Heisenberg pour le champ quantique . . . . .                                            | 156 |
| 2.4.1.2 | Par étude linéaire de stabilité pour le champ classique . . . . .                                        | 157 |
| 2.4.2   | Un mécanisme de brouillage de phase omis par l'équation de Gross-Pitayevski . . . . .                    | 159 |
| 2.4.2.1 | Modèle à deux modes . . . . .                                                                            | 159 |
| 2.4.2.2 | Champ classique contre champ quantique . . . . .                                                         | 160 |
| 2.4.2.3 | Amélioration du champ classique par ajout d'un bruit de Wigner dans l'état initial . . . . .             | 163 |
| 2.4.3   | Généralité de ce mécanisme de brouillage : mode pulsant dans un piège harmonique isotrope . . . . .      | 164 |
| 2.4.3.1 | Excitation par changement de raideur du piège . . . . .                                                  | 164 |
| 2.4.3.2 | Stabilité du mode pulsant : effet des fluctuations du facteur d'échelle . . . . .                        | 166 |
| 2.4.3.3 | Stabilité des autres modes . . . . .                                                                     | 169 |
| 2.4.4   | Absence du mécanisme d'émission spontanée dans l'équation de Gross-Pitayevski . . . . .                  | 170 |
| 2.4.4.1 | Une analogie avec le rayonnement quantique . . . . .                                                     | 170 |
| 2.4.4.2 | Déplétion quantique rapide dans un modèle à deux modes . . . . .                                         | 171 |
| 2.4.4.3 | En champ classique amélioré par bruit de Wigner . . . . .                                                | 175 |
| 2.4.5   | Un autre exemple, multimode, dominé par l'émission spontanée de paires : les faisceaux jumeaux . . . . . | 176 |
| 2.4.5.1 | Modèle 1D avec constante de couplage modulée en temps . . . . .                                          | 176 |
| 2.4.5.2 | Analyse linéaire de stabilité en champ classique . . . . .                                               | 178 |
| 2.4.5.3 | Propriétés statistiques des faisceaux jumeaux . . . . .                                                  | 181 |
| 2.4.6   | Moralité de la discussion sur la validité de Gross-Pitayevski . . . . .                                  | 182 |

### 3 La théorie de Bogolioubov : premières corrections au condensat pur en dimension trois et opérateur phase du condensat 183

|       |                                                                                                                                                                                                           |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1   | Idée générale de la méthode de Bogolioubov . . . . .                                                                                                                                                      | 184 |
| 3.1.1 | Le champ non condensé $\hat{\psi}_\perp$ comme perturbation . . . . .                                                                                                                                     | 184 |
| 3.1.2 | Mise en œuvre : développement de l'hamiltonien, élimination du mode du condensat, opérateur phase $\hat{\theta}$ et champ non condensé redéfini $\hat{\Lambda}$ , correction à Gross-Pitayevski . . . . . | 185 |
| 3.1.3 | Une percée historique . . . . .                                                                                                                                                                           | 188 |
| 3.2   | Cas stationnaire spatialement homogène . . . . .                                                                                                                                                          | 189 |

|         |                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2.1   | Cas du modèle sur réseau . . . . .                                                                                                                                                                                                     | 190 |
| 3.2.1.1 | Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov et<br>premières interprétations physiques . . . . .                                                                                                                                         | 190 |
| 3.2.1.2 | Un développement caché . . . . .                                                                                                                                                                                                       | 193 |
| 3.2.1.3 | Forme finale de l'hamiltonien de Bogolioubov; spec-<br>tre d'excitation, énergie de l'état fondamental . . . . .                                                                                                                       | 195 |
| 3.2.2   | Pour un vrai potentiel d'interaction $V(\mathbf{r})$ . . . . .                                                                                                                                                                         | 199 |
| 3.2.3   | Applications simples : statistique de $n_0$ , densité non conden-<br>sée anormale, équation d'état, distribution et corrélations<br>en impulsion, fonctions $g_1$ et $g_2$ , cohérence temporelle du<br>champ non condensé . . . . .   | 202 |
| 3.2.3.1 | Statistique de $n_0$ à l'équilibre . . . . .                                                                                                                                                                                           | 202 |
| 3.2.3.2 | La densité non condensée anormale $\rho_{\text{an}}$ . . . . .                                                                                                                                                                         | 210 |
| 3.2.3.3 | L'équation d'état du gaz de bosons en interaction<br>faible à l'approximation de Bogolioubov . . . . .                                                                                                                                 | 211 |
| 3.2.3.4 | Fonction de cohérence du premier ordre $g_1$ et dis-<br>tribution en vecteur d'onde $n_{\mathbf{k}}^{\text{cin}}$ du gaz; fonction<br>de corrélation dans l'espace des impulsions . . . . .                                            | 221 |
| 3.2.3.5 | Fonction de distribution de paires $g_2$ . . . . .                                                                                                                                                                                     | 225 |
| 3.2.3.6 | Fonction de cohérence spatio-temporelle $g_1$ dans<br>l'approximation de Bogolioubov . . . . .                                                                                                                                         | 229 |
| 3.2.4   | Le cas à part de la superfluidité . . . . .                                                                                                                                                                                            | 237 |
| 3.2.4.1 | Superfluidité n'est pas condensation . . . . .                                                                                                                                                                                         | 237 |
| 3.2.4.2 | La vitesse critique de Landau et au-delà . . . . .                                                                                                                                                                                     | 238 |
| 3.2.4.3 | Les courants métastables et leur analyse de Bogo-<br>lioubov . . . . .                                                                                                                                                                 | 242 |
| 3.2.4.4 | Définition thermodynamique de la fraction nor-<br>male . . . . .                                                                                                                                                                       | 249 |
| 3.2.4.5 | Variante énergétique et borne de Leggett . . . . .                                                                                                                                                                                     | 252 |
| 3.2.5   | Complément I : exposé et mise en œuvre sur la densité non<br>condensée normale et anormale d'une méthode générale<br>de développement à haute et à basse température, et mise<br>en difficulté de la théorie de Hartree-Fock . . . . . | 256 |
| 3.2.5.1 | La densité non condensée . . . . .                                                                                                                                                                                                     | 256 |
| 3.2.5.2 | À l'ordre dominant en température . . . . .                                                                                                                                                                                            | 258 |
| 3.2.5.3 | Comment aller au-delà de l'ordre dominant . . . . .                                                                                                                                                                                    | 259 |
| 3.2.5.4 | La densité non condensée anormale . . . . .                                                                                                                                                                                            | 262 |
| 3.2.5.5 | Quel est l'intérêt du développement à haute tem-<br>pérature? . . . . .                                                                                                                                                                | 264 |
| 3.2.5.6 | Application : mise de Hartree-Fock en difficulté . . . . .                                                                                                                                                                             | 264 |
| 3.2.6   | Complément II : adiabaticité quantique et adiabaticité ther-<br>modynamique . . . . .                                                                                                                                                  | 267 |

|         |                                                                                                                                                                       |     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3     | Cas stationnaire dans un piège . . . . .                                                                                                                              | 271 |
| 3.3.1   | Motivation et spécificités . . . . .                                                                                                                                  | 271 |
| 3.3.1.1 | Quel mode spatial du condensat? . . . . .                                                                                                                             | 271 |
| 3.3.1.2 | Quels modes de Bogolioubov? Limite semi-classique . . . . .                                                                                                           | 272 |
| 3.3.2   | Un cas simplifié pour comprendre pourquoi les termes d'ordre 3 en $f_{nc}^{1/2}$ dans l'hamiltonien peuvent influencer sur des valeurs moyennes à l'ordre 2 . . . . . | 274 |
| 3.3.2.1 | Calcul de Bogolioubov pour un degré de liberté . . . . .                                                                                                              | 274 |
| 3.3.2.2 | Moralité . . . . .                                                                                                                                                    | 277 |
| 3.3.3   | Approximation cubique de l'hamiltonien . . . . .                                                                                                                      | 277 |
| 3.3.3.1 | Première étape de la cubisation . . . . .                                                                                                                             | 277 |
| 3.3.3.2 | Deuxième étape de la cubisation . . . . .                                                                                                                             | 278 |
| 3.3.3.3 | Le résultat final et son interprétation . . . . .                                                                                                                     | 279 |
| 3.3.4   | Lien entre $\hat{\Lambda}^{(2)}$ , $\langle \hat{\Lambda}^{(1)} \rangle$ et $\phi_{\perp}^{(2)}$ . . . . .                                                            | 282 |
| 3.3.5   | Développement explicite de la théorie à l'ordre 3 en $f_{nc}^{1/2}$ . . . . .                                                                                         | 283 |
| 3.3.5.1 | Vue d'ensemble sur la suite du développement en $f_{nc}^{1/2}$ . . . . .                                                                                              | 283 |
| 3.3.5.2 | À l'ordre 0 en $f_{nc}^{1/2}$ . . . . .                                                                                                                               | 283 |
| 3.3.5.3 | À l'ordre 1 en $f_{nc}^{1/2}$ . . . . .                                                                                                                               | 284 |
| 3.3.5.4 | À l'ordre 2 en $f_{nc}^{1/2}$ : l'hamiltonien de Bogolioubov discret et sa forme réduite . . . . .                                                                    | 284 |
| 3.3.5.5 | À l'ordre 3 en $f_{nc}^{1/2}$ : fonction d'onde du condensat au-delà de Gross-Pitayevski . . . . .                                                                    | 290 |
| 3.3.5.6 | Calcul de $\langle \hat{\Lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{H}^{(0-2)} + \hat{H}^{(3)}}^{(2)}$ et interprétation physique par déplétion-interaction . . . . .    | 292 |
| 3.3.6   | Développement de $g_0$ à l'ordre un en $a/b$ et passage à la limite continue (ou d'une interaction de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$ . . . . .             | 296 |
| 3.3.6.1 | Contexte et motivation . . . . .                                                                                                                                      | 296 |
| 3.3.6.2 | Géométrie considérée pour le passage à la limite continue . . . . .                                                                                                   | 297 |
| 3.3.6.3 | Cas de l'énergie de l'état fondamental . . . . .                                                                                                                      | 298 |
| 3.3.6.4 | Cas de la fonction d'onde du condensat . . . . .                                                                                                                      | 301 |
| 3.3.7   | Synthèse : formulation directe dans l'espace continu de la théorie de Bogolioubov indépendante du temps . . . . .                                                     | 303 |
| 3.3.7.1 | Motivation et obtention . . . . .                                                                                                                                     | 303 |
| 3.3.7.2 | Cas de $\phi^{(2)}$ , première correction à Gross-Pitayevski sur le mode spatial du condensat . . . . .                                                               | 305 |
| 3.3.7.3 | Cas de l'hamiltonien de Bogolioubov et de son niveau d'énergie fondamental . . . . .                                                                                  | 308 |
| 3.3.7.4 | Cas d'une observable plus générale . . . . .                                                                                                                          | 310 |

|         |                                                                                                                                                             |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.7.5 | Récapitulatif en espace continu : principales étapes et équations . . . . .                                                                                 | 310 |
| 3.4     | La théorie de Bogolioubov dans le cas dépendant du temps . . . .                                                                                            | 312 |
| 3.4.1   | Motivations physiques et vue d'ensemble . . . . .                                                                                                           | 312 |
| 3.4.1.1 | Une question utile et un problème fondamental . . . . .                                                                                                     | 312 |
| 3.4.1.2 | Un premier progrès sur Gross-Pitayevski . . . . .                                                                                                           | 313 |
| 3.4.1.3 | Un second progrès sur Gross-Pitayevski . . . . .                                                                                                            | 314 |
| 3.4.1.4 | Vue d'ensemble de la méthode . . . . .                                                                                                                      | 315 |
| 3.4.2   | Équation du mouvement pour le champ $\hat{\Lambda}$ à l'ordre 2 en $f_{nc}^{1/2}$                                                                           | 315 |
| 3.4.3   | Fonction d'onde du condensat à l'ordre 0 en $f_{nc}^{1/2}$ . . . . .                                                                                        | 321 |
| 3.4.4   | Évolution du champ non condensé et correction à $\phi^{(0)}$ à l'ordre 1 en $f_{nc}^{1/2}$ . . . . .                                                        | 323 |
| 3.4.5   | Contribution d'ordre 2 en $f_{nc}^{1/2}$ à la fonction d'onde du condensat . . . . .                                                                        | 325 |
| 3.4.6   | Développement de $g_0$ au premier ordre en $a/b$ et limite continue (ou de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$ . . . . .                              | 327 |
| 3.4.7   | Synthèse : formulation directe de la théorie de Bogolioubov dépendant du temps dans l'espace continu . . . . .                                              | 331 |
| 3.4.7.1 | Quel petit paramètre? . . . . .                                                                                                                             | 332 |
| 3.4.7.2 | Ordre 0 : l'équation de Gross-Pitayevski retrouvée . . . . .                                                                                                | 332 |
| 3.4.7.3 | Ordre 1 : des modes de quasi-particules sans interaction . . . . .                                                                                          | 332 |
| 3.4.7.4 | Ordre 2 : première correction à Gross-Pitayevski . . . . .                                                                                                  | 335 |
| 3.4.7.5 | De l'importance de $\phi_{\perp}^{(2)}$ dans les observables . . . . .                                                                                      | 336 |
| 3.4.7.6 | Et si $N$ fluctue? . . . . .                                                                                                                                | 338 |
| 3.4.8   | Lien avec la physique de champ classique et l'approximation de la troncature de Wigner . . . . .                                                            | 339 |
| 3.4.9   | Les différents scénarios de sortie du régime de validité de l'équation de Gross-Pitayevski dépendant du temps . . . .                                       | 344 |
| 3.4.9.1 | Mise en échec par divergence de la déplétion . . . . .                                                                                                      | 345 |
| 3.4.9.2 | Mise en échec au niveau de $\phi^{(2)}$ . . . . .                                                                                                           | 348 |
| 3.5     | L'opérateur phase du condensat . . . . .                                                                                                                    | 349 |
| 3.5.1   | Introduction de l'opérateur phase $\hat{\theta}_{\phi}$ . . . . .                                                                                           | 350 |
| 3.5.2   | Équation d'évolution de $\hat{\theta}_{\phi}$ lorsque $\partial_t \phi \equiv 0$ . . . . .                                                                  | 352 |
| 3.5.3   | Lissage temporel $\overline{\hat{\theta}_{\phi}}^t$ de l'équation d'évolution . . . . .                                                                     | 354 |
| 3.5.3.1 | Motivation et mise en œuvre . . . . .                                                                                                                       | 354 |
| 3.5.3.2 | Lissage des termes quadratiques dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$ . . . . .                                                                                    | 356 |
| 3.5.3.3 | Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$ : il faut connaître les termes quadratiques $\hat{S}^{(2)}$ de $d\hat{\Lambda}_{\phi^{(0)}}/dt$ | 357 |
| 3.5.3.4 | Lissage de l'opérateur source $\hat{S}^{(2)}$ et d'un opérateur $\hat{\phi}^{(2)}$ . . . . .                                                                | 359 |

|         |                                                                                                               |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.5.3.5 | Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$ : suite et fin . . . . .                            | 360 |
| 3.5.4   | Reconnaître dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$ un opérateur potentiel chimique . . . . .                            | 362 |
| 3.5.4.1 | Reconnaître des dérivées par rapport à $N$ . . . . .                                                          | 362 |
| 3.5.4.2 | Triturer les dérivées en trois étapes . . . . .                                                               | 364 |
| 3.5.4.3 | Regroupement, résultat final et interprétation . . . . .                                                      | 366 |
| 3.5.5   | Au-delà de l'approximation de Bogolioubov : le cas homogène spatialement . . . . .                            | 367 |
| 3.5.5.1 | Intérêt, idée et mise en œuvre du calcul . . . . .                                                            | 367 |
| 3.5.5.2 | Le résultat; ses termes diagonaux; ses termes non diagonaux, diffusion de phase et lissage temporel . . . . . | 369 |
| 3.5.6   | Cas où le nombre de particules fluctue . . . . .                                                              | 371 |
| 3.5.6.1 | Motivation . . . . .                                                                                          | 371 |
| 3.5.6.2 | Extension du calcul de $d\hat{\theta}_\phi/dt$ des sections précédentes . . . . .                             | 372 |
| 3.5.6.3 | Simplification supplémentaire pour un grand système . . . . .                                                 | 374 |
| 3.5.6.4 | Le résultat et son application à un mélange statistique d'ensembles canoniques . . . . .                      | 375 |
| 3.5.7   | Dans le cas spatialement homogène, sans lissage temporel (avec les termes oscillants) . . . . .               | 376 |
| 3.5.7.1 | À $N$ fixé . . . . .                                                                                          | 376 |
| 3.5.7.2 | Lorsque $N$ fluctue . . . . .                                                                                 | 378 |
| 3.5.8   | Complément : les paradoxes de l'opérateur phase . . . . .                                                     | 379 |

#### **4 Application I : Amortissement et déplacement d'énergie des modes d'excitation d'un condensat spatialement homogène 381**

|         |                                                                                                                                                       |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1     | Obtention par analyse d'une excitation de Bragg de faible amplitude $\epsilon$ . . . . .                                                              | 383 |
| 4.1.1   | Une expérience de pensée . . . . .                                                                                                                    | 383 |
| 4.1.2   | Solution de l'équation de Gross-Pitayevski au premier ordre en $\epsilon$ . . . . .                                                                   | 385 |
| 4.1.3   | Évolution des modes de Bogolioubov au premier ordre en $\epsilon$ et amplitudes $\mathcal{A}_{k_1, k_2}^{k_3}, \mathcal{A}_{k_1, k_2, k_3}$ . . . . . | 387 |
| 4.1.4   | Correction $\phi^{(2)}$ à la fonction d'onde de Gross-Pitayevski au premier ordre en $\epsilon$ . . . . .                                             | 390 |
| 4.1.4.1 | Structure du résultat et considérations générales . . . . .                                                                                           | 390 |
| 4.1.4.2 | Calcul explicite de $\phi^{(2)}$ aux temps longs . . . . .                                                                                            | 393 |
| 4.1.5   | Résultat : la première correction à Gross-Pitayevski sur les pulsations propres du condensat . . . . .                                                | 399 |
| 4.1.5.1 | Trois expressions équivalentes . . . . .                                                                                                              | 400 |

|         |                                                                                                                                                                      |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.5.2 | Survol de la littérature sur ce sujet . . . . .                                                                                                                      | 402 |
| 4.1.5.3 | Conditions d'applicabilité du résultat (4.84) . . . . .                                                                                                              | 403 |
| 4.2     | Obtention et interprétation physique en termes d'interaction entre les quasi-particules de Bogolioubov . . . . .                                                     | 405 |
| 4.2.1   | Signal de Bragg et fonctions de corrélation du système non perturbé . . . . .                                                                                        | 405 |
| 4.2.2   | Calcul par équation pilote et théorème de régression quantique . . . . .                                                                                             | 407 |
| 4.2.2.1 | Processus d'interaction entre quasi-particules et amplitudes $\mathcal{A}$ retrouvées . . . . .                                                                      | 408 |
| 4.2.2.2 | L'équation pilote dans l'approximation de Born-Markov . . . . .                                                                                                      | 410 |
| 4.2.2.3 | Le théorème de régression quantique . . . . .                                                                                                                        | 412 |
| 4.2.3   | Retrouver le résultat de la section 4.1.5 . . . . .                                                                                                                  | 414 |
| 4.2.3.1 | Un désaccord apparent . . . . .                                                                                                                                      | 414 |
| 4.2.3.2 | Résolution par inclusion de $\hat{H}_4$ . . . . .                                                                                                                    | 415 |
| 4.2.4   | Une condition de validité du résultat : celle de la règle d'or . . . . .                                                                                             | 417 |
| 4.3     | Quelques résultats explicites sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .                                                                                              | 419 |
| 4.3.1   | Synthèse : ensemble des résultats analytiques sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ et illustrations numériques . . . . .                                                  | 419 |
| 4.3.1.1 | Classement par variable fuyante (tendant vers 0 ou $+\infty$ ) . . . . .                                                                                             | 420 |
| 4.3.1.2 | Illustrations numériques après réduction à une intégrale simple . . . . .                                                                                            | 423 |
| 4.3.1.3 | Complément : calcul des intégrales sur $\lambda$ dans les équations (4.160), (4.162) et (4.167) . . . . .                                                            | 429 |
| 4.3.2   | Cas $T = 0$ : développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles $q$ à l'ordre 4 ; le résultat est réel mais nécessite un développement multiéchelle . . . . . | 429 |
| 4.3.2.1 | Motivation initiale : quelle vitesse du son ? . . . . .                                                                                                              | 429 |
| 4.3.2.2 | Un développement trop naïf sous le signe intégral . . . . .                                                                                                          | 431 |
| 4.3.2.3 | La bonne méthode est multiéchelle . . . . .                                                                                                                          | 432 |
| 4.3.2.4 | Un raccordement vérificateur . . . . .                                                                                                                               | 433 |
| 4.3.2.5 | Le résultat final à l'ordre 4 . . . . .                                                                                                                              | 435 |
| 4.3.3   | Cas $T = 0$ : développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles $q$ à l'ordre 5 ; le résultat devient complexe et un logarithme de $q$ apparaît . . . . .     | 435 |
| 4.3.3.1 | Une réelle motivation physique . . . . .                                                                                                                             | 435 |
| 4.3.3.2 | Une intégrale modèle pour s'exercer, qui montre l'importance de la courbure de la relation de dispersion . . . . .                                                   | 436 |
| 4.3.3.3 | Retour au vrai problème . . . . .                                                                                                                                    | 442 |
| 4.3.3.4 | Le résultat à l'ordre 5 . . . . .                                                                                                                                    | 447 |

|         |                                                                                                                                              |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3.4   | Cas $T \neq 0$ : linéarisation de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles $q$ . . . . .                                                      | 447 |
| 4.3.4.1 | Motivations et vue d'ensemble . . . . .                                                                                                      | 447 |
| 4.3.4.2 | Développement dans la zone $k < Aq$ . . . . .                                                                                                | 450 |
| 4.3.4.3 | Développement dans la zone $k > Aq$ . . . . .                                                                                                | 452 |
| 4.3.4.4 | Une forme finale plus agréable . . . . .                                                                                                     | 453 |
| 4.3.4.5 | À basse température . . . . .                                                                                                                | 454 |
| 4.3.4.6 | À haute température . . . . .                                                                                                                | 455 |
| 4.3.4.7 | À température quelconque . . . . .                                                                                                           | 457 |
| 4.3.5   | Que vaut $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands $q$ ? . . . . .                                                                              | 458 |
| 4.3.5.1 | Motivation physique . . . . .                                                                                                                | 458 |
| 4.3.5.2 | Ce que l'intuition suggère sur la partie réelle . . . . .                                                                                    | 459 |
| 4.3.5.3 | Ce que l'intuition suggère sur la partie imaginaire . . . . .                                                                                | 461 |
| 4.3.5.4 | Développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands $q$ à $T = 0$ . . . . .                                                              | 463 |
| 4.3.5.5 | À $T > 0$ : développement aux grands $q$ de la partie<br>thermique de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .                             | 468 |
| 4.3.6   | Étude de la partie thermique $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)\text{th}}$ de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ à basse et à haute<br>température . . . . . | 471 |
| 4.3.6.1 | Limite de basse $T$ à nombre d'onde $q$ fixé . . . . .                                                                                       | 472 |
| 4.3.6.2 | Limite de basse $T$ à rapport $\hbar c_{\text{GP}} q / k_{\text{B}} T$ fixé . . . . .                                                        | 473 |
| 4.3.6.3 | Limite de haute $T$ à nombre d'onde $q$ fixé . . . . .                                                                                       | 476 |
| 4.3.6.4 | Limite de haute $T$ à rapport $\hbar^2 q^2 / m k_{\text{B}} T$ fixé . . . . .                                                                | 479 |
| 4.3.7   | Complément I : sectorisation des processus de Belyaev et<br>de Landau dans l'espace des vecteurs d'onde . . . . .                            | 482 |
| 4.3.8   | Complément II : les singularités aux frontières de l'inté-<br>grande de $\int dk$ dans $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .                 | 485 |
| 4.4     | Morale de notre calcul de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .                                                                              | 490 |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| <b>Principales notations</b> | <b>493</b> |
|------------------------------|------------|

|              |            |
|--------------|------------|
| <b>Index</b> | <b>499</b> |
|--------------|------------|

|                      |            |
|----------------------|------------|
| <b>Bibliographie</b> | <b>511</b> |
|----------------------|------------|

|                                                                                                        |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5 Application II : La compression de spin et ses limites, et les états chats<br/>de Schrödinger</b> | <b>537</b> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|

|         |                                               |     |
|---------|-----------------------------------------------|-----|
| 5.1     | Introduction . . . . .                        | 537 |
| 5.1.1   | Principe d'une horloge atomique . . . . .     | 537 |
| 5.1.2   | Le bruit quantique standard . . . . .         | 538 |
| 5.1.3   | Les états comprimés . . . . .                 | 540 |
| 5.1.4   | Quelques points à approfondir . . . . .       | 540 |
| 5.1.5   | Objectifs du présent chapitre . . . . .       | 541 |
| 5.1.5.1 | Un spin géant grâce aux condensats... . . . . | 541 |

|         |                                                                                                                                |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1.5.2 | ... mais un problème multimode . . . . .                                                                                       | 542 |
| 5.2     | Compression dans le modèle de Kitagawa-Ueda . . . . .                                                                          | 543 |
| 5.2.1   | Position du problème . . . . .                                                                                                 | 543 |
| 5.2.2   | Solution des équations du mouvement opératoriels . . . . .                                                                     | 544 |
| 5.2.3   | Représentation bosonique et états de phase . . . . .                                                                           | 545 |
| 5.2.4   | Spin moyen, brouillage et résurgence, chat de Schrödinger . . . . .                                                            | 547 |
| 5.2.5   | Variances et covariances de spin . . . . .                                                                                     | 548 |
| 5.2.6   | Optimisation de $\Delta S_{\perp, \min}$ sur le temps . . . . .                                                                | 550 |
| 5.2.6.1 | Une première échelle de temps . . . . .                                                                                        | 551 |
| 5.2.6.2 | Une seconde échelle de temps . . . . .                                                                                         | 552 |
| 5.2.7   | Optimisation de $\xi^2(t)$ sur le temps . . . . .                                                                              | 553 |
| 5.3     | Effet d'un environnement aléatoire stationnaire déphasant . . . . .                                                            | 556 |
| 5.3.1   | Motivation et présentation du modèle . . . . .                                                                                 | 556 |
| 5.3.2   | Fluctuations de Larmor et facteur de compression du spin . . . . .                                                             | 557 |
| 5.3.3   | Quelle loi d'échelle pour les fluctuations de Larmor aux<br>grands $N$ ? . . . . .                                             | 559 |
| 5.3.4   | Optimisation de la compression sur le temps . . . . .                                                                          | 559 |
| 5.3.4.1 | Ce à quoi on peut s'attendre . . . . .                                                                                         | 559 |
| 5.3.4.2 | Analyse à la première échelle de temps . . . . .                                                                               | 560 |
| 5.3.4.3 | Analyse à la seconde échelle de temps . . . . .                                                                                | 561 |
| 5.3.4.4 | D'un régime à l'autre : compétition entre bruit et<br>limite thermodynamique . . . . .                                         | 563 |
| 5.4     | Mise en œuvre dans des condensats atomiques gazeux dans l'ap-<br>proximation à deux modes . . . . .                            | 564 |
| 5.4.1   | Dynamique non linéaire dans le cas homogène . . . . .                                                                          | 566 |
| 5.4.2   | Dynamique non linéaire dans le cas piégé . . . . .                                                                             | 568 |
| 5.4.2.1 | Modes $\phi_\sigma$ stationnaires . . . . .                                                                                    | 568 |
| 5.4.2.2 | Modes $\phi_\sigma$ instationnaires, difficultés et échappa-<br>toire . . . . .                                                | 571 |
| 5.4.3   | Conséquences physiques des hamiltoniens modèles (5.114)<br>et (5.127) et des fluctuations de $N$ . . . . .                     | 572 |
| 5.5     | Étude réaliste et multimode des limites de la compression de spin<br>dans des condensats atomiques gazeux . . . . .            | 575 |
| 5.5.1   | Considérations simples et effet des pertes . . . . .                                                                           | 575 |
| 5.5.1.1 | Motivations et un calcul heuristique de la limite<br>de compression avec les opérateurs phases $\hat{\theta}_\sigma$ . . . . . | 575 |
| 5.5.1.2 | Effet des pertes de particules dans le cas $g_{aa} = g_{bb}$<br>et $g_{ab} = 0$ . . . . .                                      | 578 |
| 5.5.2   | L'étude multimode par Bogolioubov proprement dite . . . . .                                                                    | 584 |
| 5.5.2.1 | Description de la configuration et de la procédure<br>expérimentale . . . . .                                                  | 584 |

|         |                                                                                                                                                                                                                              |     |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.5.2.2 | Comment mener le calcul : contextualisation de la méthode de Bogolioubov, équation d'évolution des variables $\hat{b}_{\sigma k}$ , $\hat{b}_{\sigma k}^+$ et $\hat{\theta}_{\sigma\bar{\phi}}$ et leurs valeurs à $t = 0^+$ | 587 |
| 5.5.2.3 | Les observables à $t > 0$ participant de la compression de spin . . . . .                                                                                                                                                    | 593 |
| 5.5.2.4 | Le résultat final sur le facteur de compression de spin . . . . .                                                                                                                                                            | 603 |
| 5.5.2.5 | Que se passe-t-il aux temps longs $t > 1/\gamma_{\text{coll}}$ ? Limite ergodique . . . . .                                                                                                                                  | 605 |
| 5.5.3   | Complément : effet du branchement de l'interaction sur un gaz condensé . . . . .                                                                                                                                             | 611 |
| 5.5.4   | Application de la théorie multimode au cas spatialement homogène . . . . .                                                                                                                                                   | 613 |
| 5.5.4.1 | L'optimum de compression . . . . .                                                                                                                                                                                           | 613 |
| 5.5.4.2 | La dépendance temporelle du facteur de compression . . . . .                                                                                                                                                                 | 616 |
| 5.5.5   | Application de la théorie multimode au cas piégé : la limite de la compression de spin dans un piège harmonique isotrope par BKW . . . . .                                                                                   | 622 |
| 5.5.5.1 | Motivation, formulation du problème, limite macroscopique . . . . .                                                                                                                                                          | 622 |
| 5.5.5.2 | Approximation BKW pour les modes de Bogolioubov . . . . .                                                                                                                                                                    | 625 |
| 5.5.5.3 | Interprétation classique . . . . .                                                                                                                                                                                           | 627 |
| 5.5.5.4 | La condition de quantification BKW des niveaux d'énergie . . . . .                                                                                                                                                           | 631 |
| 5.5.5.5 | Justification du coefficient de réflexion ( $-i$ ) des ondes BKW aux points de rebroussement . . . . .                                                                                                                       | 633 |
| 5.5.5.6 | Mise en œuvre de BKW dans le calcul de $\xi_{\text{opt}}^2$ . . .                                                                                                                                                            | 637 |
| 5.5.6   | Complément : calcul des intégrales semi-classiques $I, J, K$                                                                                                                                                                 | 641 |
| 5.5.6.1 | Cas $1 < 2j - 1 < \check{\epsilon} < j^2$ : trajectoires externes . . . .                                                                                                                                                    | 642 |
| 5.5.6.2 | Cas $0 < j^2 < \check{\epsilon}$ : trajectoires hybrides . . . . .                                                                                                                                                           | 643 |
| 5.5.7   | Complément : calcul de $\chi_{\text{Bog}}$ , valeurs de $\hat{D}$ et de sa variance, expression de $\hat{C}_{\text{osc}}(t)$ dans le cas homogène . . . . .                                                                  | 644 |
| 5.5.7.1 | Calcul de $\chi_{\text{Bog}}$ . . . . .                                                                                                                                                                                      | 645 |
| 5.5.7.2 | Une retombée : valeur de l'opérateur $\hat{D}$ et de sa variance . . . . .                                                                                                                                                   | 647 |
| 5.5.7.3 | Une autre retombée : expression de l'opérateur $\hat{C}_{\text{osc}}(t)$ dans le cas spatialement homogène . . . . .                                                                                                         | 648 |
| 5.6     | États chats de Schrödinger et résurgence de phase . . . . .                                                                                                                                                                  | 650 |
| 5.6.1   | À la mi-temps entre brouillage et résurgence . . . . .                                                                                                                                                                       | 650 |
| 5.6.2   | Les prédictions du modèle à deux modes de Kitagawa-Ueda                                                                                                                                                                      | 652 |

|          |                                                                                                                                                                                                       |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.6.3    | Comment tirer parti de l'état chat de Schrödinger dans une expérience d'horloge? . . . . .                                                                                                            | 654        |
| 5.6.4    | Effet des pertes de particules . . . . .                                                                                                                                                              | 656        |
| 5.6.4.1  | Fidélité au chat de Schrödinger . . . . .                                                                                                                                                             | 657        |
| 5.6.4.2  | Résurgence du spin moyen . . . . .                                                                                                                                                                    | 659        |
| 5.6.5    | Effet d'une température initiale non nulle : analyse multimode dans l'approximation de Bogolioubov . . . . .                                                                                          | 662        |
| 5.6.5.1  | Motivation . . . . .                                                                                                                                                                                  | 662        |
| 5.6.5.2  | Protocole multimode proposé . . . . .                                                                                                                                                                 | 662        |
| 5.6.5.3  | Évolution sur une réalisation de l'expérience . . . . .                                                                                                                                               | 663        |
| 5.6.5.4  | Fidélité au chat de Schrödinger spinoriel . . . . .                                                                                                                                                   | 667        |
| 5.6.5.5  | Contrainte sur la température dans une expérience . . . . .                                                                                                                                           | 671        |
| 5.6.5.6  | Une belle estimation-minoration . . . . .                                                                                                                                                             | 672        |
| 5.6.5.7  | Fidélité au chat de Schrödinger orbito-spinoriel . . . . .                                                                                                                                            | 675        |
| 5.6.5.8  | Réurgences du spin moyen à $T \neq 0$ . . . . .                                                                                                                                                       | 675        |
| <b>6</b> | <b>Cohérence temporelle d'un condensat dans un gaz isolé : brouillage de phase dû aux fluctuations des quantités conservées et diffusion de phase due aux interactions entre les quasi-particules</b> | <b>681</b> |
| 6.1      | Introduction, motivations, vue d'ensemble et mesurabilité . . . . .                                                                                                                                   | 681        |
| 6.1.1    | Un parallèle entre cohérence spatiale et cohérence temporelle : condensation dans l'espace-temps . . . . .                                                                                            | 681        |
| 6.1.2    | Objectif et vue d'ensemble; brouillage contre diffusion . . . . .                                                                                                                                     | 683        |
| 6.1.3    | Un problème peu étudié . . . . .                                                                                                                                                                      | 686        |
| 6.1.4    | Une fonction de cohérence $g_1(t)$ mesurable . . . . .                                                                                                                                                | 687        |
| 6.2      | Définition du problème, sa réduction à la dynamique de phase et les résultats centraux sur $g_1(t)$ . . . . .                                                                                         | 688        |
| 6.2.1    | L'état du système . . . . .                                                                                                                                                                           | 688        |
| 6.2.2    | Quelques simplifications : omission des fluctuations de $\hat{n}_\phi$ , approximation gaussienne . . . . .                                                                                           | 689        |
| 6.2.3    | Réduction à l'ensemble microcanonique : fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$ , variance du déphasage, coefficient de diffusion $D$ et temps de retard $t_0$ . . . . .                        | 691        |
| 6.2.4    | Fonction $g_1(t)$ dans l'ensemble statistique généralisé; étalement balistique de coefficient $A$ . . . . .                                                                                           | 694        |
| 6.2.5    | Résultats explicites sur $A$ , $D$ , $t_0$ et la variance du déphasage . . . . .                                                                                                                      | 696        |
| 6.2.5.1  | Résultats sur $A$ . . . . .                                                                                                                                                                           | 696        |
| 6.2.5.2  | Résultats sur $D$ et $t_0$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 698        |
| 6.2.6    | Conséquences sur l'étalement du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ . . . . .                                                                                                               | 701        |
| 6.3      | Calcul de la fonction de corrélation $C(t)$ de $d\hat{\theta}/dt$ . . . . .                                                                                                                           | 702        |
| 6.3.1    | Vue d'ensemble . . . . .                                                                                                                                                                              | 702        |
| 6.3.1.1  | Tout repose sur $C(t)$ . . . . .                                                                                                                                                                      | 702        |

|         |                                                                                                                                             |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.3.1.2 | Tout se ramène au microcanonique . . . . .                                                                                                  | 704 |
| 6.3.1.3 | Une décorrélation évidente... mais fausse! . . . . .                                                                                        | 705 |
| 6.3.2   | Dans l'ensemble microcanonique par équations cinétiques                                                                                     | 706 |
| 6.3.2.1 | Position du problème . . . . .                                                                                                              | 706 |
| 6.3.2.2 | Les équations cinétiques . . . . .                                                                                                          | 708 |
| 6.3.2.3 | Leur linéarisation, leur solution stationnaire . . .                                                                                        | 709 |
| 6.3.2.4 | L'expression formelle de $C_{mc}(\tau)$ . . . . .                                                                                           | 711 |
| 6.3.2.5 | Dans le sous-espace des fluctuations de moment<br>cinétique nul . . . . .                                                                   | 717 |
| 6.3.2.6 | Dépendance en temps de $C_{mc}$ . . . . .                                                                                                   | 718 |
| 6.3.2.7 | Complément : comportement de $C_{mc}(\tau)$ lorsque<br>$\tau \rightarrow +\infty$ . . . . .                                                 | 720 |
| 6.3.3   | Dans un ensemble statistique généralisé à $N$ fixé . . . . .                                                                                | 723 |
| 6.3.3.1 | Ce qui ressemble au cas microcanonique . . . . .                                                                                            | 723 |
| 6.3.3.2 | Ce qui diffère du cas microcanonique . . . . .                                                                                              | 724 |
| 6.3.4   | La valeur de $C(+\infty)$ : ergodicité quantique contre équation<br>pilote markovienne . . . . .                                            | 727 |
| 6.3.4.1 | Par ergodicité quantique c'est-à-dire microcano-<br>nicité des états propres . . . . .                                                      | 727 |
| 6.3.4.2 | Échec de l'approximation de Bogolioubov sur les<br>états propres . . . . .                                                                  | 729 |
| 6.3.4.3 | Échec de l'équation pilote markovienne . . . . .                                                                                            | 731 |
| 6.4     | Études complémentaires et vérificatoires de la fonction $g_1(t)$ dans<br>l'ensemble microcanonique . . . . .                                | 733 |
| 6.4.1   | Simulations numériques de champ classique . . . . .                                                                                         | 734 |
| 6.4.2   | Méthode de la résolvante . . . . .                                                                                                          | 736 |
| 6.4.2.1 | Position du problème . . . . .                                                                                                              | 736 |
| 6.4.2.2 | Lien de $g_{\theta,\lambda}(t)$ avec une amplitude de probabilité<br>de présence dans $ \psi_\lambda\rangle$ . . . . .                      | 737 |
| 6.4.2.3 | Un raisonnement simple par règle d'or de Fermi .                                                                                            | 738 |
| 6.4.2.4 | Au-delà de la règle d'or de Fermi : la méthode de<br>la résolvante . . . . .                                                                | 741 |
| 6.4.2.5 | La diffusion de phase résulte de l'existence d'un<br>pôle . . . . .                                                                         | 745 |
| 6.4.3   | Complément : égalité des coefficients de diffusion issus de<br>la règle d'or et de la résolvante aux temps extensivement<br>longs . . . . . | 745 |

## 7 Une formulation grand-canonique de la méthode de Bogolioubov et calcul de l'énergie de l'état fondamental à l'ordre de Wu 747

|     |                                                                  |     |
|-----|------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 | Introduction, motivation et avantages grand-canoniques . . . . . | 747 |
| 7.2 | Hamiltonien modèle et méthode de développement . . . . .         | 750 |

|         |                                                                                                                                                           |     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.2.1   | L'hamiltonien grand-canonique du modèle sur réseau . . .                                                                                                  | 750 |
| 7.2.2   | Élimination du mode du condensat . . . . .                                                                                                                | 751 |
| 7.2.2.1 | Une procédure bien rôdée... . . . . .                                                                                                                     | 751 |
| 7.2.2.2 | ... mais que vaut $N$ ? . . . . .                                                                                                                         | 752 |
| 7.3     | À l'ordre deux en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ : l'ordre de Bogolioubov . . . . .                                                                                | 754 |
| 7.3.1   | L'hamiltonien quadratique et sa forme réduite . . . . .                                                                                                   | 754 |
| 7.3.2   | L'équation d'état grand-canonique et la fraction non condensée . . . . .                                                                                  | 756 |
| 7.4     | À l'ordre quatre en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ : l'ordre de Wu pour le niveau d'énergie fondamental . . . . .                                                  | 760 |
| 7.4.1   | Motivation . . . . .                                                                                                                                      | 760 |
| 7.4.2   | Correction de portée effective de l'interaction à l'ordre de Bogolioubov . . . . .                                                                        | 761 |
| 7.4.3   | L'hamiltonien grand-canonique à l'ordre $(f_{\text{nc}}^{1/2})^4$ . . . . .                                                                               | 763 |
| 7.4.4   | Correction au grand potentiel de Bogolioubov à $T = 0$ . . .                                                                                              | 764 |
| 7.4.4.1 | Une application de la théorie des perturbations . .                                                                                                       | 764 |
| 7.4.4.2 | Passage à la limite continue $b/\xi \rightarrow 0$ . . . . .                                                                                              | 768 |
| 7.4.4.3 | Introduction de l'hypervolume de diffusion à trois corps . . . . .                                                                                        | 769 |
| 7.4.4.4 | Résultat final à l'ordre $f_{\text{nc}}^2$ . . . . .                                                                                                      | 772 |
| 7.4.4.5 | Discussion critique du résultat . . . . .                                                                                                                 | 773 |
| 7.4.5   | Complément I : Correction $\Omega^{(4)}(\mu)$ au grand potentiel de Bogolioubov à la limite continue $b/\xi \rightarrow 0$ du modèle sur réseau . . . . . | 775 |
| 7.4.5.1 | Partie convergente $C_{\text{conv}}^{\Omega}$ , partie divergente $J_{\mathcal{V}}(\epsilon)$ .                                                           | 775 |
| 7.4.5.2 | Étude de $J_{\mathcal{V}}^{(1)}(\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$ . . . . .                                                                        | 777 |
| 7.4.5.3 | Étude de $J_{\mathcal{V}}^{(2)}(\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$ . . . . .                                                                        | 779 |
| 7.4.5.4 | Conclusion sur $\Omega^{(4)}(\mu)$ . . . . .                                                                                                              | 782 |
| 7.4.6   | Complément II : Hypervolume de diffusion à trois corps $D$ du modèle sur réseau dans le régime de Born . . . . .                                          | 782 |
| 7.4.6.1 | L'hamiltonien modèle . . . . .                                                                                                                            | 783 |
| 7.4.6.2 | Forme de l'état de diffusion : seule fonction inconnue $f(\mathbf{r})$ . . . . .                                                                          | 783 |
| 7.4.6.3 | Une équation fermée sur $\hat{f}(\mathbf{k})$ . . . . .                                                                                                   | 785 |
| 7.4.6.4 | Développement de Born de la partie régulière $\phi(\mathbf{k})$ de $\hat{f}(\mathbf{k})$ . . . . .                                                        | 786 |
| 7.4.6.5 | Le résultat cherché . . . . .                                                                                                                             | 789 |
| 7.4.7   | Appendice au complément II de la section 7.4.6 . . . . .                                                                                                  | 789 |
| 7.4.7.1 | Développement de $A(\mathbf{k}_1)$ . . . . .                                                                                                              | 789 |
| 7.4.7.2 | Développement de $B(\mathbf{k}_1)$ . . . . .                                                                                                              | 790 |
| 7.4.7.3 | Développement de $J(\mathbf{k}_1)$ . . . . .                                                                                                              | 790 |
| 7.4.7.4 | Développement de $K(\mathbf{k}_1)$ . . . . .                                                                                                              | 792 |

|          |                                                                                                                                                          |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>8</b> | <b>Cas de la dimensionalité réduite : étude des quasi-condensats par la méthode de Bogolioubov en représentation phase-module</b>                        | <b>795</b> |
| 8.1      | Brève présentation et vue d'ensemble . . . . .                                                                                                           | 795        |
| 8.1.1    | Plus qu'un pâle reflet des condensats, les quasi-condensats                                                                                              | 795        |
| 8.1.2    | Quel angle d'attaque théorique? . . . . .                                                                                                                | 796        |
| 8.1.3    | En prise directe sur les expériences . . . . .                                                                                                           | 797        |
| 8.2      | Position du problème et régime considéré . . . . .                                                                                                       | 799        |
| 8.2.1    | À l'équilibre thermique grand-canonique . . . . .                                                                                                        | 799        |
| 8.2.2    | Les quasi-condensats en six conditions . . . . .                                                                                                         | 800        |
| 8.3      | Défrichage de la dimensionalité réduite avec la méthode de Bogolioubov ordinaire . . . . .                                                               | 802        |
| 8.3.1    | La densité non condensée . . . . .                                                                                                                       | 803        |
| 8.3.1.1  | Discussion selon la dimensionalité . . . . .                                                                                                             | 804        |
| 8.3.1.2  | À propos du tableau 8.1 . . . . .                                                                                                                        | 805        |
| 8.3.1.3  | Moralité sur la longueur de cohérence . . . . .                                                                                                          | 806        |
| 8.3.2    | La fonction de distribution de paires . . . . .                                                                                                          | 806        |
| 8.3.2.1  | Contribution quantique, contribution thermique .                                                                                                         | 807        |
| 8.3.2.2  | Moralité sur les fluctuations de densité . . . . .                                                                                                       | 808        |
| 8.3.3    | En conclusion du défrichage . . . . .                                                                                                                    | 809        |
| 8.4      | Construction de l'hamiltonien modèle . . . . .                                                                                                           | 809        |
| 8.4.1    | Longueur de diffusion et matrice $T$ à basse énergie en dimension quelconque . . . . .                                                                   | 809        |
| 8.4.1.1  | Motivation et définition opérationnelle . . . . .                                                                                                        | 809        |
| 8.4.1.2  | Modèle de portée nulle à basse énergie . . . . .                                                                                                         | 811        |
| 8.4.1.3  | Quelques particularités de la dimension un . . . .                                                                                                       | 814        |
| 8.4.2    | Modèle sur réseau : pas, constante de couplage et hamiltonien . . . . .                                                                                  | 816        |
| 8.4.2.1  | Le modèle . . . . .                                                                                                                                      | 816        |
| 8.4.2.2  | La constante de couplage nue $g_0$ via la matrice $T$ .                                                                                                  | 817        |
| 8.4.2.3  | Constante $g_0$ , longueur de diffusion et portée effective à 3D . . . . .                                                                               | 819        |
| 8.4.2.4  | Constante $g_0$ , longueur de diffusion et portée effective à 2D . . . . .                                                                               | 820        |
| 8.4.2.5  | Constante $g_0$ , longueur de diffusion et portée effective à 1D . . . . .                                                                               | 822        |
| 8.4.2.6  | L'hamiltonien en seconde quantification . . . . .                                                                                                        | 823        |
| 8.4.2.7  | Comment choisir le pas du réseau . . . . .                                                                                                               | 825        |
| 8.5      | Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov phase-module . . .                                                                                            | 826        |
| 8.5.1    | Passage en représentation phase-module et idée de la méthode . . . . .                                                                                   | 826        |
| 8.5.2    | Développement de l'hamiltonien $\hat{H}_{GC}$ ordre par ordre en $\delta\hat{\rho}/\rho \approx b \mathbf{grad}\hat{\theta}  \approx \epsilon$ . . . . . | 829        |

|         |                                                                                                                                                       |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.5.2.1 | Ordre 0 en $\epsilon$ . . . . .                                                                                                                       | 830 |
| 8.5.2.2 | Ordre 1 en $\epsilon$ . . . . .                                                                                                                       | 831 |
| 8.5.2.3 | Ordre 2 en $\epsilon$ . . . . .                                                                                                                       | 831 |
| 8.5.2.4 | Ordre 3 en $\epsilon$ . . . . .                                                                                                                       | 832 |
| 8.5.3   | Résolution itérative jusqu'à l'ordre $\epsilon^2$ et diagonalisation de $\hat{H}_2$ . . . . .                                                         | 833 |
| 8.5.3.1 | Ordre $\epsilon^0$ : fonction d'onde macroscopique et équation de Schrödinger non linéaire . . . . .                                                  | 833 |
| 8.5.3.2 | Ordre $\epsilon^1$ : rien . . . . .                                                                                                                   | 834 |
| 8.5.3.3 | Ordre $\epsilon^2$ : champs $\hat{B}(\mathbf{r})$ et $\hat{\Lambda}_{\text{QC}}(\mathbf{r})$ , variables collectives $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ . . . . . | 835 |
| 8.5.3.4 | Ordre $\epsilon^2$ : transformation de Bogolioubov, développement modal, spectre d'excitation, interprétation de $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ . . . . .     | 837 |
| 8.5.3.5 | En conclusion . . . . .                                                                                                                               | 841 |
| 8.6     | Applications de la théorie des quasi-condensats . . . . .                                                                                             | 841 |
| 8.6.1   | Le grand potentiel $\Omega$ . . . . .                                                                                                                 | 841 |
| 8.6.2   | Densité moyenne et équation d'état du gaz . . . . .                                                                                                   | 844 |
| 8.6.2.1 | De la nécessité d'inclure une correction cubique . . . . .                                                                                            | 844 |
| 8.6.2.2 | Calcul direct de $\langle \delta \hat{\rho} \rangle_3$ . . . . .                                                                                      | 845 |
| 8.6.2.3 | Une autre méthode, plus belle . . . . .                                                                                                               | 847 |
| 8.6.2.4 | Une troisième voie, plus directe . . . . .                                                                                                            | 848 |
| 8.6.2.5 | Équation d'état : les résultats, leur comportement à haute et à basse température . . . . .                                                           | 848 |
| 8.6.2.6 | Approximation de Thomas-Fermi à 2D . . . . .                                                                                                          | 851 |
| 8.6.3   | Fonction de distribution de paires $g_2$ : expression formelle à l'ordre $\epsilon^2$ . . . . .                                                       | 851 |
| 8.6.3.1 | En termes du champ $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ . . . . .                                                                                                 | 852 |
| 8.6.3.2 | Transformations habiles et résultat . . . . .                                                                                                         | 852 |
| 8.6.3.3 | Quelle variance de $N$ ? . . . . .                                                                                                                    | 853 |
| 8.6.3.4 | Lien avec la théorie de Bogolioubov ordinaire . . . . .                                                                                               | 854 |
| 8.6.4   | Fonction de cohérence du premier ordre $g_1$ : expression formelle à l'ordre $\epsilon^2$ . . . . .                                                   | 854 |
| 8.6.4.1 | En termes des champs $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ et $\hat{\theta}(\mathbf{r})$ . . . . .                                                                 | 855 |
| 8.6.4.2 | Dans l'état thermique de $\hat{H}_2$ . . . . .                                                                                                        | 855 |
| 8.6.4.3 | Correction due à $\hat{H}_3$ . . . . .                                                                                                                | 856 |
| 8.6.4.4 | Synthèse et forme provisoire . . . . .                                                                                                                | 859 |
| 8.6.4.5 | Un facteur $1/\rho_0$ embarrassant; forme finale . . . . .                                                                                            | 861 |
| 8.6.4.6 | Vue d'ensemble des résultats; comportement à grande distance . . . . .                                                                                | 862 |
| 8.6.4.7 | Formulaire de Wick . . . . .                                                                                                                          | 865 |

|         |                                                                                                                                                                |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.6.5   | À quelle condition les fluctuations de densité et le gradient de phase sont-ils faibles? . . . . .                                                             | 866 |
| 8.6.5.1 | Les fluctuations de densité . . . . .                                                                                                                          | 867 |
| 8.6.5.2 | Le gradient de phase . . . . .                                                                                                                                 | 867 |
| 8.7     | Analyse détaillée des fonctions de corrélation $g_1$ et $g_2$ . . . . .                                                                                        | 868 |
| 8.7.1   | À la limite thermodynamique pour un espace continu . . . . .                                                                                                   | 868 |
| 8.7.2   | Étude à grande distance à $T = 0$ . . . . .                                                                                                                    | 870 |
| 8.7.2.1 | Obtention des développements asymptotiques . . . . .                                                                                                           | 871 |
| 8.7.2.2 | Une application physique simple : fluctuations du nombre de particules dans une boule . . . . .                                                                | 875 |
| 8.7.3   | Étude à grande distance à $T > 0$ . . . . .                                                                                                                    | 877 |
| 8.7.3.1 | Cas de $g_1^{\text{Bog}}(\mathbf{r})$ . . . . .                                                                                                                | 877 |
| 8.7.3.2 | Cas de $g_2^{\text{QC}}(\mathbf{r})$ . . . . .                                                                                                                 | 882 |
| 8.7.4   | Étude à courte distance . . . . .                                                                                                                              | 887 |
| 8.7.4.1 | Cas de $g_2^{\text{QC}}(\mathbf{r})$ ; coefficient de contact $\mathcal{C}$ et théorème de Hellmann-Feynman . . . . .                                          | 887 |
| 8.7.4.2 | Cas de $g_1^{\text{Bog}}(\mathbf{r})$ ; distribution en impulsion; lien avec $\mathcal{C}$ et avec l'énergie moyenne . . . . .                                 | 893 |
| 8.8     | Densité normale, transition BKT, superfluidité locale ou globale . . . . .                                                                                     | 898 |
| 8.8.1   | La densité normale . . . . .                                                                                                                                   | 898 |
| 8.8.1.1 | Définition . . . . .                                                                                                                                           | 898 |
| 8.8.1.2 | Expression à l'ordre de Bogolioubov . . . . .                                                                                                                  | 899 |
| 8.8.1.3 | Comportement aux limites en température . . . . .                                                                                                              | 900 |
| 8.8.1.4 | Une densité normale locale . . . . .                                                                                                                           | 901 |
| 8.8.2   | La transition BKT . . . . .                                                                                                                                    | 902 |
| 8.8.2.1 | Présentation sommaire : discontinuité universelle de $\rho_s(T)$ , tourbillons quantiques et énergie d'activation . . . . .                                    | 902 |
| 8.8.2.2 | Température de transition à l'ordre de Bogolioubov : une estimation grossière? . . . . .                                                                       | 904 |
| 8.8.3   | Quasi-condensats en mouvement et superfluidité globale . . . . .                                                                                               | 906 |
| 8.8.3.1 | Du cas immobile au cas en mouvement . . . . .                                                                                                                  | 906 |
| 8.8.3.2 | Probabilité d'un mouvement d'ensemble spontané et $\rho_n$ . . . . .                                                                                           | 909 |
| 8.8.3.3 | De nouvelles densités normales : globale $\rho_n^{\text{glob}}$ , effective $\rho_n^{\text{eff}}(\nu)$ et différentielle $\rho_n^{\text{diff}}(\nu)$ . . . . . | 910 |
| 8.8.3.4 | Expression utile de $\rho_n^{\text{glob}}$ et discussion physique . . . . .                                                                                    | 912 |
| 8.8.3.5 | Voir les mouvements d'ensemble . . . . .                                                                                                                       | 915 |
| 8.9     | Énergie de l'état fondamental à 2D au-delà de Bogolioubov-Popov . . . . .                                                                                      | 916 |
| 8.9.1   | Une simple application du chapitre 7 . . . . .                                                                                                                 | 916 |
| 8.9.2   | Forme finale du résultat et comparaison au numérique . . . . .                                                                                                 | 918 |

|                              |                                                                                                                                                         |            |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.9.3                        | Application à la limite de Thomas-Fermi . . . . .                                                                                                       | 920        |
| 8.9.4                        | Effet de la portée de l'interaction . . . . .                                                                                                           | 920        |
| 8.10                         | Complément : apparition de la densité superfluide $\rho_s$ dans le com-<br>portement asymptotique de $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à $T > 0$ . . . . . | 921        |
| 8.10.1                       | Position du problème et motivation . . . . .                                                                                                            | 921        |
| 8.10.2                       | Comment procéder . . . . .                                                                                                                              | 923        |
| 8.10.2.1                     | Logarithme, fonction génératrice et cumulants . . . . .                                                                                                 | 923        |
| 8.10.2.2                     | Des remarques simplificatrices . . . . .                                                                                                                | 924        |
| 8.10.2.3                     | Coefficient $B$ dans $\phi(\mathbf{q})$ et forme du résultat . . . . .                                                                                  | 926        |
| 8.10.3                       | Un calcul négligeant les fluctuations de densité dans la fonc-<br>tion $g_1$ . . . . .                                                                  | 927        |
| 8.10.3.1                     | Une motivation physique claire, une fonction $\phi_\theta(\mathbf{q})$<br>simple . . . . .                                                              | 927        |
| 8.10.3.2                     | Calcul au second ordre en $\hat{H}_3$ . . . . .                                                                                                         | 929        |
| 8.10.3.3                     | Calcul au premier ordre en $\hat{H}_4$ . . . . .                                                                                                        | 932        |
| 8.10.3.4                     | Synthèse et coefficient $B_\theta$ . . . . .                                                                                                            | 938        |
| 8.10.4                       | Calcul asymptotique sur la forme complète de $g_1$ . . . . .                                                                                            | 938        |
| 8.10.4.1                     | Expression formelle de $\ln(g_1/\rho)$ à l'ordre $\epsilon^4$ . . . . .                                                                                 | 938        |
| 8.10.4.2                     | Calcul des moyennes dans $\ln(g_1/\rho)$ . . . . .                                                                                                      | 940        |
| 8.10.4.3                     | Conclusion . . . . .                                                                                                                                    | 945        |
| <b>Principales notations</b> |                                                                                                                                                         | <b>947</b> |
| <b>Index</b>                 |                                                                                                                                                         | <b>953</b> |
| <b>Bibliographie</b>         |                                                                                                                                                         | <b>965</b> |