

Une impureté dans un gaz parfait d'atomes froids :

un problème multiforme (avec M. Antezza, G. Mora, S. Fucini, G. Puppe)

Avant propos : 3 défis sur quatre générations

- 1) ne pas tomber dans les excès de la proposition
- 2) ne pas tomber dans les excès du calcul numérique / du calcul formel

- 3) continuer à penser dans sa langue

• écrire / publier dans sa langue :

arXiv est multilingue (français + anglais)

CRAS, Revue canadienne de physique (RCP)

• wikipedia dans sa langue

0. Vue d'ensemble

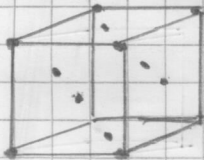
0.1 Le problème

- * une impureté mobile A, N atomes B discernables de A
- * pas d'interaction BB, mais interaction AB
- * comment A va-t-elle se propager (ou rester localisée)? (à 3D)

0.2 Cas traités

(1) A = photon
arrangement périodique d'atomes B : fixes

ex. réseau cubique à faces centrées
(Brenn : 1 at / maille)



théorème de Bloch : quasi-moment

d'onde $\vec{q}$ (état étendu)

$$\vec{D}_i = \vec{D} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}_i}$$

$\vec{q} \cdot \vec{R}_i \Rightarrow$ structure de bande $\omega_{\vec{q}}$

Bande interdite (unidirectionnelle)? pas de propagation si $\omega \in$ bande interdite (ord. évanescente)

(2) A = atome
ensemble désordonné d'atomes B fixes ($N \rightarrow \infty$)
à quelles énergies localisation d'Anderson? [avec réseaux d'atomes choisis aléatoirement]
états propres localisés ($\int |\psi|^2 < \infty$)

(3) A = atome
N = 3 atomes fermioniques B molecules (in état de spin)

interaction "maximale" (résonante) entre A et B, à courte portée



$$\sigma_{\text{eff}}(k_{AB}) = \frac{4\pi}{k_{AB}^2} \xrightarrow{k_{AB} \rightarrow 0} \infty$$

Rappel: N=1: cas à longue portée (e^- ↑, atome d'hydrogène) → nombre infini d'états liés
($\sqrt{1/r} \propto 1/r$)
cas à courte portée: nombre fini d'états liés

N=2: à courte portée, nombre infini d'états liés si $\frac{m_B}{m_A} > 13,607$
(Efimov, 1973)

N=3 ?

(4) A = atome
'mer de Fermi' (T=0) d'atomes B (N → ∞)

interaction AB faible

relation de dispersion de A?

$$\Delta E(k_A) = \frac{\hbar^2 k_A^2}{2m_A} \xrightarrow{?}$$

généralisation par manque de temps

0.3 du côté des expériences

Toutes sont en principe réalisables
aucune réalisée pour le moment

0.4 du côté de la littérature scientifique

(1) 1996: cfc ⇒ bande interdite
2006: non, c'est faux

Δ objets étendus (sphères
diélectriques): bande
interdite pour le diamant
(CFC + translation de $\frac{1}{4}$ diagonale)

(2) localisation étendue
étude détaillée pas faite

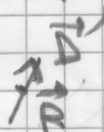
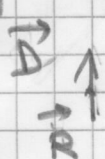
(3) ? effet Efimov à 4-corps impossible?

(4) surtout $k_A \rightarrow 0$ connu: $\Delta E \approx \underbrace{\Delta E(0)}_{\text{CFC}} + \frac{\hbar^2 k_A^2}{2m_A} + O(k_A^4)$

1. Bande interdite pour la lumière dans un réseau atomique

1.1 Le problème classique

dipôle électrique classique couplé, régime permanent à la pulsation ω



$$D_i(\vec{R}) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \sum_{\vec{R}'} \sum_{j=x,y,z} g_{ij}(\vec{R}-\vec{R}') D'_j(\vec{R}')$$

$i = x, y, z$

polarisabilité atomique

composant i du champ créé par D'

($\propto e^{-ik|\vec{R}-\vec{R}'|}$)

$$\alpha(\omega) = \frac{-d^2}{\hbar \epsilon_0 (\omega - \omega_0 + i\Gamma/2)}$$

$$g_{ij}(\vec{R}) \propto \underbrace{\left[\left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \delta_{ij} + \partial_{R_i} \partial_{R_j} \right]}_{\text{assure la transversalité}} \underbrace{\frac{e^{-i\omega_0 R}}{R}}_{\text{champ scalaire}} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{i\omega_0 R}}{R}$$

1.2 Le théorème de Bloch

$$\vec{D} = \sum_{\mu} \vec{D}_{\mu} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}}$$

(μ = indice du sous-réseau)

Comment calculer la somme infinie?

ne converge pas absolument

→ Formule Somme de Poisson:

$$\sum_{\vec{R} \in \text{réseau}} f(\vec{R}) = \frac{1}{V_{\text{maille}}} \sum_{\vec{R} \in \text{réseau réciproque}} \hat{f}(\vec{R})$$

mais $g_{ij}(\vec{R}) = \infty \dots$

→ un effet physique régularise: fluctuations gaussiennes des positions des atomes (écart type b)

$$g_{ij}(\vec{R}-\vec{R}') \rightarrow \langle g_{ij}(\vec{R}+\vec{\mu}-\vec{R}'-\vec{\mu}') \rangle_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'} = \bar{g}_{ij}(\vec{R}-\vec{R}')$$

$$\omega_{\vec{q}} - \omega_0 \approx e^{-\left(\frac{\omega_0 b}{c}\right)^2} \left(\frac{\omega_0}{c} - \omega_0 \right) - i \frac{\Gamma}{2} \left(1 - e^{-\left(\frac{\omega_0 b}{c}\right)^2} \right)$$

convolution avec une gaussienne

1.3 Résultats

* diagramme de pas d (CFC + translation $\frac{1}{4}$ diagonale)
 bande interdite à $|\omega - \omega_0| \approx \Gamma$ si $\frac{\omega_0}{c} d < 5,14$

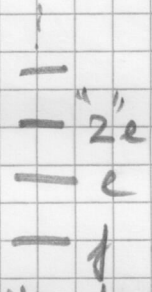
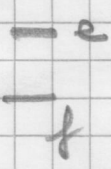
* figures: - densité d'états $\rho(\omega)$
 - largeur de la bande interdite
 à faible d , divergence en $\frac{1}{\sqrt{}}$ or $\frac{1}{d^3}$
 à grand d , fermeture en le point L
 $(\vec{q} = \frac{\pi}{a}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z))$

1.4 Justification quantique

* avec une transition $i_f = 0 \rightarrow i_e = 1$



* dipole quantique non linéaire



modèle classique
 (oscillateur harmonique)

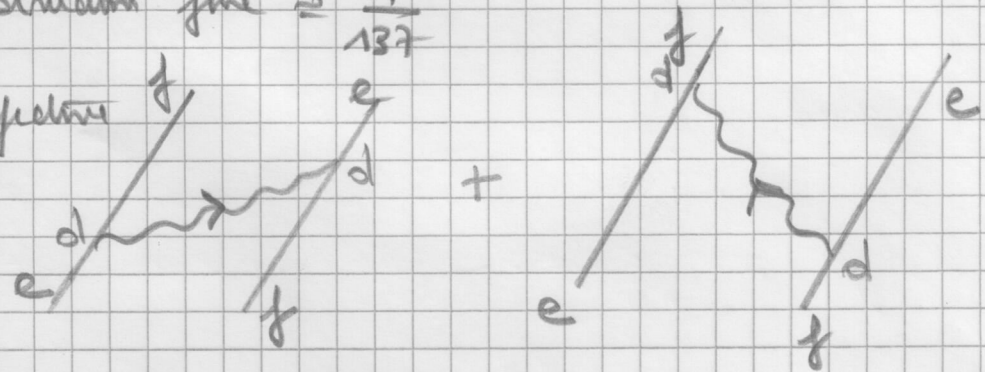
OK si un photon + couple faibles $\Gamma \ll \omega_0$ $\Gamma \propto d^2$
 $\propto d^3$

$\hookrightarrow \Gamma$ donné par $e \frac{\mu_{if}}{d} e$

$\alpha =$ constante structure fine $\approx \frac{1}{137}$

$\approx 10^8 \text{ s}^{-1}$ $\approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$

$\hookrightarrow$ interaction effective
 donnée par

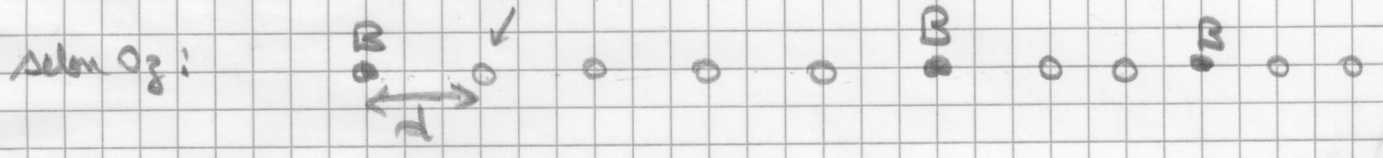


et cetera, accord avec modèle classique

2. Localisation d'Anderson d'ondes de matière

2.1 Modèle

- * atome B aux nœuds d'un réseau cubique avec probabilité d'occu-
pation $\uparrow \ll 1$



- * interaction A-B remplacé par une condition au contact (limite de portée nulle)
- $$\Psi_A(\vec{r}_A) = D(\vec{r}_B) \left[\frac{1}{r_{AB}} - \frac{1}{a} + O(r_{AB}) \right]$$
- $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$

état de diffusion à énergie nulle
(diffusion sans l'onde $\rho + \Delta \Psi_A = 0$ en dehors

du potentiel d'interaction)

section efficace de diffusion A-B à énergie nulle: $\sigma_{AB}(0) = 4\pi a^2$

2.2 Condition sur les états stationnaires

Il existe des D non nuls tels que:

$$D(\vec{r}_B) = \frac{-1}{ik_A + \frac{1}{a}} \sum_{\vec{r}'_B \neq \vec{r}_B} \underbrace{\frac{e^{i k_A |\vec{r}'_B - \vec{r}_B|}}{|\vec{r}_B - \vec{r}'_B|}}_{\text{champ scalaire}} D(\vec{r}'_B)$$

avec énergie $E = \frac{\hbar^2 k_A^2}{2m_A}$

diffraction / lumière: on peut avoir $E < 0 \Rightarrow k_A \in i\mathbb{R}^{++}$

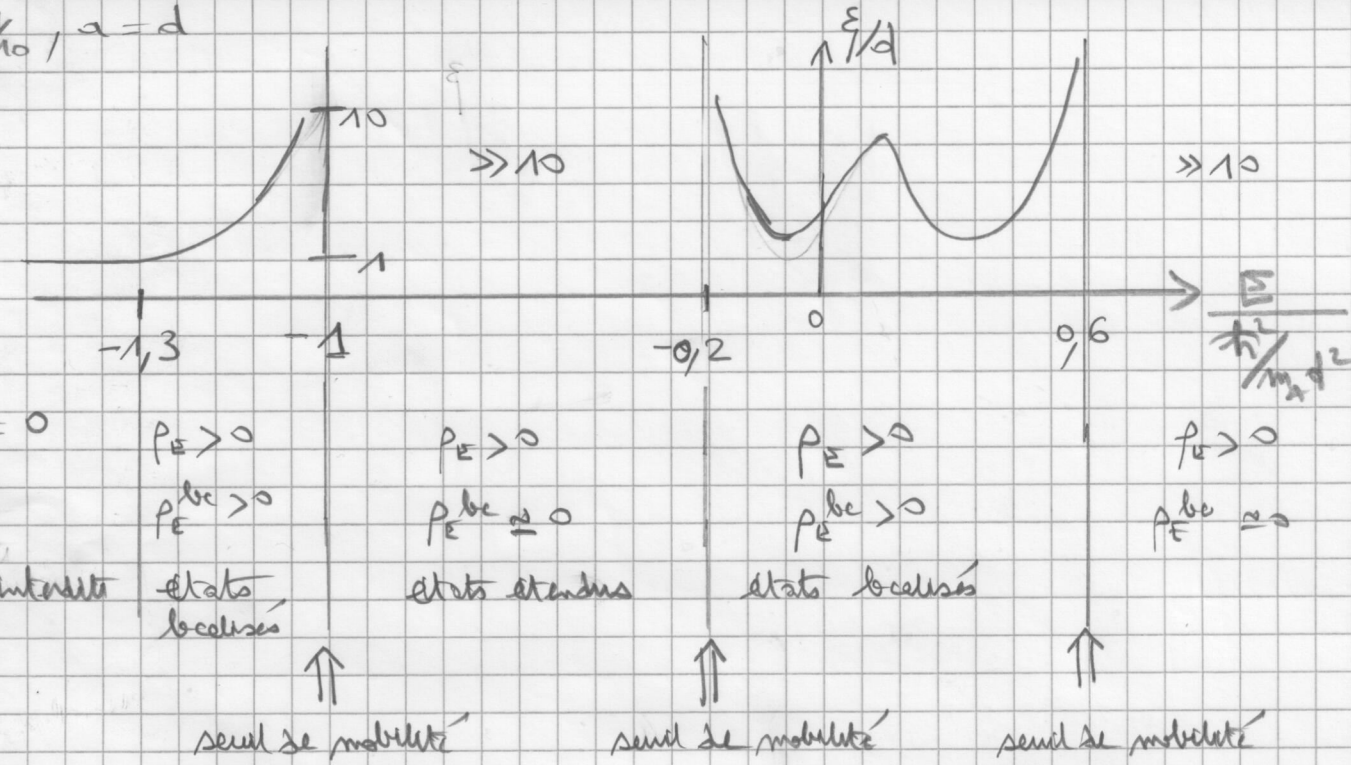
Analyse spectrale:

spectre continu (états "étendus" = modes propagatifs, $\int |\Psi_A|^2 = \infty$)
 + spectre discret (états "localisés", $\int |\Psi_A|^2 < \infty$, $\Psi_A \sim O(e^{-r/\xi_l})$)
 ($\xi_l = l_0$ de localisation)

2.3 Résultats numériques

- * localisation absente si $a < 0$ ou $a \rightarrow +\infty$
 optimale si $a \approx \frac{1}{2}$ distance moyenne entre atomes B
- * les états "liés" ($E < 0$) ne sont pas nécessairement localisés
 ($0 < a < 1$: $\exists$ dimen AB qui peut se déplacer par effet tunnel)

* $\mu = \frac{1}{\mu_0}$, $a = d$

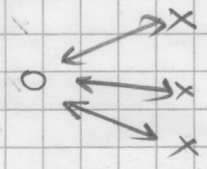


Originalité: trois seuils de mobilité! (deux attendus?)

3. L'effet Efimov à 4 corps

3.1 Modèle

A + N fermions B (même état de spin), tous mobiles



$\leftrightarrow$ = interaction résonnante (maximale) ($1/a = 0$) et de portée nulle

Conditions au contact:

$$\Psi(\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}'_B, \vec{r}''_B) \xrightarrow{\vec{r}_A - \vec{r}_B \rightarrow 0} \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|} D(\vec{r}_{AB}, \vec{r}'_B, \vec{r}''_B) + O(|\vec{r}_A - \vec{r}_B|)$$

dans l'équation de Schrödinger: (contraintes mesurées $\vec{r}_{AB}$ de A et B fixes)

$$E\Psi = H_{\text{cin}} \Psi$$

seulement l'opérateur énergie cinétique!

3.2 Explorer l'importance d'échelle

* $\Psi(\lambda \vec{r}_A, \lambda \vec{r}_B, \lambda \vec{r}'_B, \lambda \vec{r}''_B)$ obéit aux conditions au contact $\forall \lambda > 0$.

* solution à $E = 0$ ($\int |\Psi|^2 = \infty$): en coordonnées hypersphériques

variables $(R, \vec{r})$: $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = R^{-5/2} \phi(\vec{r})$

$\downarrow$
 pure commodité

Alors ϕ vecteur propre du Laplacien sur l'hypersphère :

$$[-\Delta_{\mathbb{S}^2} + 5^2] \phi_0(\vec{r}) = \Lambda^2 \phi_0(\vec{r})$$

$\hookrightarrow \Lambda^2 \in$ ensemble discret (réel) [à calculer numériquement]

* à E quelconque : ansatz factorisé (séparabilité en coordonnées hypersphériques)

$$\psi(\vec{R}, \vec{r}) = F(R) R^{-5} \phi_0(\vec{r})$$

$\uparrow$ le même qu'à énergie nulle

$$E F(R) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbb{R}^3} F + \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2m R^2} F$$

$\uparrow$ provient de $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ (origine cinétique)

3.3 Discussion du résultat

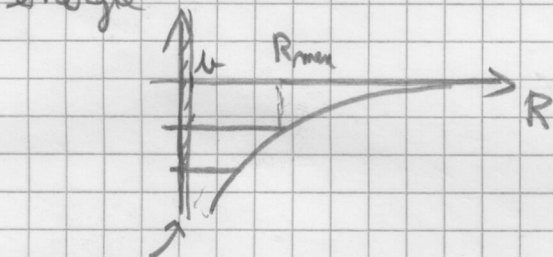
* si $\Lambda^2 \geq 0$: pas d'état lié ou (si résonance à 4 corps) un état lié

* si $\Lambda^2 < 0$: nombre infini d'états liés (longue portée du potentiel en $1/R^2$)

argument semi-classique :

$\hookrightarrow$ à chaque état lié, l'action classique $\int_0^{R_{\max}} p(R) dR$

énergie



seuil des rayons

$$E = \frac{p^2(R)}{2m} + \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2m R^2}$$

$\hookrightarrow$ nbre $\propto$ d'états liés si à $E=0$:

$$\int_0^{R_{\max}} dR p(R) = +\infty$$

$$p_0(R) = \frac{\hbar |\Lambda|}{R}$$

$\hookrightarrow$ Bohr - Sommerfeld à $E < 0$:

$$\oint p(R) dR \simeq n 2\pi \hbar$$

$$n \gg 1$$

$$R_{\max} \propto e^{\pi \hbar |\Lambda|}$$

$$E_n \propto -\frac{\hbar^2}{m R^2} e^{-2\pi \hbar |\Lambda|}$$

effet éfimer comme à 3 corps

3.4 Valeur numérique

effet d'ajout à 4 corps pour

$$13,384 \leq \frac{m_B}{m_A} \leq 13,607$$

