T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

par Monsieur Marc Etienne BRACHET

Sujet de la thèse : **INTÉGRATION FONCTIONNELLE ET FORMALISME OPERATEUR POUR DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES GÉNÉRALISÉES.**

soutenue le	devant la Commission composée de :
Monsieur P. KREE	Président
Monsieur J.C. LE GUILLOU	examinateur
Monsieur J.C. HOUARD	examinateur
Monsieur G. RIDEAU	examinateur
Monsieur E. TIRAPEGUI	examinateur

pour Ed:
ME.

T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

par Monsieur Marc Etienne BRACHET

Sujet de la thèse : INTÉGRATION FONCTIONNELLE ET FORMALISME OPERATEUR POUR DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES GÉNÉRALISÉES.

soutenue le	devant la Commission composée de :
Monsieur P. KREE	Président
Monsieur J.C. LE GUILLOU	examinateur
Monsieur J.C. HOUARD	examinateur
Monsieur G. RIDEAU	examinateur
Monsieur E. TIRAPEGUI	examinateur

REMERCIEMENTS

Je remercie le Professeur P. KREE d'avoir bien voulu assurer la présidence de mon jury.

Je remercie également les autres membres du jury : le Professeur J.C. LE GUILLOU et Messieurs J.C HOUARD et G. RIDEAU.

Ce travail doit son existence à E. TIRAPEGUI qui en a assuré la direction, qu'il en soit ici remercié ; je lui exprime aussi ma gratitude pour ses encouragements constants et pour son énergie et son enthousiasme scientifique si communicatif.

Je remercie H. LESCHKE pour d'intéressantes discussions.

Je remercie enfin Myriam EL HEFNAOUI qui a si soigneusement dactylographié ce travail.

INTRODUCTION

Nous étudions ici les processus stochastiques non markoviens générés par des équations différentielles stochastiques généralisées de la forme

$$(\alpha = 1 \dots M)$$

(1) $$\dot{q}^\alpha(t) + A^\alpha(\vec{q}(t), m(t)) = \sigma^\alpha{}_\beta \, f^\beta(t)$$

Dans (1) $f^\alpha(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de corrélation $\{f(t), f(t')\} = \delta(t-t')$, et $\sigma^\alpha{}_\beta$ est une matrice constante.

Par ailleurs $m(t)$ est un processus stochastique markovien discret défini indépendamment et qui prend les valeurs discrètes $f(\nu)$, $\nu = 1 \dots N$; sa matrice de transition est M c'est à dire que la probabilité conditionnelle

$$P(m(t+s) = f(\nu) \mid m(t) = f(\mu))$$

est donnée par $\exp\{-sM\}_{\mu\nu}$.

Le processus $q^\alpha(t)$ défini par (1) est non markovien, néammoins le processus $(\vec{q}(t), m(t))$ est, lui, markovien et c'est cette observation qui nous permet d'introduire d'une façon simple un formalisme opérateur et un formalisme parallèle d'intégrale fonctionnelle pour traiter le problème.

Nous montrons comment on peut, dans les deux formalismes, donner des expressions explicites pour la densité de probabilité conditionnelle

$$P(\vec{q}\,', t'; \vec{q}, t) = \sum_{\mu\nu} W(\vec{q}\,', \nu, t'; \vec{q}, \mu, t)\, b(\mu)$$

où $W(\vec{q}\,', \nu, t' ; \vec{q}, \mu, t)$

est la densité de probabilité de transition du processus markovien $(\vec{q}(t), m(t))$ et $b(\mu)$ est la probabilité que $m(t) = f(\mu)$.

Nous obtenons aussi dans les deux formalismes des expressions pour les fonctions de corrélation et de réponse du processus $\vec{q}(t)$, et ceci pour les conditions initiales arbitraires au temps $t=t_0$. En particulier nous montrons que la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est donnée par une intégrale produit (une généralisation de l'intégrale fonctionnelle usuelle) qui est en principe calculable. Les développements perturbatifs de toutes ces expressions sont étudiées en détail et nous donnons des expressions explicites qui permettent de faire des calculs à l'ordre voulu. Ici c'est le formalisme de l'intégrale fonctionnelle qui nous permet d'arriver le plus rapidement aux résultats désirés.

Nous avons aussi voulu passer en revue, avec des applications non triviales, le formalisme fonctionnel dans le cas des équations stochastiques différentielles ordinaires (équation de Langevin) c'est à dire (1) sans l'intervention du processus $m(t)$. La raison étant que c'est ce formalisme, spécialement adapté au sujet, que nous avons généralisé pour traiter le cas de (1) et aussi qu'il nous a paru qu'on ne trouve pas dans la littérature sur le sujet des calculs détaillés pour des cas compliqués comme par exemple ceux des équations de Navier-Stockes (infinité de degrés de liberté), forcées par une agitation stochastique, que nous traitons complètement.

Ce programme est contenu dans le chapitre I, ainsi qu'un exposé sur le formalisme opérateur correspondant et sur les développements perturbatifs.

Les références que nous avons suivies sont [1 - 13].

Dans le chapitre II, nous étudions l'équation généralisée (1) et nous construisons un formalisme opérateur qui est l'analogue du formalisme utilisé pour traiter le spin en mécanique quantique.
Le formalisme fonctionnel est introduit et nous amène à l'intégrale produit.
Nous suivons ici notre travail [14].

Dans le chapitre III, nous nous débarassons de l'intégrale produit en éliminant les degrés de liberté discrets et en réduisant ici nos expressions à des intégrales fonctionnelles ordinaires. Ceci est fait explicitement pour un processus m(t) prenant deux valeurs en introduisant la technique d'intégration fonctionnelle sur des variables anticommutantes dûe à BEREZIN [15].
Cette puissante technique est utilisée couramment en théorie quantique des champs pour les champs des fermions et permet en principe de traiter le cas général. Nous utilisons ici notre travail [16].
Il faut remarquer que dans le cas d'un processus m(t) à deux valeurs l'utilisation des techniques plus conventionnelles de l'intégrale produit permet aussi d'arriver au résultat, ceci est illustré dans le chapitre V.

Dans le chapitre IV, nous avons appliqué les formalismes introduits au chapitre III à un modèle simple : un oscillateur harmonique dont la fréquence est un processus stochastique discret pouvant prendre deux valeurs et qui est sollicité par une force extérieure qui est un bruit blanc. Nous récupérons ainsi les résultats de BOURRET, FRISH et POUQUET [19] et de Van KAMPEN [20] et nous dérivons explicitement les équations couplées du modèle pour les fonctions de corrélation et de réponse.

Nous faisons aussi le calcul complet de la fonction de réponse en sommant à tout ordre la série de perturbation dans le but d'illustrer pratiquement cette importante méthode.

Dans le chapitre V, nous appliquons les techniques développées dans le chapitre II et III à un problème de physique du solide : l'effet JAHN-TELLER linéaire. Nous avons pu déterminer explicitement et à tout ordre l'expression de la fonction de partition du système à température finie et indiquer une méthode pour obtenir explicitement la série perturbative pour l'énergie du fondamental dont nous retrouvons le résultat connu au plus bas ordre.

Finalement dans des appendices, nous avons réuni quelques calculs supplémentaires utilisés dans le texte.

I REVUE DU FORMALISME FONCTIONNEL POUR LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

I.0 Introduction 0

I.1 Un degré de liberté : $\dot{q} + A(q) = f(t)$

I.1.1 Manipulations formelles 1

I.1.2 Formalisme opérateur associé 6

I.1.3 Problèmes de discrétisation 13

I.1.4 Fonctionnelle génératrice et théorie des perturbations 19

I.2 Infinité de degrés de liberté : Navier -Stokes

I.2.1 Processus gaussien avec contrainte 29

I.2.2 Formalisme fonctionnel pour les équations NS 32

I.2.3 Théorie de perturbation 38

I.2.4 Règles de Feynman 46

I.2.5 Power counting 50

II EXTENSION A L'EQUATION DE LANGEVIN MODIFIEE

II.1 L'équation de Langevin modifiée et l'équation de Fokker-Planck associée 56

II.2 Construction du formalisme opérateur 62

II.3 Théorie de perturbation dans le formalisme opérateur 73

II.4 Construction du formalisme fonctionnel et théorie de perturbation 87

III FORMALISME DES VARIABLES DE GRASSMAN

III.0 Introduction 98
III.1 La P-exponentielle et les variables de Grassman 99
III.2 Le P_1 -Produit et l'intégrale P-gaussienne 110
III.3 Application au calcul de la P-exponentielle 121
III.4 Réduction des P_1 -produits en P_2-produits 128

IV ILLUSTRATION SUR UN MODELE SOLUBLE

IV.1. Le modèle dans le formalisme opérateur 164
IV.2. Formulation probabiliste 178
IV.3. Sommation de la série de perturbation pour $\mathcal{S}'$ 183

V. THEORIE DE PERTURBATION POUR L'EFFET JAHN -TELLER

V.1. Fonction de partition pour un système de spin 1/2 207
V.2. Application à l'effet JAHN-TELLER linéaire 215

APPENDICES

A - ORDRE DES OPERATEURS ET THEOREME DE WICK GENERALISE 231

B - DEMONSTRATION DES FORMULES RELATIVES A L'INTEGRALE PRODUIT 238

C- INTRODUCTION DES VARIABLES DE GRASSMAN EN MECANIQUE QUANTIQUE 244

BIBLIOGRAPHIE 252

I.0. INTRODUCTION

Ces dernières années, à la suite de [4] les formulations des processus stochastiques en termes d'opérateurs ou d'intégrales fonctionnelles [13] en partant de l'équation de Fokker-Planck ont été construites.

Dans la première partie de ce chapitre, nous passons en revue la formulation dûe à B. Jouvet [1,2], voir aussi [7] pour le problème de discrétisation.

Cette formulation qui peut également s'appliquer à des équations déterministes est celle dont les notations sont les plus proches de celles de la théorie des champs. De ce point de vue, on peut considérer un processus stochastique comme une théorie des champs un peu exotique : l'Hamiltonien n'est pas Hermitien et le T-produit des champs doit se prendre entre deux états différents.

Cependant l'arrivée dans l'Hamiltonien de produits d'opérateurs ne commutant pas entre eux, entraîne à devoir tenir compte dans le formalisme fonctionnel associé, de la façon dont on discrétise les intégrales. Cette précaution prise, on obtient un formalisme parfaitement cohérent.

Dans la seconde partie, nous étendons le formalisme à une infinité de degrés de liberté et nous nous en servons pour dériver les règles de la théorie de perturbation associée aux équations de Navier-Stokes.

I. 1.1 MANIPULATIONS FORMELLES

Nous partons de l'équation différentielle non linéaire

(1) $$\dot{q} + A(q(t)) = f(t) \quad , \quad q(t_0) = Q_0 ,$$

où A est une fonction en général non linéaire et nous considérons pour l'instant f comme une fonction donnée (plus tard f sera un bruit blanc).

Cette équation a une solution avancée $q_f(t;Q_0)$ qui vérifie l'équation intégrale

(2) $$q_f(t;Q_0) = Q_0 + \int d\tau\, \theta(t-\tau)\,\theta(\tau-t_0)\,[f(\tau) - A(q_f(\tau;t_0))],$$

ou $\theta(t) = 1 \quad t > 0 \;,\; \theta(t) = 0 \quad t < 0$

$q_f(t;Q_0)$ est, bien sûr, une fonctionnelle de f.

Nous procédons maintenant à des manipulations formelles sur des intégrales fonctionnelles, les ambiguités se présentant doivent être résolues en discrétisant comme nous le verrons plus loin en détail.

On part de l'identité

(3) $$\int Dq(t)\,\delta[\dot q(t)+A(q(t))-f(t)]\Big|_{t_0}^{T}\,\delta(q(t_0)-Q_0)\,J(q(t)) = 1,$$

qui est la version fonctionnelle de la formule

(4) $$\int dx_1\cdots dx_n\,\delta^{(n)}(\vec F(x_1\cdots x_n))\,\det\left(\frac{\partial F_i(\vec x)}{\partial x_j}\right)=1 .$$

Le δ fonctionnel qui apparaît dans (3) est le produit de fonctions δ prises sur des points compris entre t_0 et T.

La formule (3) exprime simplement que le δ fonctionnel a un zéro qui est la solution $q_f(t;Q_0)$ avec la condition initiale $q_f(t_0,Q_0)=Q_0$; de sorte que nous pouvons écrire pour une fonctionnelle F quelconque de $q_f(t;Q_0)$

(5) $$F[q_f(t;Q_0)] = \int Dq(t)\,F[q(t)]\,\delta[\dot q(t)+A(q(t))-f(t)]\Big|_{t_0}^{T} \times \delta(q(t_0)-Q_0)\,J(q(t)),$$

où T est un temps plus grand que les temps intervenant dans F, et le Jacobien

$$J=\det\frac{\delta}{\delta q(t')}\,[\dot q(t)+A(q(t))-f(t)],$$

est calculable comme

(6) $$J=\det\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\det\left[\delta(t-t')+\theta(t-t')\,\theta(t'-t_0)\,\frac{\partial A(q(t'))}{\partial q(t')}\right].$$

Le second déterminant se calcule grâce à la formule

$$\det(1+B)=\exp\operatorname{tr}\operatorname{Log}(1+B),$$

et comme $\operatorname{tr}B^n=0 \quad n\geq 2$

(7) $$J=\det\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\exp\left[\theta(0)\int_{t_0}^{T}d\tau\,\frac{\partial A(q(\tau))}{\partial q(\tau)}\right].$$

Nous remplaçons J dans (5) et éliminons $\det\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ en divisant (5) par :

$$1=\int Dq\,\delta[\dot q(t)]\Big|_{t_0}^{T} J(q(t)),$$

car le Jacobien $J(q(t))=\det\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Nous discuterons plus loin la valeur de $0\leq\theta(0)\leq 1$ le δ fonctionnel admet la représentation

(8) $$\delta[k(t)]\Big|_{t_0}^{T} = N\int Dp(t)\,\exp i\int_{t_0}^{T}d\tau\,p(\tau)\,k(\tau),$$

N est un facteur de normalisation, nous utilisons cette formule pour obtenir finalement (N s'est éliminé entre le le numérateur et le dénominateur).

(9)
$$F[q_f(t;Q_0)] = \int Dq(t)\, Dp(t) \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau \Big[p(\tau)[\mathring{q} + A(q) - f(\tau)] - i\,\theta(0)\frac{\partial A(q)}{\partial q}\Big] F[q(t)]\, \delta(q(t_0) - Q_0) \times$$
$$\times \Big\{ \int Dq\,Dp \exp\Big[i\int_{t_0}^{T} d\tau\, p(\tau)\mathring{q}(\tau)\Big] \delta(q(t_0)) \Big\}^{-1},$$

qui est la formule de Jouvet pour des champs non stochastiques donnée dans [1] .

On peut facilement prendre la moyenne dans (9) par rapport aux conditions initiales : si on se donne une distribution de probabilités $b(Q_0)$ au temps t_0,

$$\int dQ_0\, b(Q_0) = 1$$, alors la moyenne :

$$\langle F[q_f(t\,;Q_0)] \rangle = \int dQ_0\, b(Q_0)\, F[q_f(t;Q_0)],$$

est donnée par (9) en remplaçant $\delta(q(t_0) - Q_0)$ par $b(q(t_0))$.

On peut aussi facilement prendre la moyenne par rapport à f où nous prenons f comme un bruit blanc gaussien de corrélation

$$\{ f(t)\, f(t') \} = c\, \delta(t - t'),$$

grâce à la formule

(10)
$$\{ F[f] \} = \bar{N} \int Df \exp\Big[-\frac{1}{2c} \int_{t_0}^{\infty} d\tau\, f^2(\tau) \Big] F[f],$$

$\bar{N}$ tel que $\{1\} = 1$

on peut vérifier facilement que

$$\{ f(t) \} = 0 \quad , \{ f(t)\, f(t') \} = c\, \delta(t - t'),$$

toutes ces moyennes étant gaussiennes se calculent facilement.

Nous prenons maintenant la moyenne du numérateur de (9) (le dénominateur n'est qu'un facteur numérique)

$$\{ F[q_f(q\,;Q_0)] \} =$$
$$= \tilde{N} \int Dq\,Dp\,Df \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau \Big[\frac{i}{2c} f^2(\tau) + p[\mathring{q} + A(q) - f(t)] - i\,\theta(0)\frac{\partial A}{\partial q} \Big] \times$$
$$\times F[q(t)]\, \delta(q(t_0) - Q_0)$$

$$= \tilde{N} \int Dq\,Dp\,Df \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau \Big[\frac{i}{2c}(f + icp)^2 + i\frac{c}{2}p^2 + p[\mathring{q} + A(q)] -$$
$$- i\,\theta(0)\frac{\partial A(q)}{\partial q} \Big] F[q(t)]\, \delta(q(t_0) - Q_0),$$

en effectuant la translation $f \to f + icp = f'$ l'intégrale sur f' ne donne qu'un facteur numérique et on a finalement (nous avons arrêté l'intégrale sur $f(\tau)$ a T mais cela est loisible et ne change que $\bar{N}$ si F ne dépend de f que pour $t < T$).

$$F[q(t);Q_0] =$$

(11) $$= N\int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau \left[p\mathring{q} - \left(-\frac{ic}{2}p^2 - pA(q) + i\,\Theta(0)\frac{\partial A(q)}{\partial q}\right)\right] \times$$

$$\times F[q(t)]\,\delta(q(t_0)-Q_0) .$$

Nous terminons ce chapitre en remarquant l'analogie de cette formule avec la formule de mécanique quantique

$$\langle Q,T|\,T\ F[q_H(t)]\,|Q_0 t_0\rangle =$$

(12) $$= \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \exp i\int_{t_0}^{t} d\tau\,[p\mathring{q} - H(p,q)]\,F[q(t)]\,\delta(q(t_0)-Q_0)\,\delta(q(t)-Q),$$

dont on peut trouver une démonstration dans [16'] dans le membre de gauche de (12) le symbole T est le produit chronologique habituel, les q_H sont les opérateurs de la représentation Heisenberg.

I. 1.2 FORMALISME OPERATEUR ASSOCIE

Nous introduisons maintenant l'espace de Hilbert et les opérateurs habituels de la mécanique quantique d'une particule :

p_s et q_s sont les opérateurs vérifiant la relation de commutation habituelle.

(13) $$[q_s, p_s] = i ,$$

et ayant les vecteurs propres $\quad q_s|q\rangle = q|q\rangle$, $\ p_s|p\rangle = p|p\rangle$,

vérifiant les relations

(14) $$\begin{cases} \langle q|q'\rangle = \delta(q-q') \\ \langle p|p'\rangle = \delta(p-p'), \end{cases} \qquad \langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ipq}$$

l'analogie entre (11) et (12) nous suggère de considérer le système décrit par l'"Hamiltonien".

(15) $$H = -\frac{ic}{2}p_s^2 - p_s A(q_s),$$

où nous avons pris $\Theta(0) = 0$, ceci étant expliqué en détail dans le chapitre suivant. L'opérateur que nous appellerons désormais Hamiltonien du système n'est pas Hermitien.

Nous introduisons maintenant les opérateurs de Heisenberg

(16) $$\begin{cases} \hat{q}(t) = e^{iHt}\,q_s\,e^{-iHt} \\ \hat{p}(t) = e^{iHt}\,p_s\,e^{-iHt}, \end{cases}$$

ainsi que l'opérateur d'évolution du système

(17) $$U(t_1, t_2) = e^{-iH(t_1 - t_2)} ,$$

nous définissons

(18) $$\begin{cases} |Q_0, t_0\rangle^R = e^{iHt} |Q_0\rangle \\ {}^L\langle Q, t| = \langle Q| e^{-iHt} . \end{cases}$$

<u>Proposition I. 1</u> $\quad {}^L\langle Q,t | Q_0 t_0\rangle^R = \langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle$

n'est autre que la probalité de transition

$W(Q,t; Q_0,t_0)$, du processus markovien défini par l'équation (1). (c.f. par ex. [18] pour ce qui concerne les processus stochastiques).

<u>preuve</u> : 1. pour $t = t_0$ on a bien

$$\langle Q | U(t_0,t_0) | Q_0\rangle = \delta(Q - Q_0) = W(Q,t_0; Q_0,t_0) .$$

2. $W(Q,t; Q_0\, t_0)$ vérifie l'équation de Fokker-Planck associée à (1)

(19) $$\dot{W}(Q,t; Q_0\, t_0) = \frac{\partial}{\partial Q}\left[\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial Q} + A(Q)\right] W(Q,t; Q_0,t_0) ,$$

d'autre part on a que

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle = \langle Q | (-iH)\, U(t,t_0) | Q_0\rangle$$

c'est à dire que $\langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle$ vérifie l'équation de Schrödinger associée à H, soit

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle = -iH\left(-i\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right) \langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle$$

$$\text{or } -iH\left(-i\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right) = -\frac{c}{2}p^2 + ip\,A(q) \Big|_{\substack{p = -i\frac{\partial}{\partial Q} \\ q = Q}}$$

$$= \frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial Q^2} + \frac{\partial}{\partial Q} A(Q) ,$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle = \left[\frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial Q^2} + \frac{\partial}{\partial Q}A(Q)\right] \langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle ,$$

ce qui est la même équation que (19), vérifiant la même équation avec des conditions initiales identiques, ces quantités sont égales.

(20) $$\langle Q | U(t,t_0) | Q_0\rangle = W(Q,t; Q_0,t_0) . \qquad \text{CQFD}$$

Nous faisons maintenant deux remarques

1. La formule (11) étant linéaire en F il suffit de considérer des fonctionnelles $F[q;Q_0] = q(t_1)\cdots q(t_n)$, une fonctionnelle plus générale se développant en série de Volterra.

(21) $$F[q;Q_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \cdots dt_n \frac{\delta^{(n)} F}{\delta q(t_1)\cdots \delta q(t_n)} \, q(t_1)\cdots q(t_n)$$

Les fonctionnelles $q(t_1)\cdots q(t_n)$ étant bien sûr sur les les fonctions de corrélation du processus $q(t)$.

2. (11) peut être formellement obtenue de (12) en intégrant sur dQ

Ces remarques nous suggèrent de calculer les grandeurs

(22) $$\langle L | T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | Q_0, t_0 \rangle^R$$

(23) $$\langle L | \doteq \int dQ \, {}^L\langle Q, t |,$$

$\langle L|$ ne dépend pas du temps car

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle L | = \int dQ \langle Q | (-iH) e^{-iHt}$$ or H a toujours un P sur la gauche et comme

$$\int dQ \langle Q | P_s \hat{\Theta} = \int dQ \, dp \; p \langle Q | p \rangle \langle p | \hat{\Theta} = \sqrt{2\pi} \int dp \; p \, \delta(p) \langle p | \hat{\Theta} =$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad p\,\delta(p) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle L | = 0 \; ; \quad \langle L | = \int dQ \langle Q | .$$

Remarquons que H ait toujours un P sur la gauche est la la traduction de la conservation de la probabilité car en effet

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dQ \, {}^L\langle Q, t | Q_0 t_0 \rangle^R = \frac{\partial}{\partial t} \int dQ \, w(Q,t; Q_0 t_0) = \frac{\partial}{\partial t} 1 = 0 .$$

Proposition I. 2 les quantités

$$\langle L | T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | Q_0 t_0 \rangle^R$$ sont

les fonctions de corrélation du processus q(t) ,

preuve : soit π la permutation telle que

$$t_{\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} \geq \cdots \geq t_{\pi(n)},$$

alors, par définition du produit T

$$F = \langle L | T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | Q_0 t_0 \rangle^R =$$

$$= \langle L | \hat{q}(t_{\pi(1)}) \cdots \hat{q}(t_{\pi(n)}) | Q_0, t_0 \rangle^R$$

$$F = \langle L | e^{iHt_{\pi(1)}} q_s e^{-iHt_{\pi(1)}} e^{iHt_{\pi(2)}} \cdots e^{iHt_{\pi(n)}} q_s e^{-iHt_{\pi(n)}} | Q_0, t$$

et, d'après (17), (18) et $\langle L | e^{-iHt} = \langle L |$

$$F = \langle L | U(T, t_{\pi(1)}) q_s U(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}) \cdots U(t_{\pi(n-1)}, t_{\pi(n)}) \times$$

$$\times q_s U(t_{\pi(n)}, t_0) | Q_0 \rangle ,$$

soit en insérant n relations de fermeture $1 = \int dq_i\, |q_i\rangle\langle q_i|$

et en utilisant $q_s|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle$

$$F = \int dq_{\pi(1)} \cdots dq_{\pi(n)}\; q_{\pi(1)} \cdots q_{\pi(n)}\; \langle L | U(T, t_{\pi(1)}) | q_{\pi(1)}\rangle \times$$

$$\times \langle q_{\pi(1)} | U(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}) | q_{\pi(2)}\rangle \cdots \langle q_{\pi(n)} | U(t_{\pi(n)}, t_0) | Q_0\rangle,$$

soit, en utilisant (20) ainsi que

$$\langle L | U(T, t_{\pi(1)}) | q_{\pi(1)}\rangle = \int dQ\, \langle Q | e^{-iH(t-t_{\pi(1)})} | q_{\pi(1)}\rangle =$$

$$= \int dQ\, \langle Q | q_{\pi(1)}\rangle = \int dQ\, \delta(Q - q_{\pi(1)}) = 1,$$

il vient finalement

$$\langle L | T\, \hat q(t_1) \cdots \hat q(t_n) | Q_0, t_0\rangle^R =$$

(24) $$= \int dq_{\pi(1)} \cdots dq_{\pi(n)}\; q_{\pi(1)}\; W(q_{\pi(1)}\, t_{\pi(1)}; q_{\pi(2)}\, t_{\pi(2)})\; q_{\pi(2)} \cdots$$

$$\cdots W(q_{\pi(n-1)}\, t_{\pi(n-1)}; q_{\pi(n)}\, t_{\pi(n)})\; q_{\pi(n)}\; W(q_{\pi(n)}\, t_{\pi(n)}; Q_0, t_0)$$

ce qui est bien l'expression des fonctions de corrélation du processus q(t) C.Q.F.D.

Remarquons que l'on a obtenu les fonctions de corrélations pour la condition initiale $q(t_0) = Q_0$ si l'on se donne une répartition de probabilités $b(Q_0)$ pour la condition initiale il suffit de remplacer $|Q_0, t_0\rangle^R$ par $|R\rangle$ ou

(25) $$|R\rangle = \int dQ_0\, b(Q_0)\, |Q_0, t_0\rangle^R$$

et alors

(26) $$\langle q(t_1) \cdots q(t_n)\rangle_b = \langle L | T\, \hat q(t_1) \cdots \hat q(t_n) | R\rangle .$$

I. 1.3 PROBLEMES DE DISCRETISATION

Nous nous proposons ici de construire le formalisme fonctionnel en partant du formalisme opérateur, de la manière standard en mécanique quantique [16', 28]

Pour cela nous divisons l'intervalle $[t_0, t]$ dans les les points $t_j = t_0 + j\varepsilon$, $(n+1)\varepsilon = t - t_0$, $t_{n+1} = t$ on a, en plaçant n relations de fermeture $1 = \int dq_j\, |q_j\rangle\langle q_j|$ dans $\langle Q | U(t, t_0) | Q_0\rangle$

(27) $$\langle Q | U(t, t_0) | Q_0\rangle = \int \prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{j=1}^{n+1} \langle q_j | U(t_j, t_{j-1}) | q_{j-1}\rangle ,$$

étant intéressés à la limite $\varepsilon \to 0$ nous ne gardons que les termes jusqu'à l'ordre ε dans chaque facteur.

(28) $$U(t_j, t_{j-1}) = 1 - i\varepsilon H(p_s, q_s) + O(\varepsilon^2),$$

ou $$H(p_s, q_s) = -\frac{i\varepsilon}{2} p_s^2 - p_s A(q_s),$$

mais nous pouvons aussi écrire H sous la forme

$$H(p_s, q_s) = -(1-\alpha)\, p_s A(q_s) - \alpha A(q_s)\, p_s - \alpha [p_s, A(q_s)] - i\frac{\varepsilon}{2} p_s^2 ,$$

soit en utilisant $[p_s, A(q_s)] = -i\dfrac{\partial A(q_s)}{\partial q_s}$,

(29) il vient $$H = -i\frac{\varepsilon}{2} p_s^2 - (1-\alpha)\, p_s A(q_s) - \alpha A(q_s)\, p_s + i\alpha \frac{\partial A(q_s)}{\partial q_s} ,$$

nous devons évaluer, d'après (27) et (28)

$\langle q_j | H(p_s, q_s) | q_{j-1} \rangle$ soit par exemple

$$\langle q_j | p_s A(q_s) | q_{j-1} \rangle = \int dp \, \langle q_j | p_s | p \rangle \langle p | A(q_s) | q_{j-1} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_j - q_{j-1})]\, p\, A(q_{j-1}) ,$$

il vient de la même manière

$$\langle q_j | A(q_s)\, p_s | q_{j-1} \rangle = A(q_j) \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_j - q_{j-1})]\, p$$

(30) $$\langle q_j | i\alpha \frac{\partial A(q_s)}{\partial q_s} | q_{j-1} \rangle = i\alpha \frac{\partial A(q_{j-1})}{\partial q_{j-1}} \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_j - q_{j-1})]$$

$$\langle q_j | -i\frac{\varepsilon}{2} p_s^2 | q_{j-1} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \left(-i\frac{\varepsilon}{2} p^2\right) \exp[ip(q_j - q_{j-1})]$$

$$\langle q_j | q_{j-1} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_j - q_{j-1})] ,$$

soit, en utilisant (28) (29) et (30)

(31) $$\langle q_j | U(t_j, t_{j-1}) | q_{j-1} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \exp i\varepsilon \Big[p \frac{q_j - q_{j-1}}{\varepsilon} - \Big(-i\frac{\varepsilon}{2} p^2 - (1-\alpha)\, p\, A(q_{j-1}) + \alpha\, p\, A(q_j) + i\alpha \frac{\partial A(q_{j-1})}{\partial q_{j-1}}\Big) \Big] ,$$

en reportant (31) dans (29) il vient

$$\langle Q | U(t, t_0) | Q_0 \rangle = \prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp i\varepsilon \sum_{j=1}^{n+1} \Big[$$

(32) $$\Big[p_j \frac{q_j - q_{j-1}}{\varepsilon} - \Big(-i\frac{\varepsilon}{2} p_j^2 - (1-\alpha)\, p_j A(q_{j-1}) - \alpha\, p_j A(q_j) + i\alpha \frac{\partial A(q_{j-1})}{\partial q_{j-1}}\Big) \Big] ,$$

faisons les changements de notations

(33) $$\begin{cases} p_j = p(t_{j-\frac{1}{2}}) \quad \text{ou} \quad t_{j-\frac{1}{2}} = \dfrac{t_j + t_{j-1}}{2} \\ q_j = q(t_j) \end{cases}$$

considérons alors un des termes de (32)

(34) $$\varepsilon\, p(t_{j-1/2})\,[(1-\alpha)\,A(q_{j-1}) + \alpha\, A(q_j)]\,,$$

dans la limite $\varepsilon \to 0$ on peut remplacer (34) par $\int_{t_{j-1}}^{t_j} dt\, p(t)\, A(q(t))$ si $\alpha \in [0,1]$, et alors, en posant $\prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} = Dq\,Dp$ (32) donne formellement

(35) $$\langle Q|U(t,t_0)|Q_0\rangle = \int_{\gamma(\alpha)} Dq\,Dp\,\exp i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \mathcal{L}_\alpha(p(\tau),q(\tau)) \times$$
$$\times\, \delta(q(t_0)-Q_0)\,\delta(q(t)-Q)\,,$$

(les fonctions δ tiennent compte des conditions $q_0 = Q_0$, $q_{n+1} = Q$)

ou $\mathcal{L}_\alpha(p(\tau),q(\tau)) = p\dot{q} + i\frac{\varepsilon}{2}p^2 + p\,A(q) - i\alpha\frac{\partial A(q)}{\partial q}$,

et le symbole $\gamma(\alpha)$ dans (35) indique que en discrétisant (35) dans chaque expression

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} d\tau\, \mathcal{L}_\alpha(p(\tau),q(\tau))$$ le terme

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} d\tau\; p(\tau)\,A(\tau)$$

(36) doit être pris égal à

$$= \varepsilon\, p(t_{j-1/2})\,[(1-\alpha)\,A(q_{j-1}) + \alpha\, A(q_j)]\,,$$

c'est à dire que (35) est simplement une notation abrégée pour (32).

Nous discutons maintenant la situation qui se présente. De ce qui précède on peut conclure qu'une intégrale fonctionnelle du type

(37) $$K = \int Dq\,Dp\,\exp i\int_{t_0}^{t} d\tau\,[p\dot{q} - H(p,q)]\;\delta(q(t_0)-Q_0)\,\delta(q(t)-Q)\,,$$

n'a pas en général une valeur bien déterminée : sa valeur dépend de la façon dont nous approchons en discrétisant l'intégrale.

(38) $$I(t'+\varepsilon, t') = \int_{t'}^{t'+\varepsilon} d\tau\; H(p(\tau), q(\tau))\,,$$

dans chaque petit intervalle $[t', t'+\varepsilon]$. La valeur de k peut s'écrire :

$k = \langle Q|\hat{U}(t,t_0)|Q_0\rangle$ l'opérateur $\hat{U}(t,t_0)$ étant déterminé par l'équation

$$i\frac{\partial}{\partial t'}\hat{U}(t',t_0) = \hat{H}(p_s,q_s)\,\hat{U}(t',t_0)\,,$$

chaque façon différente d'approximer $I(t'+\varepsilon, t')$ va déterminer un opérateur $\hat{H}(p_s,q_s)$ différent et donc un $\hat{U}$ différent et une valeur différente de K.

Les différentes prescriptions pour approximer correspondent aux différentes possibilités d'ordonner p_s et q_s pour obtenir $H(p_s,q_s)$ à partir de $H(p,q)$ (voir le calcul menant à (31)).

Le phénomène que nous venons de constater est la traduction du problème bien connu de l'ordre des opérateurs dans la quantification d'un système, il est normal que ce problème se présente aussi avec les intégrales fonctionnelles.

Remarquons que pour les systèmes simples habituellement considérés en mécanique quantique

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

le problème ne se pose pas.

Remarquons aussi que l'on peut ajouter à H un terme dépendant de la prescription de telle sorte que

$\langle Q|\hat{U}(t,t_0)|Q_0\rangle$ reste constant, ceci étant précisément ce que nous avons dans (35) où ce terme est $-i\alpha\frac{\partial A(q)}{\partial q}$ de sorte que l'on obtient ainsi différentes représentations fonctionnelles, toutes égales, de la même quantité

$$\langle Q|U(t,t_0)|Q_0\rangle .$$

Pour terminer indiquons rapidement comment, si l'on tient compte de la discrétisation adoptée, les manipulations formelles de I. 1.1 donnent bien pour $\Theta(0)$ la valeur α .

Retournant à la formule (7) on voit que le facteur venait en calculant

$$\frac{\delta}{\delta q(t)}\int d\tau\, \Theta(t-\tau)\Theta(\tau-t_0)\, A(q(\tau))$$

$$= \frac{\delta}{\delta q(t)}\int_{t_0}^{t} d\tau\, A(q(\tau))$$

en discrétisant $\frac{\delta}{\delta q(t)}$ agit à la fin de $[t_0, t]$ c'est à dire sur $[t-\varepsilon, t]$ la $\varepsilon\frac{\delta}{\delta q} \to \frac{\partial}{\partial q(t)}$ et en utilisant la prescription (36)

$$\frac{\partial}{\partial q(t)}\left[(1-\alpha)A(q(t-\varepsilon)) + \alpha A(q(t))\right] = \alpha\frac{\partial A(q)}{\partial q},$$

et on a bien $\Theta(0) = \alpha$.

Enfin remarquons que si on adopte pour $\mathcal{D}q\,\mathcal{D}p$ les définitions habituelles le dénominateur de (9) vaut $\int dQ\langle Q|Q_0\rangle = 1$ et donc que dans (11) $N = 1$.

I. 1.4 <u>FONCTIONNELLE GENERATRICE ET THEORIE DES PERTURBATIONS</u>

Nous introduisons maintenant de la manière habituelle la la fonctionnelle génératrice

(39) $$Z^{\gamma(\alpha)}[j,j^*] = \int_{\gamma(\alpha)} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\, \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau\left[\mathcal{L}_\alpha(p(\tau),q(\tau)) + j(\tau)q(\tau) + j^*(\tau)p(\tau)\right]\delta(q(t_0)-Q_0) .$$

<u>Proposition I. 3</u> dans le cas où le membre de gauche est défini ($t_i \neq t_j$ pour tout i,j)

(40) $$\langle L|T\,\hat{p}(t_1)\cdots\hat{p}(t_n)\,\hat{q}(t'_1)\cdots\hat{q}(t'_m)|Q_0,t_0\rangle^R =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_n)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t'_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t'_m)}\, Z^{\gamma(\alpha)}[j,j^*]\Big|_{\substack{j=0\\ j^*=0}}$$

preuve : en calculant le second membre on trouve

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_1)} \cdots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_n)} \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t'_1)} \cdots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t'_m)} \; Z^{\gamma(\alpha)}[j,j^*]$$

$$= \int_{\gamma(\alpha)} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; p(t_1)\cdots p(t_n)\, q(t'_1)\cdots q(t'_m)\; \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau\; \mathcal{L}_\alpha(p(\tau),q(\tau)) \times$$
$$\times\, \delta(q(t_0)-Q_0)$$

ce qui est bien le membre de gauche de (40) en ordonnant chronologiquement les $p(t_i)$ et $q(t'_j)$ car on trouve exactement cette expression en construisant la représentation fonctionnelle du membre de gauche de (40) comme nous l'avons fait pour $\langle Q \,| U(t,t_0) | Q_0 \rangle$.

Proposition I. 4 les fonctions $\langle L | T\, p(t_1)\cdots p(t_n)\, q(t'_1)\cdots q(t'_m) | Q_0, t_0 \rangle^R$ sont les fonctions de corrélation et de réponse du processus q(t).

Preuve : la démonstration dans le cas où il n'y a pas de p a déjà été donnée (proposition 2) la généralisation étant évidente nous donnons la démonstration dans le cas où il n'y a qu'un p et un q.

la fonction de réponse $R(t_1,t_2)$ est par définition

$$\frac{\delta}{\delta g(t_2)} \langle q_g(t_1) \rangle \qquad \text{où,}$$

$$\langle q_g(t_1) \rangle = \langle L | T q(t_1) | Q_0, t_0 \rangle^R_{H=H'} \;,$$

ou H' est l'Hamiltonien correspondant à l'équation de Langevin avec une force supplémentaire $g(t)$ au second membre soit

$$H' = H + pg \,, \quad \mathcal{L}'_\alpha = \mathcal{L}_\alpha - pg$$

la représentation fonctionnelle de cette quantité est, en utilisant (11) $N = 1$

$$R(t_1,t_2) = \frac{\delta}{\delta g} \int_{\gamma(\alpha)} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau\, [\mathcal{L}_\alpha(p,q) - pg]\; \delta(q(t_0)-Q_0) \Big|_{g=0}$$

$$= -i \langle L | T \hat{q}(t_1)\, \hat{p}(t_2) | Q_0\, t_0 \rangle^R \quad \text{(d'après 40)}$$

la propriété de causalité $R(t_1,t_2) = 0 \quad t_2 > t_1$ est traduite ici par $\langle L | \hat{p} = 0$ en général on a que :

$$\langle L | T \hat{p}(t_1)\cdots \hat{p}(t_n)\, \hat{q}(t'_1) \cdots \hat{q}(t'_m) | Q_0, t_0 \rangle^R =$$

= 0 si un des t, plus grand que tous les t' .

Nous construisons maintenant la théorie de perturbation de la manière habituelle dans le formalisme fonctionnel pour vérifier que malgré la dépendance explicite de H en α , le résultat perturbatif est indépendant de α à tout ordre.

Pour alléger la notation nous n'écrivons plus la dépendance en α quand aucune confusion n'est possible, nous introduisons aussi pour les fonctions de corrélation-réponse (fonction de Green) la notation simplifiée

(41) $$\langle p(t_1)\cdots p(t_n)\, q(t'_1)\cdots q(t'_m) \rangle = \langle L | T \hat{p}(t_1)\cdots \hat{p}(t_n)\, \hat{q}(t'_1) \cdots \hat{q}(t'_m) | Q_0\, t_0 \rangle^R$$

La théorie de perturbation se construit de la manière suivante, supposons que $\mathcal{L}$ puisse s'écrire

(42) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ où $\mathcal{L}_0$ est quadratique en p et q

alors (39) s'écrit

$$Z[j,j^*] = \int Dp\,Dq \exp i\int d\tau \left[\mathcal{L}_0(p(\tau),q(\tau)) + \mathcal{L}_I(p(\tau),q(\tau)) + jq + j^*p\right] \delta(q(t_0)-Q_0),$$

soit

$$Z[j,j^*] = \int Dq\,Dp \exp i\int d\tau\, \mathcal{L}_I(p(\tau),q(\tau)) \times$$

$$\times \exp i\int d\tau \left[\mathcal{L}_0(p(\tau),q(\tau)) + jq + j^*p\right] \delta(q(t_0)-Q_0)$$

$$Z[j,j^*] = \int Dq\,Dp \exp i\int d\tau\, \mathcal{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right) \times$$

$$\times \exp i\int d\tau \left[\mathcal{L}_0 + jq + j^*p\right] \delta(q(t_0)-Q_0),$$

la première exponentielle ne dépendant plus de (p, q) peut être sortie de l'intégrale et en posant

(43) $$Z_0[j,j^*] = \int Dp\,Dq \exp i\int d\tau \left[\mathcal{L}_0(p(\tau),q(\tau)) + jq + j^*p\right] \delta(q(t_0)-Q_0),$$

on a

(44) $$Z[j,j^*] = \exp i\int d\tau\, \mathcal{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right) Z_0[j,j^*],$$

formules qui, en rappelant que (voir (40))

$$\langle p(t_1)\cdots p(t_n)\, q(t'_1)\cdots q(t'_m)\rangle =$$

(45)

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_n)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t'_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t'_m)}\, Z[j,j^*]\Big|_{\substack{j=0\\ j^*=0}},$$

résument complètement la théorie des perturbations, en effet (43) étant gaussienne, tout est calculable.

Nous procédons maintenant à une manipulation qui rend la théorie plus proche de la théorie de perturbation en formalisme opérateur (Théorème de Wick).

D'après (44) et (45) les expressions à évaluer sont du type

(46) $$\langle F[p,q]\rangle = F\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right] \exp i\int d\tau\, \mathcal{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right) Z_0[j,j^*]\Big|_{\substack{j=0\\ j^*=0}}$$

soit, en appelant $G\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right]$ tout ce qui est appliqué à Z_0

$$\langle F[p,q]\rangle = G\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right] Z_0[j,j^*]\Big|_{\substack{j=0\\ j^*=0}}$$

$$= G\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right] Z_0[j,j^*] \exp i\int d\tau [jq + j^*p]\Big|_{\substack{j=0 & q=0\\ j^*=0 & p=0}}$$

$$= G\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right] Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right] \exp i\int d\tau [jq + j^*p]\Big|_{\substack{j=0 & q=0\\ j^*=0 & p=0}}$$

$$= Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right] G\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right] \exp i\int d\tau [jq + j^*p]\Big|_{\substack{j=0 & q=0\\ j^*=0 & p=0}}$$

$$= Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right] G[p,q] \exp i\int d\tau\,[jq + j^*p]\Big|_{\substack{j=0\ q=0 \\ j^*=0\ p=0}}$$

$$= Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right] G[p,q]\Big|_{\substack{q=0 \\ p=0}},$$

en utilisant cela (46) s'écrit

(47) $$\langle F[p,q]\rangle = Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right]\left\{F[p,q] \exp i\int \mathcal{L}_I(p,q)\,d\tau\right\}\Big|_{\substack{p=0 \\ q=0}}.$$

Cette expression est la forme fonctionnelle du théorème de Wick : Z_0 étant l'exponentielle d'une forme quadratique génère toutes les contractions possibles de p et q.

Nous appliquons maintenant les formules (43) (45) à un modèle particulier pour étudier le mécanisme de cancellation de la dépendance en α .

Le modèle correspond à l'équation de Langevin

(48) $$\dot{q} + \mu q + \frac{\lambda}{2} q^2 = f(t)$$ et nous prenons $c = 1$,

c'est à dire que f est δ -corrélée : $\{f(t) f(t')\} = \delta(t-t')$.

D'après (35) et (40) la fonctionnelle génératrice est donnée par

(49) $$Z[j,j^*] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \exp i\int d\tau\left[p\left(\dot{q} + \mu q + \frac{\lambda}{2}q^2\right) + \frac{i}{2}p^2 - i\alpha(\mu + \lambda q) + jq + j^*p\right]\delta(q(-\infty)).$$

Nous prenons la condition initiale $a - \infty$ pour obtenir les règles de Feynman les plus simples (théorie stationnaire) suivant (43) $\longrightarrow$ (45) la théorie de perturbation se fait en posant

(50) $$Z[j,j^*] = \exp i\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\left[i\frac{\lambda}{2}\frac{\delta}{\delta j^*}\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)^2 - \alpha\lambda\frac{\delta}{\delta j}\right] Z_0[j,j^*]$$

(51) $$Z_0[j,j^*] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \exp i\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\left[i\frac{p^2}{2} + p(\dot{q} + \mu q) - i\alpha\mu + jq + j^*p\right] \times$$
$$\times\,\delta(q(-\infty)).$$

Z_0 est une intégrale gaussienne et plusieurs méthodes sont disponibles pour la calculer, nous utiliserons les équations de Schwinger.

Soit F une fonctionnelle quelconque

$$\int \mathcal{D}q\, F[q] = \int \mathcal{D}(q+h)\, F[q+h] \qquad h = cte$$
$$= \int \mathcal{D}q\, F[q+h]$$ (invariance par translation de la mesure)

soit, en développant F

$$= \int \mathcal{D}q \left[F[q] + \int d\tau\, h(\tau) \frac{\delta F[q]}{\delta q(\tau)} + \cdots \right]$$

h étant quelconque on en déduit

(52) $\int \mathcal{D}q \, \frac{\delta F[q]}{\delta q} = 0$ c'est le "Lemme d'intégration fonctionnelle par partie".

en appliquant (52) à (51) on en déduit

(53) $$\begin{cases} \int \mathcal{D}q\, \mathcal{D}p \, \frac{\delta}{\delta p} \exp i \int d\tau \left[L^0_\alpha(\tau) + j q + j^* p \right] \times \delta(q(-\infty)) = 0 \\ \int \mathcal{D}q\, \mathcal{D}p \, \frac{\delta}{\delta q} \exp i \int d\tau \left[L^0_\alpha(\tau) + j q + j^* p \right] \times \delta(q(-\infty)) = 0, \end{cases}$$

où L^0_α est l'exposant de (51)

il vient

(54) $$\begin{cases} \int \mathcal{D}q\, \mathcal{D}p \left[-p + i(\dot{q} + \mu q) + i j^* \right] \exp \cdots = 0 \\ \int \mathcal{D}q\, \mathcal{D}p \left[-i\dot{p} + i\mu p + i j \right] \exp \cdots = 0, \end{cases}$$

soit les équations pour $Z_0[j, j^*]$

(55) $$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu\right) \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta j^*(t)} = j(t) Z_0[j, j^*] \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\right) \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta j(t)} = -j^* Z_0[j, j^*] - \frac{\delta Z_0}{\delta j^*}, \end{cases}$$

on peut facilement vérifier que la solution de (51) vérifiant les conditions aux limites

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta j(t)} \Big|_{j = j^* = 0} = \langle q(t) \rangle_0 = 0, \quad t \to \infty$$

et

$$\langle p(t_1)\, p(t_2) \rangle_0 = 0 \qquad \langle p(t_1)\, q(t_2) \rangle_0 = 0 \quad t_1 > t_2$$

s'écrit

(56) $$Z_0[j, j^*] = \exp \left\{ -\int d\tau d\tau'\, j^*(\tau)\, S(\tau - \tau')\, j(\tau') - \frac{1}{2} \int d\tau d\tau'\, j(\tau)\, \Delta(\tau - \tau')\, j(\tau') \right\},$$

avec

(57) $$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \frac{e^{-ipt}}{p - i\mu} = i\, \theta(-t)\, e^{\mu t} \\ \Delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \frac{e^{-ipt}}{p^2 + \mu^2} = \frac{1}{2\mu} e^{-\varepsilon(t) \cdot \mu t} = \Delta(-t), \end{aligned}$$

ou $\varepsilon(t) = \theta(t) - \theta(-t)$

Nous introduisons les représentations diagrammatiques habituelles, se rappelant (47) on voit que Z_0 va générer les contractions (propagateurs)

$$\overline{p(t)\, q(t')} = S(t - t') \leftrightarrow t \rightsquigarrow t'$$

$$\overline{q(t)\, q(t')} = \Delta(t - t') \leftrightarrow t \text{ ——— } t'$$

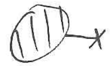
de (50) nous lisons les vertex

 $\alpha\lambda$

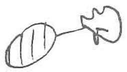
le facteur $\frac{1}{2}$ a disparu du 1^{er} vertex pour des raisons combinatoires.

le mécanisme de cancellation est le suivant :

pour chaque graphe ayant un vertex x

$G_1 =$ 

il vient dans la somme un autre graphe

$G_2 =$  avec un tadepole

nous allons voir que $G_1 + G_2 = 0$ en tenant compte de la discrétisation $\gamma(\alpha)$

En effet le tadepole a à priori une valeur indéterminée : $\delta(0) = i\theta(0)$ mais $\gamma(\alpha)$ nous dit qu'il faut interpréter l'intégrale

$$\int d\tau \, (-)\frac{\lambda}{2} \frac{\delta}{\delta j^*} \left(\frac{\delta}{\delta j}\right)^2 ,$$

comme (voir (36))

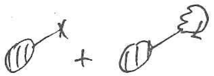
$$\int d\tau \, (-)\frac{\lambda}{2} \frac{\delta}{\delta j^*(\tau - \frac{\varepsilon}{2})} \left[(1-\alpha) \left(\frac{\delta}{\delta j(\tau - \varepsilon)} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\delta}{\delta j(\tau)} \right)^2 \right] ,$$

et donc fixe pour le tadepole la valeur

$$-i\lambda \left[(1-\alpha)\left(-\delta'\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) + \alpha\left(-\delta'\left(-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \right] =$$  ,

or, d'après (53) $\delta'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, $\delta'\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = i$,
soit :

 $= -\alpha\lambda$

et donc  $= 0$.

En résumé, la situation en théorie de perturbation est la suivante :

On doit exprimer l'intégrale sur le lagrangien d'interaction dans la discrétisation adoptée, en faisant cela les termes non définis dans l'expansion (tadepoles) prennent une valeur bien déterminée, dépendante de α qui cancelle juste la partie de l'interaction dépendante de α .

Les résultats étant indépendants de la discrétisation choisie il est clair que, pour un calcul pratique, on a intérêt à choisir celle donnant les règles de Feynman les plus simples, ici $\alpha = 0$.

I.2. 1 PROCESSUS GAUSSIEN AVEC CONTRAINTE

Nous serons amenés plus loin à prendre la moyenne sur un bruit blanc vérifiant une contrainte

$$\partial_\alpha f_\alpha(\vec{x}, t) = 0$$

et nous étudions donc ici l'extension du formalisme habituel nécessaire pour traiter de telles situations.

Habituellement si on a N variables aléatoires gaussiennes ayant les corrélations

(1) $$A_{ij} = \langle x_i x_j \rangle = A_{ji}$$

on a la formule

(2) $$\langle F(x_i) \rangle = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \int dx_1 \cdots dx_N \, e^{-\frac{1}{2} x_i A^{-1}_{ij} x_j} F(x_i) ,$$

mais cette formule suppose qu'il n'y ait pas de contraintes comme $x_1 = x_2$ et que donc A^{-1} existe.

Nous examinons maintenant le cas de deux variables aléatoires gaussiennes ayant la matrice de corrélation

(3) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

on a une contrainte

(4) $$\begin{cases} u_i x_i = 0 \\ u_i u_i = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad u_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

La matrice A vérifie

(5) $A u = 0$ et donc n'est pas inversible on ne peut pas appliquer (2).

L'idée est la suivante : on définit une matrice A^η inversible pour $\eta > 0$ et égale à A pour $\eta = 0$. La formule (2) s'applique à A^η, après les calculs on prend la limite $\eta \to 0$.

posons

(6) $A^\eta_{ij} = A_{ij} + \eta\, u_i u_j$

appelons

(7) $\begin{cases} \mathcal{E}_C & \text{l'espace des vecteurs } \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{E}_R & \text{l'espace tel que } \mathcal{E} = \mathcal{E}_R \oplus \mathcal{E}_C , \end{cases}$

($\mathcal{E}$ est l'espace complet)

On a maintenant que $A^\eta u = \eta u$ et donc A^η est bien inversible En effet :

(8) $$A^\eta = \begin{bmatrix} 1+\frac{\eta}{2} & 1-\frac{\eta}{2} \\ 1-\frac{\eta}{2} & 1+\frac{\eta}{2} \end{bmatrix} , \quad A^{\eta^{-1}} = \frac{1}{2\eta} \begin{bmatrix} 1+\frac{\eta}{2} & \frac{\eta}{2}-1 \\ \frac{\eta}{2}-1 & 1+\eta/2 \end{bmatrix} ,$$

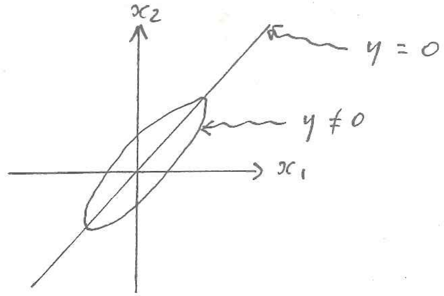
en reportant l'expression de $A^{\eta^{-1}}$ dans (2) on voit que la probabilité $\to 0$ quand $\eta \to 0$ si $x \notin \mathcal{E}_R$

$$\left((\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-xA^{-1}x} \to \eta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\eta}} \to 0 \right)$$

en effet si $x \notin \mathcal{E}_R$

$$\lim_{\eta \to 0} x A^{-1} x = +\infty$$

en fait le support de la distribution de probabilité dans l'espace $x_1 x_2$ a l'allure suivante.



Nous généralisons maintenant les relations (4) $\to$ (8) au cas de N v.a. gaussiennes avec les n contraintes

(9) $$x_i u_i^{(\alpha)} = 0 , \quad \alpha = 1 \ldots n ; \quad u_i^{(\alpha)} u_i^{(\beta)} = \delta^{(\alpha)(\beta)} .$$

Nous définissons, $\mathcal{E}$ étant l'espace complet les sous espaces supplémentaires $\mathcal{E}_R$, $\mathcal{E}_C$ par

(10) $$\mathcal{E}_c = \left\{ V \in \mathcal{E} ; \ V = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{(\alpha)} u^{(\alpha)} , \ \lambda_{(\alpha)} \in \mathbb{R} \right\}$$

(11) $$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R \oplus \mathcal{E}_C ,$$

la matrice de corrélation A_{ij} est telle que

(12) $$\begin{cases} A_{ij} = A_{ji} \\ A_{ij} u_j^{(\alpha)} = 0 , \ \forall \alpha \in [1, n] \cap \mathbb{N} , \end{cases}$$

ou encore $AV = 0$ si $V \in \mathcal{E}_C$.

Nous supposons que la restriction de A à $\mathcal{E}_R$ est inversible

Définissons les opérateurs de projection

$$(13)\quad \begin{cases} P_C = P_C^2 \\ P_R = P_R^2 \end{cases} \qquad 1 = P_R + P_C \qquad \text{et} \quad \begin{cases} P_C V \in \Sigma_C \quad \forall V \in \Sigma \\ P_R V \in \Sigma_R \quad \forall V \in \Sigma , \end{cases}$$

nous définissons maintenant,

$$(14)\quad A^y_{ij} = A_{ij} + y \sum_\alpha u_i^{(\alpha)} u_j^{(\alpha)}$$

ou

$$A^y = A + y P_C$$

la matrice A^y est inversible, son inverse étant donné par (A_R est la restriction de A à Σ_R)

$$(15)\quad A^{y^{-1}} = P_R A_R^{-1} P_R + \frac{1}{y} P_C ,$$

(il est facile de vérifier que $A^y A^{y^{-1}} = A^{y^{-1}} A^y = 1$ en utilisant les relations $A P_C = 0$, $A P_R = A$, $P_R P_C = P_C P_R = 0$).

Et en répétant l'argument fait pour la matrice (8) on vérifie que l'on obtient les bonnes quantités en utilisant $A^{y^{-1}}$ dans (2) et en prenant à la fin la limite $y \to 0$.

I. 2.2 <u>FORMALISME FONCTIONNEL POUR LES EQUATIONS NS.</u>

Notations : nous considérons les équations de Navier-Stokes à d dimensions d'espace.

On écrit le produit scalaire $k_\alpha k_\alpha = \sum_{i=1}^{d} k_i k_i = k^2 = \vec{k}\,\vec{k}$ dans l'espace ;

ainsi que $\underset{\sim}{x} = (t, x_\alpha)$, $\vec{x} = x_\alpha$

$\underset{\sim}{k} = (\omega, k_\alpha)$, $\vec{k} = k_\alpha$,

avec le produit $\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{x} = \omega t - k_\alpha x_\alpha$,

nous notons l'élément de volume $d\underset{\sim}{x} = dt\, d^d x = dt\, d\vec{x}$.

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + (v_\alpha \partial_\alpha) v_i = -\dfrac{1}{\rho}\partial_i P + \nu \partial_\alpha \partial_\alpha v_i \\ \rho = \text{cte} , \quad \partial_i v_i = 0 , \end{cases}$$

nous introduisons l'opérateur de projection P_{ij}

$$(17)\quad P_{ij} f_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\vec{k}\, d\vec{x}'\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right] f_j(\vec{x}', t) ,$$

(il correspond à l'opérateur P_R de la section précédente) ainsi que l'opérateur P^C_{ij}

$$(18)\quad P^C_{ij} f_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\vec{k}\, d\vec{x}'\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{k_i k_j}{k^2} f_j(\vec{x}', t) ,$$

P_{ij} est l'opérateur de projection sur le sous espace des fonctions f_i tel que $\partial_i f_i = 0$, $\Delta f_i \neq 0$ (sur Σ_R)

P^C_{ij} est l'opérateur de projection sur le sous espace des fonctions g_i tel que $g_i = \partial_i g$, $\Delta g \neq 0$ (sur Σ_C)

En remarquant que $v_i \in \Sigma_R$, $\partial_i P \in \Sigma_C$ on élimine le terme de pression (en projetant (16) sur Σ_R , ($v_i \in \Sigma_R \Rightarrow \partial_\alpha \partial_\alpha v_i \in \Sigma_R$)

Il vient l'équation habituelle

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \nu \partial_\alpha \partial_\alpha v_i + P_{ij} (v_\alpha \partial_\alpha) v_i = 0 \\ \partial_i v_i = 0 . \end{cases}$$

Nous nous proposons maintenant de traiter (19) de la façon nous avons traité l'équation

$\dot{q} + A(q) = f(t)$ dans le paragraphe I 1.

Dans ce but nous remplaçons (19) par

(20) $$\begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \nu\, \partial_\alpha \partial_\alpha v_i + \lambda P_{ij} (\partial_\alpha v_\alpha) v_i = f_i(t, \vec{x}) \\ \partial_i v_i = 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre formel $(\lambda = 1)$ destiné à compter les vertex dans l'expansion perturbative et f_i , que nous commençons par considérer comme une fonction donnée vérifiant

(21) $\partial_i f_i = 0$, sera plus tard un bruit blanc gaussien de corrélation

(22) $$\langle f_i(t, \vec{x}) f_j(t', \vec{x}') \rangle = \delta(t - t')\, A_{ij}(\vec{x}, \vec{x}'),$$

avec la contrainte $A_{ij} \partial_j g = 0$,
(on note $A_{ij} h_j \equiv \int d\vec{x}'\, A_{ij}(\vec{x} - \vec{x}')\, h_j(\vec{x}')$)
soit donc, en intégrant par partie

(23) $$\partial_i A_{ij} = 0.$$

Nous procédons exactement comme I 1(1) $\longrightarrow$ I 1(9), en généralisant de manière triviale

$t \to t, \vec{x}$
$q(t) \to \vec{v}(t, \vec{x})$, on a l'identité fonctionnelle

(24) $$1 = \int \mathcal{D}\vec{v}\, \delta\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \lambda P(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{f}\right]\Big|_{t_0}^{T} \times \delta[\vec{v}(t_0, \vec{x}) - \vec{v}_0]\; \mathcal{J}(\vec{v}(t, \vec{x})),$$

le δ fonctionnel ayant son support sur la solution de (20) avec condition initiale $\vec{v}(t_0)$, on a

(25) $$F[\vec{v}_f(t, x; \vec{v}_0)] = \int \mathcal{D}\vec{v}\, \delta\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \lambda P(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{f}\right]\Big|_{t_0}^{T} \times \delta[\vec{v}(t_0, \vec{x}) - \vec{v}_0]\; \mathcal{J}\, F[\vec{v}].$$

Nous faisons quelques remarques sur (25)

1. l'intégration fonctionnelle porte sur la dépendance en t et en $\vec{x}$, c'est à dire que si l'on veut discrétiser (25).

$$\mathcal{D}\vec{v} = \prod_{i_0 \cdots i_d} d\vec{v}_{i_0 \cdots i_d}\,, \quad \vec{v}_{i_0 \cdots i_d} = \vec{v}(t_{i_0}, x_{i_1} \cdots x_{i_d})$$

autrement dit les variables d'intégration sont les valeurs de $\vec{v}(t, \vec{x})$ sur un réseau s'étendant dans l'espace et le temps :

$(i_0 \cdots i_d) \in \mathcal{F} \subset \mathbb{Z}^{d+1}$ avec $t_{i_0} = \varepsilon i_0$
$x_{i_1} = \eta i_1 \cdots x_{i_d} = \eta i_d$

(25) étant la limite de l'expression discrétisée quand $\varepsilon \to 0, \eta \to 0$.

Le premier δ se comprend comme un produit de δ en chaque point du réseau autres que ceux de la section $t = t_0$.

Le second δ est ici encore un produit de δ pris en chaque point de la section $t = t_0$ du réseau.

Le réseau considéré s'étend entre t_0 et T où T est un temps plus grand que les temps intervenant dans F, éventuellement $T = +\infty$.

2. La condition $\partial_i v_i = 0$ est contenue dans la condition initiale sous la forme $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = 0$, les équations de mouvement conservant cette condition.

3. Conformément à la discussion générale du chapitre I. 1.3, nous prenons $J = cte$, cela revenant à adopter la discrétisation $\gamma(0)$ et donc (voir I.1.4) à prendre pour les tadepoles de la théorie de perturbation la valeur zéro. Dans tout ce qui suit les intégrales sont à comprendre comme discrétisées en $\gamma(0)$.

Nous utilisons maintenant la généralisation de I 1(8)

(26) $$\delta[\vec{k}(t,\vec{x})]\Big|_{t_0}^{T} = N\int D\vec{\pi}\, \exp i\int_{t_0}^{T} dt\, d\vec{x}\; \vec{\pi}(t,\vec{x})\, \vec{k}(t,\vec{x}) \,,$$

en appliquant cette formule à (25) il vient

(27) $$F[\vec{v}_f(t,\vec{x}\,;\vec{v}_0)] = \int D\vec{\pi}\, D\vec{v}\, \exp i\int_{t_0}^{T} d\tau\, d\vec{x}\Big[\vec{\pi}(\dot{\vec{v}} - \nu\Delta\vec{v} + \alpha P(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{f}\,)\Big]\, \delta[\vec{v}(t_0) - \vec{v}_0]\; \tilde{F}[\vec{v}] \,,$$

il nous reste à prendre la moyenne sur $\vec{f}$, pour cela, conformément au chapitre I.2.1, nous définissons la matrice inversible

(28) $$A_{ij}^{\eta} = A_{ij} + \eta P_{ij}^{t} \,,$$

et prenons la moyenne à l'aide de la formule

(29) $$\{F[\vec{f}\,]\} = \tilde{N}\int D\vec{f}\, \exp\Big[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} d\vec{x}\, dt\, d\vec{x}'\, dt' \times f_i(t,\vec{x})\, A_{ij}^{\eta-1} f_j(t',\vec{x}')\, \delta(t-t')\Big]\, F[\vec{f}\,]$$

en effet la formule discrète $\int \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}}\, \exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}, B\vec{x}) + \vec{b}\,\vec{x}\}$ $= (\det B)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2}(\vec{b}, B^{-1}\vec{b})$

nous indique, en rajoutant $\vec{J}\vec{f}$ à l'intégrale dans (29) et en appelant $W[\vec{J}\,]$ le résultat que

$$W[\vec{J}\,] = cte\, \exp\frac{1}{2}\int dt\, dx\, dt'\, dx'\, J_i\, A_{ij}^{\eta} J_j \;\; \delta(t-t')$$

et donc que $\frac{\delta}{\delta \vec{J}(t_1,\vec{x}_1)} \frac{\delta}{\delta \vec{J}(t_2,\vec{x}_2)} Z[\vec{J}\,]\Big|_{\vec{J}=0} = A_{ij}^{\eta}\, \delta(t_1 - t_2) \times cte \,,$

en calculant directement dans l'intégrale fonctionnelle, on a que

$$\frac{\delta}{\delta \vec{J}_1} \frac{\delta}{\delta \vec{J}_2} Z[\vec{J}\,]\Big|_{\vec{J}=0} = \{f_1 f_2\} \times cte \,,$$

on a bien les bonnes corrélations dans la limite $\eta \to 0$.

en effectuant la même manipulation que dans le cas à zéro dimensions (voir après l'équation I 1(10) on trouve,

(30) $$F[\vec{v}(t,\vec{x}\,;\vec{v}_0)] = N\int D\vec{\pi}\, D\vec{v}\, \exp i\mathcal{A}\; \delta[\vec{v}(t_0,\vec{x}) - \vec{v}_0] \times \tilde{F}[\vec{v}] \,,$$

ou

(31) $$A = \frac{i}{2}\int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,d\vec{x}'\,dt\;\Pi_i(t,\vec{x})\,A_{ij}(\vec{x},\vec{x}')\,\Pi_j(t,\vec{x}') + \int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,dt\;\vec{\Pi}(t,\vec{x})\left[\dot{\vec{V}} - \nu\Delta\vec{V} + \lambda P(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right].$$

Nous voyons donc que la fonctionnelle génératrice est donnée par

$$Z[\vec{j},\vec{j}^*] =$$

(32) $$= N\int D\vec{\Pi}\,D\vec{V}\,\exp i\left[\frac{i}{2}\int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,d\vec{x}'\,dt\;\vec{\Pi}A\vec{\Pi} + \int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,dt\left\{\vec{\Pi}\left[\dot{\vec{V}} - \nu\Delta\vec{V} + \lambda P(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] + \vec{j}\vec{V} + \vec{j}^*\vec{\Pi}\right\}\right]\delta\left[\vec{V}(t_0,\vec{x}) - \vec{V}_0\right].$$

(N tel que $Z[\vec{0},\vec{0}] = 1$)

I.2.3 THEORIE DE PERTURBATION

En procédant sur (32) aux mêmes manipulations que celles suivant l'équation I 1(42), nous obtenons

$$Z_0[\vec{j},\vec{j}^*] =$$

(34) $$= N\int D\vec{\Pi}\,D\vec{V}\,\exp i\left[\frac{i}{2}\int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,d\vec{x}'\,dt\;\vec{\Pi}A\vec{\Pi} + \int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,dt\left\{\vec{\Pi}\left[\dot{\vec{V}} - \nu\Delta\vec{V}\right] + \vec{j}\vec{V} + \vec{j}^*\vec{\Pi}\right\}\right]\delta\left[\vec{V}(t_0,\vec{x}) - \vec{V}_0\right]$$

(35) $$Z[\vec{j},\vec{j}^*] = \exp i\int_{t_0}^{T} d\vec{x}\,dt\;\lambda\,\vec{\Pi}P(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\,\Bigg|_{\substack{\vec{V}=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{j}}\\ \vec{\Pi}=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{j}^*}}} Z_0[\vec{j},\vec{j}^*].$$

Pour évaluer l'intégrale gaussienne $Z_0[\vec{j},\vec{j}^*]$, nous procédons de la même manière que pour les équations (53) (54), cependant pour tenir compte de la condition supplémentaire $\partial_i V_i = 0$ qui n'étant contenue que dans les conditions initiales risquerait de ne plus tenir dans la limite $t_0 \rightsquigarrow -\infty$ (nous calculons Z_0 dans cette limite = perturbations stationnaires) nous l'assurons en remplaçant dans (34)

(36) $$\begin{cases} \vec{j}\vec{V} \to j_i P_{ij} V_j \\ \vec{j}^*\vec{\Pi} \to j^*_i P_{ij}\Pi_j \,. \end{cases}$$

Le second remplacement revenant à considérer la réponse du système pour une force appliquée $P\vec{j}^*$ (voir I1 proposition 4). Le lemme d'intégration fonctionnelle par partie nous dit que

(37) $$\begin{cases} 0 = \int D\vec{\Pi}\,D\vec{V}\,\frac{\delta}{\delta V_i}\,e^{\cdots} \\ 0 = \int D\vec{\Pi}\,D\vec{V}\,\frac{\delta}{\delta \Pi_i}\,e^{\cdots}, \end{cases}$$

en utilisant $\int \vec{\Pi}\,\dot{\vec{v}}\,dt = -\int \dot{\vec{\Pi}}\,\vec{v}\,dt$

$$\int \vec{\Pi}\,\Delta\vec{v}\,d\vec{x} = \int \vec{v}\,\Delta\vec{\Pi}\,d\vec{x} ,$$

(38)
$$\begin{cases} 0 = (-\dot{\vec{\Pi}} + P\vec{J} - \nu\Delta\vec{\Pi})\, D\vec{\Pi}\, D\vec{v}\, e^{\cdots} \\ 0 = (\dot{\vec{v}} + P\vec{J}^{*} + i\int d\vec{x}'\, A\vec{\Pi} - \nu\Delta\vec{v})\, D\vec{\Pi}\, D\vec{v}\, e^{\cdots} , \end{cases}$$

où nous avons utilisé $A_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = A_{ji}(\vec{x}',\vec{x})$,
ou

(39)
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\Delta\right)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0}{\delta \vec{J}^{*}} - P\vec{J}Z_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0}{\delta \vec{J}} + P\vec{J}^{*}Z_0 = -i\int d\vec{x}'\, A\,\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0}{\delta \vec{J}^{*}} . \end{cases}$$

Nous supposons maintenant que Z_0 peut s'écrire

(40)
$$Z_0[\vec{J},\vec{J}^{*}] = \exp\Big[-\int d\underline{x}\, d\underline{x}'\, J_i^{*}(\underline{x}')\, S_{ij}(\underline{x}-\underline{x}')\, J_j(\underline{x}') - \frac{1}{2}\int d\underline{x}\, d\underline{x}'\, J_i(\underline{x})\, \Delta_{ij}(\underline{x},\underline{x}')\, J_j(\underline{x}')\Big] ,$$

avec $\Delta_{ij}(\underline{x},\underline{x}') = \Delta_{ji}(\underline{x}',\underline{x})$,
il vient alors

(41)
$$\begin{cases} \frac{\delta Z_0}{\delta J_i(\underline{x})} = -\int d\underline{x}' \left\{ J_\alpha^{*}(\underline{x}')\, S_{\alpha i}(\underline{x}'-\underline{x}) + J_\alpha(\underline{x}')\, \Delta_{\alpha i}(\underline{x}',\underline{x}) \right\} Z_0 \\ \frac{\delta Z_0}{\delta J_i^{*}(\underline{x})} = -\int d\underline{x}'\, S_{ij}(\underline{x}-\underline{x}')\, J_j(\underline{x}')\, Z_0 , \end{cases}$$

où nous avons utilisé $\Delta_{\alpha\beta}(\underline{x},\underline{x}') = \Delta_{\beta\alpha}(\underline{x}',\underline{x})$
en portant (41) b dans (39) a il vient

$$\int d\underline{x}'\, i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\Delta\right) S_{ij}(\underline{x}-\underline{x}')\, J_j(\underline{x}')\, Z_0 = P_{ij}\, J_j(\underline{x}) ,$$

soit, J étant quelconque

(42) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\Delta\right) S_{ij}(\underline{x}-\underline{x}') = \frac{1}{i} P_{ij}\, \delta(\underline{x}-\underline{x}') .$$

D'autre part, en portant (41) a dans (39) b il vient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right) i\int d\underline{x}' \left\{ J_\alpha^{*}(\underline{x}')\, S_{\alpha i}(\underline{x}'-\underline{x}) + J_\alpha(\underline{x}')\, \Delta_{\alpha i}(\underline{x}',\underline{x}) \right\} Z_0$$

$$+ P_{ij}\, J_j^{*} Z_0 =$$

$$= -i\int d\vec{x}'\, A_{ij}(\vec{x},\vec{x}')\, i\int d\underline{x}''\, S_{jk}((t,\vec{x}'), \underline{x}'')\, J_k(\underline{x}'')\, Z_0 ,$$

le terme en $\vec{J}^{*}$ s'élimine car

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\Delta\right) S_{ij}(\underline{x}-\underline{x}') = \frac{1}{i} P_{ij}\, \delta(\underline{x}-\underline{x}')$$

(43) $$\Rightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \nu\Delta\right) S_{ij}(\underline{x}'-\underline{x}) = \frac{1}{i}\, \delta(\underline{x}-\underline{x}')\, P_{ij}\Big|_{\vec{x}'}$$

il reste pour le terme en $\vec{J}$ ($\underline{x}' \to \underline{x}''$ dans le membre de gauche)

$$\int d\underline{x}'' \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right) \Delta_{ki}(\underline{x}'',\underline{x})\, J_k(\underline{x}'')\, Z_0 =$$

$$= -i\int d\underline{x}'' \int d\vec{x}'\, A_{ij}(\vec{x},\vec{x}')\, S_{jk}((t,\vec{x}') - \underline{x}'')\, J_k(\underline{x}'')\, Z_0 ,$$

en simplifiant par $\int d\underset{\sim}{x}'' \, \mathcal{J}_k(\underset{\sim}{x}'') \neq 0$ il vient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta_{kj}(\underset{\sim}{x}'', \underset{\sim}{x}) = -i\int d\vec{x}'\, A_{ij}(\vec{x}, \vec{x}')\, S_{jk}((t,\vec{x}') - \underset{\sim}{x}''),$$

en multipliant par $\left(\frac{\partial}{\partial t''} - \nu\Delta''\right)$ il vient, en utilisant (43)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t''} - \nu\Delta''\right)\Delta_{ki}(\underset{\sim}{x}'', \underset{\sim}{x}) =$$

$$= \int d\vec{x}'\, A_{ij}(\vec{x}, \vec{x}')\, \delta((t,x') - \underset{\sim}{x}'')\, P_{ij}\Big|_{x'},$$

soit

(44) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta''\right)\Delta_{ki}(\underset{\sim}{x}'', \underset{\sim}{x}) = \bar{A}_{ik}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}''),$$

où on a posé $\bar{A}_{ik}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}'') = \delta(t-t'')\, A_{ik}(\vec{x}, \vec{x}'')$
et utilisé $PA = A$.

Nous supposons maintenant l'homogénéité de l'agitation

(45) $$A_{ij}(\vec{x}, \vec{x}') = A_{ij}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

d'après (44) on a $\Delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}') = \Delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')$.

Nous résolvons maintenant (42) et (44) par les TF
posons

(46) $$\begin{cases} \Delta_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') = \int d\underset{\sim}{k}\, e^{-i\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')}\, \Delta_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{k}) \\ \\ S_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') = \int d\underset{\sim}{k}\, e^{-i\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')}\, S_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{k}), \end{cases}$$

avec $\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{x} = \omega t - \vec{k}\vec{x}$

avec ces définitions (42) donne (en utilisant (17))

$$(-i\omega - \nu\vec{k}^2)\, S_{ij}(\underset{\sim}{k}) = \frac{-i}{(2\pi)^{d+1}}\left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right]$$

(47) $$S_{ij}(\underset{\sim}{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\; \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\omega - i\nu k^2},$$

(48) posons $\bar{A}_{ij}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') = \int d\underset{\sim}{k}\, e^{-i\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')}\, \bar{A}_{ij}(\underset{\sim}{k})$,
(44) donne

$$(+i\omega + \nu k^2)(-i\omega - \nu k^2)\, \Delta_{ij}(\underset{\sim}{k}) = \bar{A}_{ij}(-\underset{\sim}{k}),$$

soit

(49) $$\Delta_{ij}(\underset{\sim}{k}) = \frac{\bar{A}_{ij}(-\underset{\sim}{k})}{\omega^2 + \nu^2 k^4},$$

si nous supposons maintenant l'isotropie de l'agitation

$A_{ij}(\vec{x}) = A_{ij}(\vec{x}^2)$ et en posant

(50) $$\tilde{A}_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, A_{ij}(\vec{x}),$$

or, voir (44) et (48) $\bar{A}_{ij}(\underset{\sim}{k}) = \frac{1}{2\pi}\tilde{A}_{ij}(\vec{k})$
soit, comme

$$\tilde{A}_{ij}(\vec{k}^2) = P_{ik}\tilde{A}_{kj}(k^2) \Rightarrow$$

(51) $$\tilde{A}_{ij}(\vec{k}^2) = \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right]\tilde{A}(\vec{k}^2);$$

on a donc finalement trouvé que :

si $A_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = A_{ij}(\vec{x}-\vec{x}')$, (homogénéité)

et $A_{ij}(\vec{x}) = A_{ij}(\vec{x}^{2})$, (isotropie)

alors en posant

(60) $$A_{ij}(\vec{k}^{2}) = \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right] A(k^2) = \int d\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} A_{ij}(\vec{x}),$$

S et Δ sont donnés par

(61) $$\left\{\begin{aligned} \Delta_{ij}(\underset{\sim}{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\omega^2 - \nu^2 k^4} A(k^2) \\ S_{ij}(\underset{\sim}{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\omega - i\nu k^2}, \end{aligned}\right.$$

ce qui achève de déterminer Z_0 (en utilisant (40) et (46)).

Dans le but de donner les règles de Feynman, nous regroupons les formules (61) (40) (46) et la formule (35) à qui nous avons fait subir une manipulation identique à celle qui a fait passer de I 1(46) à I 1(47).

<u>Formules de la théorie des perturbations</u>

Une fonctionnelle quelconque de $\vec{\Pi}$, $\vec{V}$ est donnée par

a) $$\langle F[\vec{\Pi},\vec{V}]\rangle = Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{V}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{\Pi}}\right] \times$$

$$\times \left\{ F[\vec{\Pi},\vec{V}] \exp i\int d\underset{\sim}{x}\, \lambda\, \vec{\Pi}\, P(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \right\}\Bigg|_{\substack{\vec{\Pi}=0\\ \vec{V}=0}},$$

ou

b) $$Z_0[\vec{J},\vec{J}^{*}] = \exp\Big[-\int d\underset{\sim}{x}\, d\underset{\sim}{x}'\, J_i^{*}(\underset{\sim}{x})\, S_{ij}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}')\, J_j(\underset{\sim}{x}') -$$

(62) $$- \frac{1}{2}\int d\underset{\sim}{x}\, d\underset{\sim}{x}'\, J_i(\underset{\sim}{x})\, \Delta_{ij}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}')\, J_j(\underset{\sim}{x}')\Big],$$

avec

c) $$S_{ij} = \int d\underset{\sim}{k}\, e^{-i\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x}} \frac{1}{[2\pi]^{d+1}} \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\omega - i\nu k^2},$$

d) $$\Delta_{ij} = \int d\underset{\sim}{k}\, e^{-i\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x}} \frac{1}{[2\pi]^{d+1}} \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\omega^2 + \nu^2 k^4} A(k^2),$$

ou $$A_{ij}(k^2) = A(k^2)\left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right] = \int d\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} A_{ij}(\vec{x}),$$

$$\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x} = \omega t - \vec{k}\vec{x}.$$

La théorie des perturbations consiste à développer l'exponentielle dans (62) a.

Avant de dériver les règles de Feynman, nous faisons quelques remarques.

1. Z_0 dans (62) a génère toutes les contractions (c'est l'expression fonctionnelle du théorème de Wick) la valeur de ces contractions étant

$$(63)\quad \begin{cases} \overline{\Pi_i(\underset{\sim}{x})\; V_j}(\underset{\sim}{x}') = S_{ij}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') \\[2em] \overline{V_i(\underset{\sim}{x})\; V_j}(\underset{\sim}{x}') = \Delta_{ij}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'), \end{cases}$$

il suffit de développer l'exponentielle dans Z_0 pour s'en convaincre

2. Nous remarquons que les deux propagateurs S et Δ contiennent un P_{ij} en facteur, cette remarque va nous permettre d'écrire l'interaction sous une forme plus symétrique (symétrisation du vertex)

I.2.4. REGLES DE FEYNMAN

L'interaction s'écrit

$$(64)\quad I = \exp i \int d\underset{\sim}{x}\, \lambda\, \Pi_i P_{ij} (V_\alpha \partial_\alpha) V_i \;,$$

et suivant la remarque de la fin de la section précédente on voit qu'on peut supprimer le P : en effet, $\vec{\Pi}$ étant toujours contracté avec un $\vec{V}$ et S contenant un P en utilisant la formule $P^2 = P$ (P est un projecteur) on voit que l'on obtiendra les mêmes termes dans l'expansion en remplaçant (64) par

$$(65)\quad I' = \exp i \int d\underset{\sim}{x}\, \lambda\, \Pi_i (V_\alpha \partial_\alpha) V_i \;,$$

en intégrant (65) par partie il vient

$$I' = \exp - i \int d\underset{\sim}{x}\, V_i\, \partial_\alpha (\Pi_i V_\alpha)$$

$$I' = \exp - i \int d\underset{\sim}{x}\, V_i \left[V_\alpha \partial_\alpha \Pi_i + \Pi_i \partial_\alpha V_\alpha \right],$$

le second terme donne une contribution nulle, en effet toutes les contractions de $\vec{V}$ contiennent un P et $\partial_i P_{ij} = 0$

soit $I' = \exp - i \int d\underset{\sim}{x}\, \lambda\, V_i V_\alpha \partial_\alpha \Pi_i$.

En symétrisant I' nous écrirons finalement l'interaction sous la forme

$$(66)\quad I' = \exp - i\lambda \int d\underset{\sim}{x}\, \frac{1}{2} V_i V_\alpha \left[\partial_\alpha \Pi_i + \partial_i \Pi_\alpha \right],$$

on a donc la formule finale

$$(67)\quad \langle F[\vec{\Pi}, \vec{V}] \rangle = \sum_{\text{contractions}}' F[\vec{\Pi}, \vec{V}] \exp - i\lambda \int d\underset{\sim}{x}\, \frac{1}{2} V_\alpha V_\beta\, \partial_i \Pi_\gamma \left[\delta_{\alpha i} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\beta i} \right],$$

les contractions étant

$$\overline{\Pi_i(\underset{\sim}{x})\; V_j}(\underset{\sim}{x}') = \delta_{ij}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')$$

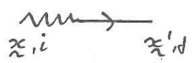
$$\overline{V_i(\underset{\sim}{x})\; V_j}(\underset{\sim}{x}') = \Delta_{ij}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')$$

remarquons que les graphes que nous obtenons ont une topologie et une combinatoire (facteurs de comptage) identique à ceux du modèle à zéro dimension d'espace étudié dans la section I.1.4 (pour cela il suffit de comparer (67) avec I1.(50) pris pour $d = 0$: dans ce cas l'interaction était $\exp + i\lambda \int d\tau \frac{1}{2} q^2 p$).

Nous donnons les règles de Feynman (compte non tenu des facteurs de comptages : ceux-ci s'obtiennent comme d'habitude en développant l'exponentielle dans (67) et en comptant le nombre de contractions correspondant à un graphe donné).

Les représentations diagrammatiques des contractions sont

$$\overline{\Pi_i(\underset{\sim}{x})\, V_j(\underset{\sim}{x}')} = S_{ij}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') \quad \longleftrightarrow$$

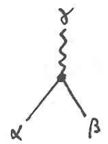


$$\overline{V_i(\underset{\sim}{x})\, V_j(\underset{\sim}{x}')} = \Delta_{ij}(x - x') \quad \longleftrightarrow$$

,

(68)

le vertex est donné par



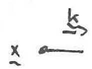
$$= -i\partial_i [\delta_{\alpha i}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta i}] \int d\underset{\sim}{x} \,,$$

la dérivée agissant sur la ligne ondulée.

En exprimant S et Δ à l'aide de $S(\underset{\sim}{k})$ et $\Delta(\underset{\sim}{k})$ on obtient les règles dans l'espace $\underset{\sim}{k}$

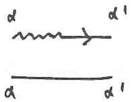
(69)

× pattes du graphe



$= e^{-i\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x}}$

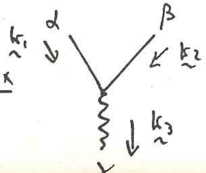
× lignes



$= S'_{\alpha\alpha'}(\underset{\sim}{k}) \int d\underset{\sim}{k}$

$= \Delta_{\alpha\alpha'}(\underset{\sim}{k}) \int d\underset{\sim}{k}$

× vertex



$$= \lambda\, (2\pi)^{d+1}\, \delta(\underset{\sim}{k}_1 + \underset{\sim}{k}_2 - \underset{\sim}{k}_3) \times$$
$$\times\, k_{3\mu} [\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\gamma}].$$

Remarquons pour compléter ces règles que nos propagateurs ont besoin d'être régularisés en $k^2 = 0$ (prescription $i\varepsilon$) nous prendrons

(62)

$$\begin{cases} \Delta(\underset{\sim}{k}) = \dfrac{1}{[2\pi]^{d+1}} \; \dfrac{\delta_{ij} - \dfrac{k_i k_j}{k^2}}{\omega^2 + \nu^2 k^4 + \varepsilon^2} \; A(k^2) \\[2em] S(\underset{\sim}{k}) = \dfrac{1}{[2\pi]^{d+1}} \; \dfrac{\delta_{ij} - \dfrac{k_i k_j}{k^2}}{\omega - i\nu k^2 - i\varepsilon} \,, \end{cases}$$

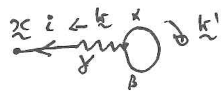
Ces prescriptions assurant les bonnes positions pour les poles quand $k^2 = 0$ et donc la bonne retardation pour S' .

Enfin rappelons que nous devons prendre les tadepoles

$= 0$

car nous avons pris la discrétisation $\gamma(0)$. (voir I 1.4)

D'autre part le tadepole  est nul, cela peut se voir en calculant $\langle \vec{V} \rangle$:

$\langle V_i(\underset{\sim}{x}) \rangle =$  $+ O(\lambda^3)$

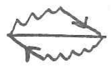
$$= \int d\underset{\sim}{k}\, d\underset{\sim}{k}'\, e^{i\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x}} S_{\gamma i}(\underset{\sim}{k}) \Delta_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{k}')\, \lambda\, (2\pi)^{d+1}\, \delta(\underset{\sim}{k}' - \underset{\sim}{k}' - \underset{\sim}{k})$$

$$\times\, k_\mu [\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\gamma}] =$$

$$= \lambda (2\pi)^{d+1} S'_{\gamma i}(\underset{\sim}{0})\, k_\mu \Big|_{\underset{\sim}{k}=0} [\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\gamma}] \int d\underset{\sim}{k}'\, \Delta_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{k}$$

$= 0$ (en mettant un cut-off à l'intégrale)

Tout graphe comportant une chaine de δ' se renfermant sur elle-même est aussi nul à cause de la retardation de δ'.

par exemple  $= 0$, ainsi que tous les graphes vide-vide ce qui assure à tout ordre $Z.[\vec{0},\vec{0}] = 1$.

Nous terminons en donnant les graphes contribuant à l'ordre 2 à la fonction de corrélation avec leurs bons facteurs de comptage

$\langle \vec{v}\,\vec{v} \rangle^{(2)} =$ 

I.2.5 <u>POWER COUNTING</u>

Nous nous proposons dans cette section d'appliquer l'argument habituel du Power couting (voir [31] par exemple) à notre théorie de perturbation pour examiner son comportement ultraviolet.

Nous considérons un graphe connexe quelconque ayant N vertex et L lignes internes, le nombre de boucles de ce graphe est

(70) $$B = L - N + 1 .$$

Notre point de départ est l'ensemble des règles (69) où l'on supprime l'intégrale sur les pattes externes ainsi que le facteur $e^{-i\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x}}$, le graphe est alors fonction des impulsions de ces pattes externes.

N-1 des fonctions δ associées aux vertex sont éliminées par intégration, la fonction restante a pour argument les impulsions des pattes du graphe et assure la conservation de l'impulsion passant par le graphe.

Il reste donc en fait $L - N + 1 = B$ variables d'intégration, nous avons les nouvelles règles.

On donne une impulsion à chaque ligne interne en conservant l'impulsion à chaque vertex

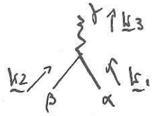
(71)

pattes $\underset{\sim}{k}\rightarrow$ $S(\underset{\sim}{k})$

$\Delta(\underset{\sim}{k})$

lignes internes $\underset{\sim}{k}\rightarrow$ $S(\underset{\sim}{k})$

$\Delta(\underset{\sim}{k})$

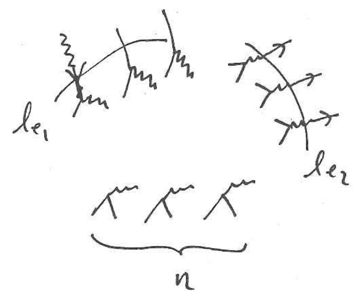
vertex  $d(2\pi)^{d+1} k_{3\mu} [\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\gamma}]$

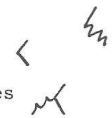
boucles $\int d\underset{\sim}{k}$

facteur global $\delta \left[\sum' \underset{\sim}{k} \text{ pattes} \right]$

Notons que l'on passe de (69) à (71) simplement en effectuant les intégrations triviales.

Nous supposons que notre graphe a l'allure suivante



soit $\left\{ \begin{array}{ll} \ell e_1 & \text{noeuds externes} \\ \ell e_2 & \text{noeuds externes} \\ n & \text{n noeuds internes} \end{array} \right.$ 

alors le nombre de lignes internes est

(71) $n + le_1 \quad \rightsquigarrow ,$

$$\frac{1}{2}(3n+2le_1+2le_2) - (n+le_1) = \frac{n}{2}+le_2$$

(72) $\frac{n}{2}+le_2 \quad \text{———} ,$

le nombre de vertex est

(73) $N = n+le_1+le_2 ,$

et le nombre de boucles

$$B = L - N + 1 = \frac{1}{2}(3n+2le_1+2le_2) - n - le_1 - le_2 + 1$$

(74) $B = \frac{1}{2} n + 1 ,$

on suppose pour l'agitation

(75) $A(k^2) \sim k^{-\delta} \quad , \; k \to \infty$

on compte les puissances de ω et de k arrivant dans l'intégrale

(76)
$$\left\{ \begin{array}{ll} \rightsquigarrow & \sim \omega^1 k^{-2} \\ \text{———} & \sim \omega^{-2} k^{-(4+\delta)} \\ \bullet & \sim \omega^0 k^1 \\ \bigcirc & \sim \omega k^d , \end{array} \right.$$

la puissance de ω est donc

$$D\omega = -(n+le_1) - 2\left(\frac{n}{2}+le_2\right) + \frac{n}{2} + 1$$

(77) $D\omega = -\frac{3}{2} n - le_1 - 2le_2 + 1 .$

Pour avoir la puissance de k il faut remarquer que l'on effectue premièrement les intégrales sur ω et que chacune de ces intégrales apporte un facteur k^2 supplémentaire car en effet $\int d\omega \, d^dk \, f(\omega,k) = \int d^dk \, \bar{f}(k)$

et $[\bar{f}(k)] = \nu k^2 [f(k)]$

car $[\omega] = [\nu k^2]$ ($[X]$ = dimension de X)

il faut donc ajouter $2B$ pour tenir compte de ce qu'on a intégré sur ω premièrement.

il vient

$$Dk = (n+le_1)(-2) + \left(\frac{n}{2}+le_2\right)(-)(4+\delta) + n + le_1 + le_2 + d\left(\frac{n}{2}+1\right) + 2\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

(78) $Dk = \frac{n}{2}(d-\delta-4) - le_1 - (3+\delta)le_2 + d + 2 .$

Cette équation nous montre que la théorie doit être

(79) superrenormalisable pour $d < 4+\delta$

renormalisable pour $d = 4+\delta$

non renormalisable pour $d > 4+\delta$.

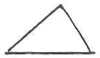
Nous donnons maintenant une liste des graphes les plus simples, non nuls par ailleurs ainsi que de leurs degrés de divergence, si le degré est nul, le graphe est logarithmiquement divergent.

$D\omega = -3 \ , \ Dk = d-4-2\delta$

$D\omega = -2 \ , \ Dk = d-2-\delta$

$D\omega = -3 \ , \ Dk = d-3-\delta$

$D\omega = -4 \ , \ Dk = d-5-2\delta$



$D\omega = -5 \ , \ Dk = d-7-3\delta$.

Enfin nous terminons par une remarque sur le développement en boucle.

Si nous avions dans l'équation (20) remplacé $\vec{\varphi}(t,\vec{x}) \to \sqrt{\eta}\,\vec{\varphi}(t,\vec{x})$ et en même temps fait le changement de variables $\vec{\Pi} \to \vec{\Pi}' = \eta\vec{\Pi}$ l'action $\mathcal{A}$ dans (31) donnerait $\mathcal{A} \to \frac{1}{\eta}\mathcal{A}$ de sorte qu'il viendrait un facteur η dans les propagateurs et un facteur η^{-1} dans le vertex, les puissances de η dans un graphe compteraient le nombre de boucles. η jouerait alors un rôle analogue à celui de $\hbar$ en T.Q.C ce qui peut se voir dans le formalisme opérateur à ce que la relation de commutation serait

$$[\varphi_i , \Pi_j'] = i\eta\, \delta_{ij}^{tr}(\vec{x}-\vec{x}') .$$

II.1 L'EQUATION DE LANGEVIN MODIFIEE ET L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK ASSOCIEE

Nous considérons le processus stochastique non Markovien défini par l'équation de Langevin modifiée [14]

(1) $$\dot{q} + A(q, m(t)) = f(t),$$

où A est une fonction en général non linéaire, $m(t)$ est un processus Markovien à valeurs discrètes défini indépendamment de q.

(2) $$m(t) = \nu \quad , \quad \nu = 1 \cdots N$$

la matrice de transition de m étant $M_{\mu\nu}$,c'est à dire que la probabilité conditionnelle d'avoir $m(t+s) = \nu$ sachant que $m(t) = \mu$ est

(3) $(\nu | \mu ; s) = (\exp - Ms)_{\mu\nu}$ et $f(t)$ est un bruit blanc gaussien : de moyenne nulle et de corrélation

(4) $$\{ f(t) \cdot f(t') \} = c\,\delta(t-t').$$

Remarquons qu'une équation apparemment plus générale du type

(5) $$\dot{q} + \tilde{A}(q, g(n(t))) = f(t),$$

où g est une fonction quelconque et n un processus gaussien discret prenant ses valeurs dans une famille finie $\mathcal{F}$ d'indices :

$\mathcal{F} \subset \mathbb{Z} \quad , \quad \mathrm{card}(\mathcal{F}) = N$

se ramène facilement à une équation du type (1) en posant, m une bijection de $\mathcal{F}$ dans $[1, N] \cap \mathbb{N}$

$$m(n) \in [1, N] \cap \mathbb{N} \quad , \quad n \in \mathcal{F}$$

(6) $$A(q, m(n)) = \tilde{A}(q, g(n)),$$

et pour la matrice de transition : si $\tilde{M}_{ij}$ est la matrice de transition du processus $n(t)$

(7) $$M_{m(i), m(j)} = \tilde{M}_{ij} \quad , \quad i, j \in \mathcal{F}$$

$M_{\mu\nu}$ est alors la matrice de transition du processus $m(n(t)) = m(t)$ le processus décrit par l'équation (1) avec A donnée par (6) et $M_{\mu\nu}$ par (7) étant alors équivalent à (5) (même équation de Langevin et même matrice de transition). L'extension à un nombre quelconque de degrés de liberté ($q \to \vec{q}$) étant directe, nous resterons à un degré de liberté pour ne pas surcharger la notation.

Des équations du type (5) se rencontrent en physique statistique, voir [19] pour un exemple physiquement motivé ainsi que [20] .

Le processus combiné $(q(t), m(t))$ est Markovien, ce que nous pouvons justifier en discrétisant l'équation (1) nous posons

(8) $$t_n = t_0 + n\varepsilon \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

et nous divisons l'axe réel (espace de q) en cellules

(9) $$[j\eta, (j+1)\eta[\quad , \quad j \in \mathbb{Z} \quad , \quad \eta = \sqrt{\varepsilon c}$$

et nous définissons

(10) $$\begin{cases} q^{(n)} = q(t_n) \\ m^{(n)} = m(t_n) \\ f^{(n)} = f(t_n). \end{cases}$$

On obtient alors la version dicrétisée de l'équation (1) en posant

(11) $$\dot{q}^{(n)} = \frac{1}{\varepsilon}\left[q^{(n+1)} - q^{(n)} \right]$$ il vient alors

$$\dot{q}^{(n-1)} + A(q^{(n-1)}, m^{(n-1)}) = f^{(n-1)}$$

soit

(12) $$q^{(n)} = q^{(n-1)} + \varepsilon \left(f^{(n-1)} - A(q^{(n-1)}, m^{(n-1)}) \right),$$

et (4) donne

(13) $$\{ f^{(n)} f^{(n')} \} = \frac{c}{\varepsilon} \delta_{nn'}$$

et nous pouvons remplacer $f^{(n)}$ par une variable alléatoire prenant les valeurs $\pm\sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}$ avec la probabilité $1/2$ l'effet de $f^{(n-1)}$ dans (12) étant alors de changer $q^{(n)}$ de $\varepsilon f^{(n-1)} = \pm \varepsilon \sqrt{\frac{c}{\varepsilon}} = \pm \eta$ c'est à dire de faire passer q dans une de ses deux cellules voisines avec la probabilité $1/2$ (c'est la motivation d'avoir pris $\eta = \sqrt{\varepsilon c}$) (12) donnant $q^{(n)}$ en fonction uniquement de $q^{(n-1)}$ et $m^{(n-1)}$ et comme, d'autre part la probabilité de transition $m^{(n-1)} = \mu \longrightarrow m^{(n)} = \nu$ est (equation (3))

(14) $$(\nu, \mu ; \varepsilon) = \delta_{\mu\nu} - \varepsilon M_{\mu\nu}$$

on voit que (12) et (14) définissent une chaine de Markov [22] avec la probabilité de transition

(15) $$P_{j\nu, k\nu'} = p^{(\nu)}_{jk} \left(\delta_{\nu\nu'} - \varepsilon M_{\nu\nu'} \right)$$

où $p^{(\nu)}_{jk}$ est la probabilité d'avoir

$q(t+\varepsilon) \in [\eta k, \eta(k+1)[$ si

$q(t) \in [\eta j, \eta(j+1)[$

d'après la remarque suivant l'équation (13) on a

(16) $$p^{(\nu)}_{jk} = \frac{1}{2} \left(\bar{p}^{(\nu)}_{j,k-1} + \bar{p}^{(\nu)}_{j,k+1} \right)$$

où $\bar{p}^{(\nu)}_{jk}$ est défini comme $p^{(\nu)}_{jk}$ mais f n'agissant pas. Nous remplaçons dans (12) $A(q^{(n)}, m^{(n)})$ par $A(j\eta, m^{(n)})$ ce qui est loisible dans la limite $\varepsilon \to 0$; en remarquant que :

$$\left| \frac{\varepsilon A(j\eta, \nu)}{\eta} \right| = \left| \frac{A(j\eta, \nu)}{\sqrt{c}} \right| \sqrt{\varepsilon} \to 0$$ quand $\varepsilon \to 0$

nous voyons que si $A(j\eta, \nu) > 0$ (si $A(j\eta, \nu) < 0$ l'argument est similaire) le terme $\varepsilon A(j\eta, \nu)$ fait changer q de la cellule j à la cellule $j-1$ si

$q(t) \in [j\eta, j\eta + \varepsilon A(j\eta, \nu)]$ et ne cause pas de changement de cellule si

$q(t) \in]j\eta + \varepsilon A(j\eta, \nu), j(\eta+1)[$ et donc, en supposant q uniformément distribué sur la cellule

(17) $$\bar{p}^{(\nu)}_{jk} = \left(1 - \frac{\varepsilon A(j\eta, \nu)}{\eta} \right) \delta_{jk} + \frac{\varepsilon A(j\eta, \nu)}{\eta} \delta_{j,k+1}$$

et en utilisant (16) il vient

(18) $$P_{jk}^{(\nu)} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\varepsilon A(j\eta,\nu)}{\eta}\right)(\delta_{j\,k-1} + \delta_{j,k+1}) + \frac{\varepsilon A(j\eta,\nu)}{\eta} \times (\delta_{jk} + \delta_{j\,k+2})\right],$$

la probabilité conditionnelle $(k,\nu';n|0)$ de la chaine de Markov obéit à l'équation de Schmoluchowski

(19) $$(k,\nu';n+1|0) = \sum_{j\nu}{}' P_{j\nu,k\nu'}\,(j,\nu;n|0),$$

soit, avec (18) et (15)

$$(k,\nu';n+1|0) = \sum_{j\nu}{}' (\delta_{\nu\nu'} - \varepsilon M_{\nu\nu'})\,\frac{1}{2}\left[\left(1-\varepsilon\frac{A(\eta j,\nu)}{\eta}\right) \times (\delta_{j,k-1} + \delta_{j,k+1}) + \varepsilon\frac{A(\eta j,\nu)}{\eta}(\delta_{jk} + \delta_{j,k+2})\right] \times (j,\nu;n|0)$$

$$= \sum_{\nu}{}' (\delta_{\nu\nu'} - \varepsilon M_{\nu\nu'})\,\frac{1}{2}\Big[(k-1,\nu;n|0) + (k+1,\nu;n|0) - \varepsilon\frac{A(\eta(k-1),\nu)}{\eta}(k-1,\nu;n|0) - \varepsilon\frac{A(\eta(k+1),\nu)}{\eta}(k+1,\nu;n|0) + \varepsilon\frac{A(\eta k,\nu)}{\eta}(k,\nu;n|0) + \varepsilon\frac{A(\eta(k+2),\nu)}{\eta}(k+2,\nu;n|0)\Big]$$

Soit, en ne gardant que les termes d'ordre ε et en divisant par ε

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[(k,\nu';n+1|0) - (k,\nu';n|0)\right] =$$

$$= -\sum_{\nu}{}' M_{\nu\nu'}\,\frac{1}{2}\left[(k-1,\nu;n|0) + (k+1,\nu;n|0)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{\varepsilon}\,\frac{1}{\eta^2}\Big[(k-1,\nu';n|0) - 2(k,\nu';n|0) + (k+1,\nu';n|0)\Big]$$

(20) $$+ \frac{1}{2}\,\frac{1}{\eta}\Big[A(\eta k,\nu')(k,\nu';n|0) - A(\eta(k-1),\nu') \times (k-1,\nu';n|0)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{1}{\eta}\Big[A(\eta(k+2),\nu')(k+2,\nu';n|0) - A(\eta(k+1),\nu') \times (k+1,\nu';n|0)\Big] +$$

$$+ O(\sqrt{\varepsilon}).$$

On voit que dans la limite $\varepsilon \to 0$ si nous définissons

(21) $$W(q,\nu;t|0) = \varepsilon\eta(k,\nu;n|0)\ , \quad t = n\varepsilon\,,\ (t_0=0)$$
$$q = k\eta,$$

la chaine de Markov devient un processus stochastique Markovien et (20) nous donne dans la limite l'équation à laquelle obéit sa probabilité de transition c'est à dire l'équation de Fokker-Planck

(22) $$\dot{W}(q,\nu';t|0) = -\sum_{\nu}{}' M_{\nu\nu'}\, W(q,\nu;t|0) + \\ + \frac{\partial}{\partial q}\left(A(q,\nu') + \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right) W(q,\nu';t|0).$$

II.2 <u>CONSTRUCTION DU FORMALISME OPERATEUR</u>

Notre point de départ est que, malgré que le processus q(t) défini par les équations (1) $\rightarrow$ (4) soit non Markovien, le processus combiné $(q(t),\nu(t))$ est Markovien, et sa probabilité de transition :

$W(q,\nu,t;\, q_0,\nu_0,t_0)$ obéit à l'équation de Fokker-Planck

(23) $$\frac{\partial}{\partial t} W(q,\nu,t;\, q_0,\nu_0,t_0) = \sum_{\nu'}{}' - M_{\nu'\nu}\, W(q,\nu',t;\, q_0,\nu_0,t_0) + \\ + \left[\frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q} A(q,\nu)\right] W(q,\nu,t;\, q_0,\nu_0,t_0)$$

avec la condition initiale

$$W(q,\nu,t_0;\, q_0,\nu_0,t_0) = \delta_{\nu\nu_0}\ \delta(q-q_0).$$

Nous construisons maintenant le formalisme opérateur, analogue à celui développé dans le chapitre I 1, qui s'applique à l'équation (23).

Pour cela nous introduisons, dans sa notation habituelle [26] le formalisme de mécanique quantique pour une particule avec spin.

Soit $\mathcal{H}_1$ l'espace de Hilbert habituel dans lequel agissent les opérateurs $\hat{q}_1$, $\hat{p}_1$ vérifiant la relation de commutation

(23) $[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i$ dans $\mathcal{H}_1$ nous avons les bases $|q\rangle$ et $|p\rangle$ vérifiant

(24) $$\begin{cases} \langle q|q'\rangle = \delta(q-q') \\ \langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \end{cases} \qquad \langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ipq},$$

nous introduisons aussi l'espace $\mathcal{H}_2$ correspondant en mécanique quantique aux degrés de liberté de spin pour une particule de spin N. Dans $\mathcal{H}_2$ on a une base $|\mu\rangle$ vérifiant, $\mu \in [1, N] \cap \mathbb{N}$

(25) $\langle \mu | \nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$ et les opérateurs de projections $P_{2\nu} = |\nu\rangle\langle\nu|$, $P_{2\nu}^{2} = P_{2\nu}$

vérifiant

(26) $$P_{2\nu}|\mu\rangle = \delta_{\mu\nu}|\nu\rangle \;, \quad {\sum_{\nu}}' P_{2\nu} = 1\!\!1_{\mathcal{H}_2}$$

l'espace de Hilbert dans lequel nous allons travailler est le produit tensoriel de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$

(27) $$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \,.$$

Dans $\mathcal{H}$ nous avons les bases

(27) $$\begin{cases} |q,\nu\rangle = |q\rangle \otimes |\nu\rangle \\ |p,\nu\rangle = |p\rangle \otimes |\nu\rangle \,, \end{cases}$$

vérifiant les relations

(28) $$\begin{cases} \langle q',\nu' | q,\nu\rangle = \delta_{\nu\nu'}\,\delta(q-q') \\ \langle p',\nu' | p,\nu\rangle = \delta_{\nu\nu'}\,\delta(p-p') \\ \langle q,\nu | p,\nu'\rangle = \delta_{\nu\nu'}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ipq} \end{cases}$$

nous définissons dans $\mathcal{H}$ les opérateurs

(29) $$\begin{cases} \hat{q} = \hat{q}_1 \otimes 1\!\!1_{\mathcal{H}_2} \;, \quad \hat{p} = \hat{p}_1 \otimes 1\!\!1_{\mathcal{H}_2} \\ P_\nu = 1\!\!1_{\mathcal{H}_1} \otimes P_{2\nu} \,, \end{cases}$$

(30) $$\begin{cases} \hat{q}_\nu = P_\nu\,\hat{q} = \hat{q}_1 \otimes P_{2\nu} \\ \hat{p}_\nu = P_\nu\,\hat{p} = \hat{p}_1 \otimes P_{2\nu} \,, \end{cases}$$

vérifiant les relations

(31) $$\begin{cases} \hat{q} = {\sum_{\nu}}' \hat{q}_\nu \;, \quad \hat{p} = {\sum_{\nu}}' \hat{p}_\nu \\ [\hat{q}_\nu, \hat{p}_\mu] = i\,\delta_{\mu\nu}\,P_\nu \,. \end{cases}$$

L'action de ces opérateurs sur les bases étant donnée par

(32) $$\begin{aligned} \hat{q}_\nu |q,\mu\rangle &= \delta_{\mu\nu}\, q\, |q,\mu\rangle \\ \hat{p}_\nu |p,\mu\rangle &= \delta_{\mu\nu}\, p\, |p,\mu\rangle \,, \end{aligned}$$

et

(33) $$\begin{cases} \vec{q}\,|q,\mu\rangle = q\,|q,\mu\rangle \\ \vec{p}\,|p,\mu\rangle = p\,|p,\mu\rangle , \end{cases}$$

(34) $$\begin{cases} P_\nu\,|q,\mu\rangle = \delta_{\mu\nu}\,|q,\mu\rangle \\ P_\nu\,|p,\mu\rangle = \delta_{\mu\nu}\,|p,\mu\rangle , \end{cases}$$

et les projecteurs P_ν vérifient

(35) $$P_\nu^2 = P_\nu \quad , \quad \sum_\nu{}' P_\nu = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} .$$

Nous disposons maintenant de tout le nécessaire pour introduire le formalisme opérateur de (23).

Nous définissons l'Hamiltonien (non Hermitien)

(36) $$H = -i\frac{c}{2}\vec{p}^{\,2} - \sum_\nu{}' \vec{p}_\nu A(\vec{q},\nu) - iM ,$$

où M est l'opérateur

(37) $$M = \sum_{\alpha\beta}{}' M_{\alpha\beta}\,|\beta\rangle\langle\alpha|$$ (noter l'inversion des indices)

et l'opérateur d'évolution

(38) $$U(t_1,t_2) = e^{-iH(t_1-t_2)} .$$

Nous avons la

Proposition II 1 : $W(q,\nu,t;q_0,\nu_0,t_0) =$

$$= \langle q,\nu|U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle$$

Preuve :

1. pour $t = t_0$ on a bien

$$W(q,\nu,t_0;q_0,\nu_0,t_0) =$$
$$= \delta_{\nu\nu_0}\,\delta(q-q_0)$$
$$= \langle q,\nu|U(t_0,t_0)|q_0,\nu_0\rangle$$

car $U(t_0,t_0) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

2. calculons $\frac{\partial}{\partial t}\langle q,\nu|U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle$

$$= \langle q,\nu|(-iH)\,U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle$$

(39) $$= \sum_\mu{}' \int dq'\,\langle q\,\nu|-iH|q',\mu\rangle\langle q',\mu|U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle ,$$

évaluons $\langle q,\nu|-iH|q',\mu\rangle =$

$$= \langle q,\nu|(-i)\Big[-i\frac{c}{2}\vec{p}^{\,2} - \sum_\alpha{}' \vec{p}_\alpha A(\vec{q},\alpha) - i\sum_{\alpha\beta}{}' M_{\alpha\beta}\,|\beta\rangle\langle\alpha|\Big]|q',\mu\rangle ,$$

on a

$$\langle q,\nu| -\frac{c}{2}\hat{p}^2 |q',\mu\rangle = \frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\langle q,\nu|q',\mu\rangle ,$$

$$\langle q,\nu| i\sum_\alpha{}' \hat{p}_\alpha A(\hat{q},\alpha)|q',\mu\rangle = \frac{\partial}{\partial q} A(q,\nu)\langle q,\nu|q',\mu\rangle ,$$

$$\langle q,\nu| -\sum_{\alpha\beta}{}' M_{\alpha\beta}|\beta\rangle\langle\alpha|q',\mu\rangle$$

$$= -M_{\mu\nu}\langle q|q'\rangle ,$$

soit en reportant dans (29) et en utilisant $\langle q,\nu|q',\mu\rangle = \delta_{\mu\nu}\,\delta(q-q')$

(40)
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle q,\nu|U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle$$
$$= \left[c^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q}A(q,\nu)\right]\langle q,\nu|U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle$$
$$-\sum_\mu{}' M_{\mu\nu}\langle q,\mu|U(t,t_0)|q_0,\nu_0\rangle .$$

C'est la même équation que (23), obéissant à la même équation et avec les mêmes conditions initiales, les grandeurs de la proposition 1 sont égales C.Q.F.D.

Nous poursuivons la construction du formalisme opérateur en introduisant les opérateurs de Heisenberg

(41)
$$\begin{cases} \hat{q}(t) = e^{iHt}\,\hat{q}\,e^{-iHt} \\ \hat{p}(t) = e^{iHt}\,\hat{p}\,e^{-iHt} , \end{cases}$$

ainsi que les vecteurs

(42)
$$\begin{cases} |q_0,\nu_0,t_0\rangle^R = e^{iHt_0}\,|q_0,\nu_0\rangle \\ {}^L\langle q,\nu,T| = \langle q,\nu|e^{-iHT} , \end{cases}$$

on a ${}^L\langle q,\nu,T|q_0,\nu_0,t_0\rangle^R = \langle q,\nu|U(T,t_0)|q_0,\nu_0\rangle ,$

nous définissons aussi le vecteur

(43)
$$\langle L| = \sum_\nu{}' \int dq\; {}^L\langle q,\nu,T|$$

<u>Proposition II 2</u> $\quad \frac{\partial}{\partial T}\langle L| = 0 ,$

<u>Preuve</u> : on a d'après (42)

(44)
$$\frac{\partial}{\partial T}\langle L| = \sum_\nu{}' \int dq\, \langle q,\nu|(-iH)\,e^{-iHT}$$

calculons $\sum_\nu{}' \int dq\, \langle q,\nu|H$

tous les termes de H qui contiennent un $\hat{p}$ à gauche ont une contribution nulle car

$$\sum_{\nu}' \int dq \, \langle q,\nu| \hat{p} = \sum_{\nu\mu}' \int dq \, dp \, \langle q,\nu|p,\mu\rangle\langle p,\mu| p$$

$$= \sum_{\nu}' \sum_{\mu}' \int dq \, dp \, \delta_{\nu\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} \langle p,\mu| p$$

$$= \sum_{\mu}' \int dp \, \sqrt{2\pi} \, \delta(p) \, p \langle p,\mu|$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad p\,\delta(p) = 0,$$

il reste, voir (36), le terme

$$\sum_{\nu}' \int dq \, \langle q,\nu| (-i) \sum_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta} |\beta\rangle\langle\alpha|$$

$$= -i \int dq \, \langle q| \sum_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta} \langle\alpha|$$

or la matrice de transition vérifie $\sum_{\mu}' M_{\nu\mu} = 0$
c'est une conséquence de la conservation de la probabilité

$$P(\mu \to \nu; \varepsilon) = e^{-\varepsilon M_{\mu\nu}} = 1 - \varepsilon M_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2)$$

(où P est la probabilité de transition de m (t))
et on doit avoir $\sum_{\nu} P(\mu \to \nu; \varepsilon) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{\nu}' M_{\mu\nu} = 0$$

donc $\sum_{\nu}' \int dq \, \langle q,\nu| H = 0$ cqfd

$\langle L|$ s'écrit donc

(45) $$\langle L| = \sum_{\nu}' \int dq \, \langle q,\nu| ,$$

et nous avons finalement la

Proposition II 3

Les fonctions de corrélation du processus non Markovien q(t) sont données par

$$\langle q(t_1) \cdots q(t_n) \rangle_{q_0 \nu_0} = \langle L| T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | q_0, \nu_0 t_0 \rangle^R .$$

Preuve : pour alléger la notation, nous supposons $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$ sinon il suffit de faire une permutation (voir la démonstration analogue de la proposition I 2).

alors

$$\langle q(t_1) \cdots q(t_n) \rangle_{q_0 \nu_0} = \langle L| e^{iHt_1} \hat{q} e^{-iHt_1} e^{iHt_2} \hat{q} e^{-iHt_2} \cdots$$

$$\cdots e^{iHt_n} \hat{q} e^{-iHt_n} e^{iHt_0} | q_0, \nu_0 \rangle ,$$

(nous avons utilisé (41) et (42)) avec (38) il vient

$$= \langle L| U(T,t_1) \hat{q} U(t_1,t_2) \hat{q} \cdots U(t_{n-1},t_n) \hat{q} U(t_n,t_0) | q_0, \nu_0 \rangle ,$$

en insérant n relations de fermeture

$$\sum_{\nu_i}' \int dq_i \, | q_i, \nu_i \rangle \langle q_i, \nu_i | = 1 ,$$

il vient en utilisant la proposition 1.

$$= \sum'_{\nu_1\cdots\nu_n} \int dq_1 \cdots dq_n \sum'_{\nu} \int dq \; W(q,\nu,T, q_1 \nu_1 t_1) \times$$

$$\times \; W(q_1,\nu_1,t_1 ; q_2,\nu_2,t_2) \cdots W(q_n,\nu_n,t_n, q_0,\nu_0,t_0) \times$$

$$\times \; q_1 \cdots q_n ,$$

ce qui en utilisant $\int dq \sum'_{\nu} W(q,\nu,T ; q_n,\nu_n,t_n) = 1$ est bien l'expression de la fonction de corrélation d'ordre n du processus q(t). CQFD

Remarquons que le processus n'est pas Markovien car on somme sur $\nu_1 \cdots \nu_n$ et la fonction de corrélation pour un processus Markovien devrait pouvoir s'écrire sous la forme de

$$\int dq_1 \cdots dq_n \; W(q_1,t_1, q_2 t_2) \cdots W(q_n t_n, q_0 t_0) \; q_1 \cdots q_n ,$$

ce qui n'est pas le cas ici.

Bien sûr si on se donne à t_0 une distribution $b(q_0,\nu_0)$, $\sum'_{\nu_0} \int dq_0 \; b(q_0,\nu_0) = 1$ pour avoir les fonctions de corrélations correspondantes à cette distribution des conditions initiales, il faut remplacer

$$|q_0,\nu_0,t_0\rangle^R \longrightarrow \sum'_{\nu_0} \int dq_0 \; b(q_0,\nu_0) \, |q_0,\nu_0,t_0\rangle^R .$$

II 3. THEORIE DE PERTURBATION DANS LE FORMALISME OPERATEUR

Rappelons que l'Hamiltonien de notre système s'écrit

$$H = -i \frac{c}{2} \vec{p}^{\,2} - \sum'_{\nu} \vec{p}_{\nu} \, A(\vec{q},\nu) - iM ,$$

pour faire la théorie de perturbation, nous séparons un terme diagonal et quadratique

(46) $$H_0 = -i \frac{c}{2} \hat{p}^{2} - \mu \hat{p} \hat{q} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}^+ ,$$

et considérons le reste comme l'interaction, explicitement

(47) $$H_I = \mu \hat{p} \hat{q} - \sum'_{\nu} \hat{p}_{\nu} \, A(\vec{q},\nu) - iM ,$$

on a

(48) $$H = H_0 + H_I .$$

Faisons le changement de notations

(49) $$\hat{q}_1 = \hat{q} \; , \quad \hat{q}_2 = \hat{p} .$$

Nous cherchons à établir une expression perturbative (développement en puissances de H_I) pour les grandeurs

$$G = \langle L | T q_{i_1}(t_1) \cdots q_{i_n}(t_n) | q_0, t_0 \rangle^R$$

dans la limite $t_0 \to -\infty$ (perturbations stationnaires)

où nous avons posé

(50) $$|q_0, t_0\rangle^R = \frac{1}{N} \sum'_{\nu_0} |q_0,\nu_0,t_0\rangle^R ,$$

c'est à dire que nous prenons une condition initiale à t_0 symétrique en ν_0 .

Nous définissons les opérateurs de la représentation d'interaction

(50) $$\begin{cases} U(t) = e^{-iHt} \,, \quad U_0(t) = e^{-iH_0 t} \\ U_I = e^{iH_0 t} e^{-iHt} = U_0^{-1} U \,, \end{cases}$$

(51) $$\hat{q}_i^{ip}(t) = U_I(t)\, \hat{q}_i(t)\, U_I^{-1}(t) = U_0^{-1}(t)\, \hat{q}\, U_0(t) \,.$$

les $\hat{q}_i^{ip}(t)$ sont des champs libres.

Nous définissons aussi

(52) $$U_I(t, t_0) = U_I(t)\, U_I^{-1}(t_0)$$

cet opérateur obéit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{iH_0 t} e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0) \right)$$

$$= iH_0\, e^{iH_0 t} e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0) +$$

$$+ e^{iH_0 t} (-iH) e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0)$$

$$= -i\, e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0)$$

$$= -i\, e^{iH_0 t} H_I(\hat{q}_i)\, e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0) =$$

$$= -i\, e^{iH_0 t} H_I(\hat{q}_i)\, e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0)$$

$$= -i\, H_I(\hat{q}_i^{ip})\, e^{iH_0 t} e^{-iHt} U_I^{-1}(t_0) \,,$$

soit

(53) $$\frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = -i\, H_I(q_i^{ip}(t))\, U_I(t, t_0)$$

la solution de (53) avec condition initiale $U_I(t_0, t_0) = 1$ est

(54) $$U_I(t, t_0) = T \exp\left\{ -i \int_{t_0}^{t} d\tau\, H_I(\hat{q}_i^{ip}(\tau)) \right\} .$$

Nous calculons maintenant

(55) $$G = \langle L | T \hat{q}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}(t_n) \; | q_0 , t_0 \rangle^R ,$$

nous supposons $t_1 > t_2 \cdots > t_n$, sinon il suffit de faire une permutation.

Alors,

$$G = \langle L | \hat{q}_{i_1}(t_1) \cdots q_{i_n}(t_n) | q_0 , t_0 \rangle^R ,$$

et en utilisant les définitions (50), (51)

$$G = \langle L | U_1^{-1}(t_1) \hat{q}^{\,IP}_{i_1} U_1(t_1 , t_2) \hat{q}^{\,IP}_{i_2}(t_2) \cdots$$

$$\cdots U_1(t_{n-1}, t_n) \hat{q}^{\,IP}_{i_n}(t_n) \, U(t_n) | q_0 , t_0 \rangle^R ,$$

en utilisant $\langle L | U(t) = \langle L | U_1(t) = \langle L | U_0(t) = \langle L |$

$$G = \langle L | U_1(\infty , t_1) \hat{q}^{\,IP}_{i_1}(t_1) \, U_1(t_1 , t_2) \cdots$$

$$\cdots U_1(t_{n-1}, t_n) \hat{q}^{\,IP}_{i_n}(t_n) \, U_1(t_n , t_0) \, U_1(t_0) | q_0 , t_0 \rangle^R ,$$

et, mettant un T-produit puis faisant des permutations sous le signe T

$$G = \langle L | T \hat{q}^{\,IP}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}^{\,IP}_{i_n}(t_n) \times$$

$$\times \, U_1(\infty , t_0) \, U_1(t_0) | q_0 , t_0 \rangle^R ,$$

soit en utilisant les définitions de U_1 et $|q_0 , t_0\rangle$

$$G = \langle L | T \hat{q}^{\,IP}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}^{\,IP}_{i_n}(t_n) \times$$

$$\times \, U_1(\infty , t_0) \, U_0^{-1}(t_0) \Big(\frac{1}{N} \sum_{\nu}' | q_0 , \nu \rangle \Big) ,$$

en prenant la limite $t_0 \longrightarrow -\infty$, et en utilisant le fait que

(56) $$\begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to -\infty} U_0^{-1}(t_0) \dfrac{1}{N} \sum\limits_{\nu}' | q_0 , \nu \rangle = | R \rangle \\ | R \rangle = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{\nu}' \displaystyle\int dq \sqrt{\frac{\mu}{\pi c}} \, e^{-\mu \frac{q^2}{c}} \; | q , \nu \rangle , \end{cases}$$

il vient

$$
(57)\quad \begin{cases} G = \langle L | T\, q_{i_1}^{\prime P}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}^{\prime P}(t_n)\, S' \,| R \rangle \\ \\ S = U_1(\infty, -\infty) . \end{cases}
$$

En regroupant (54) (55) et (57) on a la formule

$$
(58)\quad \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to -\infty} \langle L | T\, \hat{q}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}(t_n) \,| q_0, t_0 \rangle^{R} = \\ \\ = \langle L | T\, q_{i_1}^{\prime P}(t_1) \cdots q_{i_n}^{\prime P}(t_n)\, T\exp\left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, H_I(\hat{q}_i^{\prime P}(\tau)) \right\} | R \rangle . \end{cases}
$$

Pour procéder à la réduction des T produits, il nous faut maintenant un théorème de Wick généralisé car il apparaît des T produits non définis (opérateurs ne commutant pas pris au même temps).

Remarquons que la T-exponentielle est bien définie (comme solution de l'équation (53)) et qu'il en se présente pas là d'ambiguité :

$$
T\exp - i \int d\tau\, H_I(\hat{q}_i^{\prime P}(\tau)) \overset{\text{déf}}{=}
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n\, T[\, H_I^{\prime P}(\tau_1) \cdots H_I^{\prime P}(\tau_n) \,] ,
$$

les $H_I^{\prime P}(\tau_i)$ commutant entre eux quand $\tau_i = \tau_j$, le T produit est bien défini, si l'on pose

$$
(59)\quad T[\, H_I^{\prime P}(\tau_i)\, H_I^{\prime P}(\tau_i) \,] = H_I^{\prime P}(\tau_i)\, H_I^{\prime P}(\tau_i) \;;\quad H_I^{\prime P}(\tau) \equiv H_I(\hat{q}_i^{\prime P}(\tau)) .
$$

Les seules ambiguités dans (58) correspondent donc aux $\hat{q}_2^{\prime P}(t)$ (fonctions de réponses) ; cependant nous ne pouvons directement utiliser un théorème de Wick non défini pour les contractions à temps égaux, car il apparaîtrait alors dans la série de perturbation des termes non définis correspondant aux contractions d'opérateurs pris dans un même $H_I^{\prime P}(\tau_j)$ c'est à dire graphiquement aux tadepoles.

Nous procédons maintenant à la définition du théorème de Wick généralisé, les références et les démonstrations des formules utilisées se trouvent dans l'appendice A.

Pour commencer, définissons ($\hat{p}$, $\hat{q}$ nos opérateurs vérifiant $[\hat{q}, \hat{p}] = i$) la fonction

$$
(60)\quad D_\alpha(x,y) = e^{\frac{i}{2}(1-2\alpha)xy}\, e^{i(x\hat{p} + y\hat{q})} .
$$

A la fonction de l'espace des phases (p, q sont des nombres - c).

A (p,q) nous faisons correspondre l'opérateur α - ordonné

(61) $$\left\{ A(p,q) \right\}_\alpha = A\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} \right) D_\alpha(x,y) \Big|_{\substack{x=0\\y=0}} .$$

La correspondance est linéaire et on peut montrer (voir Appendice A formule 18)

(62) $$\left\{ A(p)\, B(q) \right\}_\alpha = A\left(\hat{p} + i\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{q}}\right) B(\hat{q}) .$$

Maintenant, étant donné un opérateur A($\hat{p}$, $\hat{q}$), nous définissons le scalaire $a_\alpha(p,q)$ qui lui est associé par la formule

(63) $$\left\{ a_\alpha(p,q) \right\}_\alpha = A(\hat{p}, \hat{q}) .$$

On peut montrer (voir Appendice A formule 22)

(64) $$a_\alpha(p,q) = e^{-i\alpha \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}}\, a_N(p,q)$$

où $a_N(p,q)$ est défini par

(65) $$a_N(p,q) = a_0(p,q)$$

soit $\left\{ a_N(p,q) \right\}_0 = A(\hat{p}, \hat{q})$,

soit, d'après (62)

(66) $$a_N(p,q) = \frac{\langle p | A(\hat{p},\hat{q}) | q \rangle}{\langle p | q \rangle} ,$$

et donc on a

(67) $$a_\alpha(p,q) = e^{-i\alpha \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}}\, \frac{\langle p | A(\hat{p},\hat{q}) | q \rangle}{\langle p | q \rangle} .$$

Remarquons que les opérateurs de la représentation interaction $\hat{q}_I^{IP}(t)$ s'expriment en terme des opérateurs de Schrödinger explicitement, avec notre Hamiltonien (46) on trouve

(68) $$\begin{cases} \hat{p}^{IP}(t) = \hat{p}\, e^{\mu t} \\ \hat{q}^{IP}(t) = \hat{q}\, e^{-\mu t} - \frac{ic}{2\mu}\left(e^{\mu t} - e^{-\mu t}\right)\hat{p} , \end{cases}$$

(c'est la solution des équations de mouvements pour les champs libres).

Nous définissons, par abus de notation

(69) $$\{A(\hat p,\hat q)\}_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \{A(p,q)\}_\alpha \ ,$$

(remarquons qu'avec cet abus de notation, on doit traiter les opérateurs sous le signe $\{\ \}_\alpha$ comme des grandeurs commutantes, comme c'est le cas pour le T-produit).

On a alors que, par linéarité, des quantités comme

$$\{A(\hat q_{i_1}^{IP}(t_1),\ \hat q_{i_2}^{IP}(t_2))\}_\alpha$$

bien définies.

Nous définissons maintenant le T_α produit de m opérateurs $t_i \neq t_j \ \forall\, i,j \in [1,m]\cap \mathbb{N}$

(70) $$T_\alpha[A_1(\hat q_1^{IP}(t_1)) \ldots\ldots A_m(\hat q_1^{IP}(t_m))]$$
$$= T_\alpha[A_{\pi(1)}(\hat q_1^{IP}(t_{\pi(1)}))] \ldots\ldots T_\alpha[A_{\pi(m)}(\hat q_1^{IP}(t_{\pi(m)}))] \ ,$$

avec $t_{\pi(1)} > t_{\pi(2)} \ldots\ldots > t_{\pi(m)}$

et

(71) $$T_\alpha[A_i(\hat q_1^{IP}(t))] \overset{\text{déf}}{=} e^{iH_0t}\{A_i(\hat q_1)\}_\alpha\, e^{-iH_0t} \ .$$

Cette définition s'étendant comme d'habitude par linéarité.

Remarquons qu'en général $T_\alpha[A(\hat q_1^{IP})] \neq \{A(\hat q_1^{IP})\}_\alpha$,

avec cette définition on a alors

(72) $$T_\alpha[a_\alpha(\hat q_1^{IP}(t))] = A(\hat q_1^{IP}(t)) \ .$$

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour donner le théorème de Wick généralisé

(73) $$T_\alpha[\hat q_{i_1}^{IP}(t_1) \ldots\ldots \hat q_{i_n}^{IP}(t_n)] =$$
$$= \left\{ Z^0_{\alpha\alpha'}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q_1}\right] q_{i_1}(t_1) \cdots q_{i_n}(t_n)\right\}_{\alpha'} \ ,$$

avec (l'exponentielle génèrant toutes les contractions)

(74) $$Z^0_{\alpha\alpha'}[\eta] = \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{ij}\int_{t_0}^{\infty} d\tau\, d\tau' \ \times$$
$$\times\ \underbrace{\hat q_i^{IP}(\tau)\ q_j^{IP}(\tau')}_{\alpha \qquad \alpha'}\ \eta_i(\tau)\ \eta_j(\tau')\Big] \ ,$$

ou

$$\underset{\alpha}{\hat{q}_i^{\prime p}(\tau)}\;\underset{\alpha'}{\hat{q}_j^{\prime p}(\tau')} = T_\alpha\left[q_i^{\prime p}(\tau)\, q_j^{\prime p}(\tau') \right] - \tag{75}$$

$$- \left\{ \hat{q}_i^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}_j^{\prime p}(\tau') \right\}_{\alpha'} .$$

A l'aide de ce théorème, nous pouvons réduire la matrice S .

En effet, en utilisant (72) et (70), voir aussi la remarque qui suit l'équation (58), nous pouvons réécrire (58) comme

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \langle L | T\, \hat{q}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}(t_n) | q_0, t_0 \rangle^R =$$

$$= \langle L | T_\alpha\, \hat{q}_{i_1}^{\prime p}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}^{\prime p}(t_n) \exp\left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, \times \right. \tag{76}$$

$$\left. \times\, h_{I\alpha}\left(\hat{q}_i^{\prime p}(\tau)\right) \right] | R \rangle$$

Et en appliquant le théorème de Wick généralisé pris pour $\alpha' = 0$, on remarque que le second terme du membre de droite de (75) s'annule entre $\langle L|$ et $|R\rangle$ sauf dans le cas où les deux $\hat{q}_i^{\prime p}$ sont des $\hat{q}^{\prime p}$, auquel cas il cancelle juste la valeur des termes $\hat{q}\hat{q}$ non contractés dans (74) pris entre $\langle L|$ et $|R\rangle$ on voit que les règles de Feynman s'obtiennent en :

- lisant les vertex dans $h_{I\alpha}\left(\hat{q}_i^{\prime p}(t)\right)$
- prenant pour propogateur : $\langle L | T_\alpha\, \hat{q}_i^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}_j^{\prime p}(\tau') | R \rangle$

soit $\langle L | T_\alpha\, \hat{p}^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}^{\prime p}(\tau') | R \rangle = \rightsquigarrow$

$\langle L | T_\alpha\, \hat{q}^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}^{\prime p}(\tau') | R \rangle =$ ——

le propagateur pp étant nul $\left(\langle L | \hat{p} = 0 \text{ et } \hat{p}^{\prime p} = \hat{p}\, e^{\mu t} \right)$

calculons l'expression de ces propagateurs.

Si $\tau \neq \tau'$ d'après les définitions (70) et (71)

$$\langle L | T_\alpha\, \hat{p}^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}^{\prime p}(\tau') | R \rangle = \langle L | T\, \hat{p}^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}^{\prime p}(\tau') | R \rangle ,$$

si $\tau = \tau'$

$$\langle L | T_\alpha\, \hat{p}^{\prime p}(\tau)\, \hat{q}^{\prime p}(\tau) | R \rangle = \langle L | e^{iH_0\tau} \{ \hat{p}\, \hat{q} \}_\alpha\, e^{-iH_0\tau} | R \rangle ,$$

soit, comme $\langle L | e^{iH_0 t} = \langle L |$

$e^{-iHt} | R \rangle = | R \rangle ,$

($|R\rangle$ est un état stationnaire de H_0) et $\{ p\, q \}_\alpha = pq + i\alpha$

$$(77)\quad \begin{cases} \tau \text{ } \end{cases}$$

 $= i\alpha$

$\tau \rightsquigarrow \tau' = \langle L | T\, \hat{p}^{IP}(\tau)\, \hat{q}^{IP}(\tau') | R \rangle \quad , \tau \neq \tau'.$

En calculant de même on trouve

$$(78)\qquad \tau \underline{\qquad} \tau' = \langle L | T\, \hat{q}^{IP}(\tau)\, q^{IP}(\tau') | R \rangle .$$

Soit, pour résumer

(79)
$h_{I\alpha}(\hat{q}, \hat{p})$ donne les vertex, α-dépendants
$\rightsquigarrow$ est donné par (77), les tadepoles sont α-dépendants
$\underline{\qquad}$ est donné par (78), α-indépendant.

Le résultat devant bien sûr être α-indépendant, nous concluons qu'il doit y avoir un mécanisme de cancellation entre les tadepoles et les termes α-dépendants de $h_{I\alpha}$.

Nous nous trouvons dans un cas semblable à celui étudié dans le chapitre I 1.4, ce qui est normal étant donné que si H_I est diagonal, le modèle que nous traitons se réduit à celui du chapitre I.1.4.

Remarquons pour terminer que quand on réduit (76), on ne se débarasse pas complètement du T produit : en effet les $h_I(q_1^{IP})$ sont des matrices qui ne commutent pas entre elles pour des temps différents, il reste donc dans les règles de Feynman un T qui indique que les matrices arrivant à chaque vertex doivent être prises dans l'ordre chronologique.

II.4. CONSTRUCTION DU FORMALISME FONCTIONNEL ET THEORIE DE PERTURBATION

Dans ce paragraphe, les intégrales fonctionnelles sont toutes discrétisées en $\gamma(0)$, pour alléger la notation, nous n'écrirons pas explicitement le symbole $\gamma(0)$. Les discussions du chapitre I.1.3 et I.1.4. nous montrent que le résultat final ne dépend pas de ce choix, pourvu que l'on prenne dans la théorie de perturbation les tadepoles = 0.

Suivant le paragraphe précédent, et aussi suivant I.3, nous avons vu que cela revient à exprimer l'Hamiltonien dans l'ordre $\{\ \}_\alpha$ pour $\alpha = 0$, c'est à dire avec les $\hat{p}$ à gauche ; notre Hamiltonien (36) étant dans ce cas, nous procédons directement à la construction du formalisme fonctionnel en déterminant la représentation fonctionnelle de

$$W(q, \nu, t\,; q_0, \nu_0, t_0) = \langle q, \nu | U(t, t_0) | q_0, \nu_0 \rangle ,$$

en insérant n relations de fermeture $1 = \sum'_{\nu_j} \int dq_j\, |q_j, \nu_j\rangle\langle q_j, \nu_j|$

aux temps $t_j = j\varepsilon + t_0 \;,\; j \in [1, n] \cap \mathbb{N} \,,\; \varepsilon = \dfrac{t - t_0}{n+1}$

(aussi $t_{n+1} = t$) il vient

$$\langle q, \nu | U(t, t_0) | q_0, \nu_0 \rangle =$$

(80)
$$= \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n}' \int \prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{j=1}^{n+1} \langle q_j, \mu_j | U(t_j - t_{j-1}) | q_{j-1}, \mu_{j-1} \rangle ,$$

on a $U(t_j, t_{j-1}) = 1 - i\varepsilon H(\hat{p}, \hat{q}) + O(\varepsilon^2)$,

et le calcul de $\langle q_j, \mu_j | H(\hat{p}, \hat{q}) | q_{j-1}, \mu_{j-1} \rangle$

s'effectue exactement comme au chapitre I.1.3 équation (30), il vient

(81)
$$W = \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n}' \int \prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp i\varepsilon \left[p_j \frac{q_j - q_{j-1}}{\varepsilon} - h_{\mu_j \mu_{j-1}}(p_j, q_{j-1}) \right] ,$$

(82)
$$h_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\left(-i\frac{\varepsilon}{2}p^2 - p A(q,\nu)\right) - i M_{\nu\mu} .$$

En appelant $\hat{h}$ la matrice d'élément $h_{\mu\nu}$ il vient

(83)
$$W(q, \nu, t ; q_0, \nu_0 t_0) =$$
$$= \int \prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} \; P \prod_{j=1}^{n+1} \exp i\varepsilon \left[p_j \frac{q_j - q_{j-1}}{\varepsilon} - h(p_j, q_{j-1}) \right] \Bigg|_{\nu\nu_0}$$

où le symbole P indique que le produit des matrices doit être effectué de manière chronologique, c'est à dire comme dans (81).

Dans la limite $\varepsilon \to 0$ nous écrivons formellement (83) comme

(84)
$$W(q, \nu, t ; q_0, \nu_0, t_0) =$$
$$= \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \, P \exp i \int_{t_0}^{t} d\tau \left[p\dot{q} - \hat{h}(p(\tau), q(\tau)) \right] \delta(q(t) - q) \times$$
$$\times \, \delta(q(t_0) - q_0) \Big|_{\nu\nu_0}$$

On trouve en mécanique quantique des intégrales semblables à (84) dans le traitement de problèmes avec spin [23] , elles ont été étudiées dans ce contexte dans [24] , elles sont aussi parfois appelées intégrales produits.

Notre définition pour une intégrale produit est donc (voir (83) et (84))

$$P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{h}(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} P\prod_{j=1}^{n+1} \exp[-i\varepsilon\, \hat{h}(\tau_{j-1})], \tag{85}$$

où le P dans le membre de droite indique que le produit des matrices doit être pris chronologiquement.

On démontre dans l'appendice B des formules relatives à ces intégrales, ainsi que le fait qu'elles admettent une expansion de Dyson

$$P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{h}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \cdots d\tau_n \; P[\hat{h}(\tau_1)\cdots \hat{h}(\tau_n)], \tag{86}$$

où le symbole P de Dyson ordonne chronologiquement les matrices.

Il est d'autre part évident, d'après (85), que si $\hat{h}_0$ est une matrice diagonale

$$P\exp -i\int d\tau\,(\hat{h}_0 + \hat{h}_I) = \tag{87}$$

$$= \left(P\exp -i\int d\tau\, \hat{h}_I(\tau)\right) \exp -i\int h_0\, d\tau \;, \quad \hat{h}_0 = h_0 \mathbb{1}$$

Ces formules seront utiles pour établir la théorie de perturbation.

Nous introduisons maintenant la fonctionnelle génératrice pour des conditions initiales $q(t_0) = q_0$, $\mu_0 = \nu_0$

$$Z[j, j^*] = \int Dq\, Dp\; P\exp i\int_{t_0}^{T} d\tau\, [\, p\dot{q} - \hat{h}(p(\tau)\, q(\tau)) + jq + j^* p\,]\; \delta(q(t) - q_0), \tag{88}$$

où il est compris qu'en discrétisant (88) il vient une matrice d'indices $\mu_{n+1}\, \mu_0$ et que l'on doit (suivant la définition de $\langle L|$) sommer sur μ_{n+1} et mettre $\mu_0 = \nu_0$.

<u>Proposition II.4</u>

Dans le cas où le membre de gauche est défini, on a

$$\langle L|T\hat{q}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}(t_n)|q_0, \nu_0 t_0\rangle^R = \tag{89}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{i_1}(t_1)} \cdots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{i_n}(t_n)}\; Z[j_1, j_2] \Big|_{\substack{j_1 = 0 \\ j_2 = 0}}$$

où on a posé $\hat{q}_1 = \hat{q}\;, \hat{q}_2 = \hat{p}\;, j_1 = j\;, j_2 = j^*$

Preuve :

En utilisant (87) on voit que l'on peut sortir l'intégrale sur j_1 et j_2 de la P exponentielle

$$Z[j_1, j_2] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; e^{i\int_{t_0}^{T} d\tau\,[j_1 q_1 + j_2 q_2]} \times$$

$$\times\; P\exp i\int_{t_0}^{T} d\tau\,\{p\dot{q} - h(p(\tau), q(\tau))\}\; \delta(q(t) - q_0)\,,$$

en calculant les dérivées fonctionnelles il vient

$q_{i_1}(t_1) \cdots q_{i_n}(t_n)$ que l'on peut placer, car ils commutent avec les matrices, dans la P exponentielle :

$$\Big[P\exp\int_{t_{\pi(1)}}^{T} -\Big]\, q_{i\pi(1)}(t_{\pi(1)})\,\Big[P\exp\int_{t_{\pi(2)}}^{t_{\pi(1)}} -\Big] \cdots$$

$$\cdots\; q_{i\pi(n)}(t_{\pi(n)})\,\Big[P\exp\int_{t_0}^{t_{\pi(n)}} - \quad \delta(q - q_0)\Big].$$

Or, en utilisant la définition des champs de Heisenberg dans le membre de gauche de (89) et en procédant alors comme nous l'avions fait pour construire la représentation fonctionnelle de $\langle q, \nu | U(t, t_0) | q_0\, \nu_0 \rangle$, on arrive à la même expression.

Proposition II.5

Les fonctions $\langle L | T \hat{q}_{i_1}(t_1) \cdots \hat{q}_{i_n}(t_n) | q_0\, \nu_0\, t_0 \rangle^R$

sont les fonctions de corrélation et de réponse du processus non Markovien q(t).

Preuve : nous procédons comme pour la proposition I.4.

On ajoute dans l'équation de Langevin une force exterieure $g(t)$, cela a pour effet de modifier l'Hamiltonien

$$\hat{h} \to \hat{\tilde{h}} = \hat{h} + pg$$

ce qui a pour effet d'ajouter $-pg$ au Lagrangien dans (88) et donc

$$\frac{\delta}{\delta g}\tilde{Z}\Big|_{g=0} = -\frac{\delta}{\delta j^*} Z\Big|_{j^*=0}\,.$$

de sorte que, par exemple, pour la fonction de réponse

$$\frac{\delta}{\delta g(t)}\langle q(t') \rangle\Big|_{g=0} = \frac{\delta}{\delta g(t)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t')}\tilde{Z}[j, j^*]\Bigg|_{\substack{j=0\\ j^*=0\\ g=0}}$$

$$= -i\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(t')} Z[j, j^*]\Big|_{\substack{j=0\\ j^*=0}}$$

$$= -i\,\langle L | T\, p(t)\, q(t') | q_0\, \nu_0\, t_0 \rangle^R.$$

le même raisonnement s'étendant quand plusieurs p et q sont présents C.Q.F.D.

La théorie de perturbation se construit comme d'habitude : on avait pour la fonctionnelle génératrice l'expression

$$Z[J,J^*] = \int Dq\, Dp\; P\exp i\int d\tau \left[p\dot{q} - \hat{h}(p,q) + + Jq + J^* p \right] \delta(q(t_0) - q_0)\,,$$

en écrivant $\hat{h} = \hat{h}_0 + \hat{h}_I$, avec $\hat{h}_0$ diagonale, on voit en utilisant (87) et en remarquant que $p\dot{q} - \hat{h}_0 - Jq - J^* p$ est diagonale.

$$Z[J,J^*] = \int Dq\, Dp \left[P\exp -i\int d\tau\, \hat{h}_I(p,q) \right] \times$$
$$\times\; \exp i\int d\tau \left[p\dot{q} - h_0 + Jq + J^* p \right] \delta(q(t_0) - q_0)$$

$$Z[J,J^*] = \int Dq\, Dp \left[P\exp -i\int d\tau\, \hat{h}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right) \right]$$
$$\times\; \exp i\int d\tau \left[p\dot{q} - h_0 + Jq + J^* p \right] \delta(q(t_0) - q_0)\,,$$

soit

$$Z[J,J^*] = P\exp -i\int d\tau\, \hat{h}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right) Z_0[J,J^*]$$

(90)

$$Z_0[J,J^*] = \int Dq\, Dp\, \exp i\int d\tau \left[p\dot{q} - \hat{h}_0(p,q) + Jq + J^* p \right] \times \delta(q(t_0) - q_0)\,,$$

(89) et (90) forment la théorie de perturbations en développant la $P\exp$ de (90) en série de Dyson suivant (86).

On peut également regrouper ces formules en utilisant aussi

$$F\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*}\right] G[J,J^*] \Big|_{\substack{J=0\\ J^*=0}} =$$

$$= G\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right] F[q,p] \Big|_{\substack{q=0\\ p=0}}\,,$$

qui a été démontrée dans le chapitre II (1) (calcul précédant l'équation (47), on peut effectuer les commutations car Z_0 est diagonal)

$$\langle F[p,q] \rangle_{q_0 \nu_0} = Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta q}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta p}\right] \times$$

(91)
$$\times \left[F[p,q] \, P\exp - i\int d\tau \, h_I(p(\tau), q(\tau)) \right]\Bigg|_{\substack{p=0 \\ q=0}} ,$$

où la même remarque que pour Z s'applique : (91) est une matrice d'élément $\mu\nu$, on doit sommer sur μ et mettre $\nu = \nu_0$.

Le développement de Dyson de la $P\exp$ donne la théorie des perturbations.

Dans la limite $t_0 \to -\infty$ Z_0 est donné par la même expression que I.4 (54) et (55) (comparer II (46) et l'équation (46) de ce chapitre, les Hamiltoniens libres sont les mêmes, simplement multipliés par la matrice identité ici).

Nous pouvons donc lire les règles de Feynman sur (91) dans la limite stationnaire, $Z_0[J, J^*]$ génère les contractions

$$\rightsquigarrow = \overline{p(t) \quad q(0)} = S(t) = \langle L | T \hat{p}(t) \hat{q}(0) | R \rangle_{H=H_0} = TF\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{p - i\mu}\right)$$

$$\longrightarrow = \overline{q(t) \quad q(0)} = \Delta(t) = \langle L | T \hat{q}(t) \hat{q}(0) | R \rangle_{H=H_0} = TF\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{p^2 - \mu^2}\right)$$

Le vertex d'interaction se lit sur $\hat{h}_I$, c'est une matrice et dans un graphe de Feynman d'ordre n, il reste un produit P ordonnant chronologiquement les vertex dûs au développement de Dyson de la P exponentielle.

Ce sont bien les mêmes règles que celles dérivées au chapitre précédent dans le formalisme opérateur pour $\alpha = 0$ correspondant au fait que nous avons construit le formalisme fonctionnel dans la discrétisation $\gamma(0)$.

III. 0 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous utilisons la technique de l'intégration sur les variables de Grassman [15] pour réduire les intégrales fonctionnelles produit du chapitre II à des intégrales fonctionnelles standard, dans le cas où le processus discret $m(t)$ peut prendre deux valeurs.

Dans le premier paragraphe, nous montrons comment exprimer la P-exponentielle comme une intégrale sur les variables de Grassman, l'expression obtenue diffère d'une gaussienne standard : elle contient des facteurs anticommutants ordonnés par un produit P.

Le second paragraphe est consacré à l'évaluation d'une intégrale quelconque de ce type (intégrale P-gaussienne), nous obtenons une formule générale pour la valeur d'une telle intégrale.

Dans le troisième paragraphe, nous appliquons cette formule au résultat du premier paragraphe.

Enfin, dans le dernier paragraphe, nous simplifions les expressions obtenues, cette simplification étant dûe à l'expression spéciale de la forme quadratique apparaissant dans l'intégrale du premier paragraphe.

Remarquons que la formule obtenue dans le paragraphe 2 est plus générale que les résultats finaux de ce chapitre qui n'en sont qu'une application et qui peuvent aussi être obtenus par d'autres techniques (voir le chapitre V).

III. 1. LA P-EXPONENTIELLE ET LES VARIABLES DE GRASSMAN

Dans le chapitre II, nous avons vu que le processus stochastique non Markovien décrit par l'équation de Langevin modifiée

$\alpha \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta}$ est une matrice constante.

(1) $$\dot{q}^{\alpha}(t) + A^{\alpha}(\vec{q}(t), m(t)) = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta} f^{\beta}(t),$$

où $f^{\beta}(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, et de corrélation

(2) $$\{ f^{\alpha}(t) f^{\beta}(t') \} = \delta^{\alpha\beta} \delta(t - t'),$$

et $m(t)$ est un processus Markovien défini indépendamment $m(t) = \nu \in [1, N] \cap \mathbb{N}$ de matrice de transition $M_{\mu\nu}$,

avait pour fonctionnelle génératrice de ses fonctions de corrélation et de réponse l'expression

(3) $$Z_{\nu_0}[\vec{J}, \vec{J}^*] = \int_{\mu_0 = \nu_0} D\vec{q}\, D\vec{p}\ \ P \exp i \int_{t_0}^{T} d\tau [\vec{p}\dot{\vec{q}} - \hat{h} + \vec{J}\vec{q} + \vec{J}^*\vec{p}]\, \delta(\vec{q}(t_0) - \vec{q}_0),$$

(3) étant défini comme la limite $n \longrightarrow \infty$ de l'intégrale

$$\left(t - t_0 = (n+1)\varepsilon \ , \quad \Delta\vec{q}_j = \vec{q}_j - \vec{q}_{j-1} \right)$$

(4)
$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} \int \prod_{i=1}^{n} d\vec{q}_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^M} \prod_{j=1}^{n+1} \exp i\varepsilon \left[\vec{p}_j \frac{\Delta\vec{q}_j}{\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - h_{\mu_j \mu_{j-1}} (\vec{p}_j, \vec{q}_{j-1}) + \vec{J}_j \vec{q}_j + \vec{J}_j^* \vec{p}_j \right],$$

ou

(5)
$$h_{\mu\nu}(\vec{p}, \vec{q}) = \delta_{\mu\nu} \left(-\tfrac{1}{2} D^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - p_\alpha A^\alpha(\vec{q}, \nu) \right) - i M_{\nu\mu} ,$$
$$D^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{M} \sigma_\gamma^\alpha \sigma_\gamma^\beta .$$

Notons que nous avons procédé à la généralisation triviale des formules du chapitre II correspondant à $q(t) \in \mathbb{R} \longrightarrow$ $\longrightarrow \vec{q}(t) \in \mathbb{R}^M$, et que nous utilisons des lettres du début de l'alphabet grec pour les indices du processus q(t) et de la fin pour les indices du processus $m(t)$. .

En posant dans (4) $\mu_{n+1} = \mu$, on voit d'après (3) et (4) que nous pouvons écrire

$Z_{\nu_0} = \sum_\mu Z_{\mu\nu_0}$ si $b(\nu_0)$ est la probabilité que $m(t_0) = \nu_0$ alors la fonctionnelle génératrice correspondant à cette condition initiale est

$$Z = \sum_{\mu\nu_0} b(\nu_0) Z_{\mu\nu_0}$$

et donc si nous connaissons les N^2 quantités $Z_{\mu\nu}$, nous connaissons Z . Chaque $Z_{\mu\nu}$ est l'élément $(\mu\nu)$ de (4) où on a supprimé la somme sur μ_{n+1} . $Z_{\mu\nu}$ peut donc s'écrire

(5)
$$Z_{\mu\nu} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \int \prod_{i=1}^{n} d\vec{q}_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^M} \prod_{j=1}^{n+1} \exp i\varepsilon \left[\vec{p}_j \frac{\Delta\vec{q}_j}{\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - H_{\mu_j \mu_{j-1}} (\vec{p}_j, \vec{q}_{j-1}, t_{j-1}) \right]$$
$$(\text{ou } \mu = \mu_{n+1} \ ; \ \nu = \mu_0)$$

où nous avons incorporé les sources dans H.

Nous nous proposons, à l'aide des variables de Grassman d'effectuer dans (5) la somme sur $\mu_1 \dots \mu_n$ et donc de réduire (5) à une intégrale fonctionnelle standard.

Nous traitons ici le cas $N=2$ (le cas $N>2$ peut être traité de façon similaire) et nous considérons un H complètement général c'est à dire que : (nous prenons les indices de $m(t)$ dans $[0,1] \cap \mathbb{N}$ plutôt que dans $[1,2] \cap \mathbb{N}$, voir la remarque du chapitre II suivant l'équation (4)

Soient $\tilde{Z}$ et $\tilde{H}$ les matrices (2×2) d'éléments $Z_{\mu\nu}$ et $H_{\mu\nu}$ et $\mathbb{1}$ la matrice identité, $\hat{a}^+, \hat{a}$ les opérateurs fermioniques de création et d'annihilation habituels vérifiant

$$[\hat{a}, \hat{a}^+]_+ = \mathbb{1}$$

explicitement

(6)
$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{a}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

nous posons

(7)
$$\hat{H}(\vec{p},\vec{q},t) = -d(\vec{p},\vec{q},t)\mathbb{1} - a(\vec{p},\vec{q},t)\,\hat{a}^+\hat{a} - b(\vec{p},\vec{q},t)\hat{a}^+ - c(\vec{p},\vec{q},t)\,\hat{a},$$

alors, d'après (4)

$$t_j = t_0 + j\varepsilon$$

(8)
$$\tilde{Z} = \int \prod_{i=1}^{n} d\vec{q}_i \prod_{j=1}^{n+1} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^M} \exp i\varepsilon \sum_{j=1}^{n+1} \left[\vec{p}_j \frac{\Delta \vec{q}_j}{\varepsilon} + d_j\right]\mathbb{1} \,.$$
$$. \, P \prod_{j=1}^{n+1} \exp i\varepsilon \left[a_j\, \hat{a}^+\hat{a} + b_j\,\hat{a}^+ + c_j\,\hat{a}\right],$$

où on a posé

(9)
$$a_j = a(\vec{p}_j, \vec{q}_{j-1}, t_{j-1})$$
$$b_j = b(\vec{p}_j, \vec{q}_{j-1}, t_{j-1})$$
$$c_j = c(\vec{p}_j, \vec{q}_{j-1}, t_{j-1})$$
$$d_j = d(\vec{p}_j, \vec{q}_{j-1}, t_{j-1}) \,.$$

Nous allons donc dans ce chapitre calculer explicitement la P-exponentielle de la matrice (2×2) la plus générale et réduire ainsi (8) à une intégrale fonctionnelle standard.

Dans ce but, nous introduisons les notations et formules relatives aux variables de Grassman que nous allons utiliser, ces formules sont expliquées dans l'appendice C.

Nous nous plaçons dans une algèbre de Grassman correspondant au nombre de générateurs que nous écrivons.

A une matrice (2×2) quelconque

(10)
$$\hat{B} = \sum_{\mu,\nu=0}^{1} K_{\mu\nu}\, \hat{a}^{+\mu}\, \hat{a}^{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{1} B_{\mu\nu}\, |\mu\rangle\langle\nu|$$

voir (6)

Nous faisons correspondre, (a^*, a sont des variables de Grassman indépendantes vérifiant $[a^*, a]_+ = [a^*, a^*]_+ = [a, a]_+ = 0$)

son symbole normal

(11)
$$B^{NS}(a^*, a) = \sum_{\mu\nu=0}^{1} K_{\mu\nu}\, a^{*\mu} a^{\nu}$$

et son Kernel

(12) $$B(a^*,a) = \sum_{\mu\nu=0}^{1} B_{\mu\nu}\, a^{*\mu} a^{\nu}$$

vérifiant la relation

$$\left(e^{a^*a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^+a)^n}{n!} = 1 + a^*a \right)$$

(13) $$B(a^*,a) = e^{a^*a}\, B^{NS}(a^*,a) .$$

On pose les règles d'intégration suivantes (voir la remarque suivant l'équation (18) de l'appendice C)

(14) $$\begin{cases} \int da\, 1 = \int da^*\, 1 = \int da\, a^* = \int da^*\, a = 0 , \\ \int da\, a = \int da^*\, a^* = 1 . \end{cases}$$

Les règles s'étendent par linéarité, les intégrales multiples sont définies par itération, aussi on a les relations

(15) $$\begin{aligned} 0 &= [a, da]_+ = [a, da^*]_+ = [a^*, da]_+ = \\ &= [a^*, da^+]_+ = [da, da^*]_+ = [da, da]_+ = \\ &= [da^*, da]_+ \end{aligned}$$

On a alors que :

si $\hat{A}\hat{B} = \hat{C}$, le Kernel de C est donné par la formule

(16) $$C(a^*,a) = \int d\alpha^*\, d\alpha\; e^{-\alpha^*\alpha} A(a^*,\alpha)\, B(\alpha^*,a),$$

où α^* et α sont de nouvelles variables de Grassman vérifiant les relations analogues à (14) et (15).

La P-exponentielle figurant dans (8) peut s'écrire

(17) $$\hat{A} = P \prod_{j=1}^{n+1} \exp i\varepsilon \left[a_j \hat{a}^+ \hat{a} + b_j \hat{a}^+ + c_j \hat{a} \right],$$

soit

(18) $$\hat{A} = \hat{A}_{n+1} \dots \hat{A}_1 = P \prod_{j=1}^{n+1} \hat{A}_j ,$$

avec

(19) $$\begin{aligned} \hat{A}_j &= \exp i\varepsilon \left[a_j \hat{a}^+ \hat{a} + b_j \hat{a}^+ + c_j \hat{a} \right] = \mathbb{1} + i\varepsilon \left[a_j \hat{a}^+ \hat{a} + \right. \\ &\left. + b_j \hat{a}^+ + c_j \hat{a} \right] + O(\varepsilon^2) . \end{aligned}$$

Nous négligeons les termes en ε^2 car arrivant $n+1$ fois dans le produit (18) et comme $n+1 \sim \varepsilon^{-1}$ ils y contribuent à l'ordre $\varepsilon^2 \varepsilon^{-1} = \varepsilon$, la P-exponentielle étant définie dans la limite $\varepsilon \to 0$, leur contribution est nulle (a, b et c étant suffisamment réguliers).

En appliquant (10) et (11) à (19) on a

(20) $$A_j^{NS}(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) = \mathbb{1} + i\varepsilon(a_j\,\alpha_j^*\alpha_{j-1} + b_j\,\alpha_j^* + c_j\,\alpha_{j-1}),$$

et en utilisant que $e^\Theta = 1+\Theta$ si $\Theta^2 = 0$
et qu'une quantité comme $\alpha_j^*\alpha_{j-1}$ commute avec tout

$$A_j^{NS}(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) = \exp i\varepsilon\left[a_j\,\alpha_j^*\alpha_{j-1} + b_j\,\alpha_j^* + c_j\,\alpha_{j-1}\right],$$

en utilisant (13) on a pour le Kernel de A_j

$$A_j(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) = e^{\alpha_j^*\alpha_{j-1}} \exp i\varepsilon\left[a_j\alpha_j^*\alpha_{j-1} + b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_{j-1}\right],$$

soit

(21) $$A_j(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) = e^{(1+i\varepsilon a_j)\alpha_j^*\alpha_{j-1}} \exp i\varepsilon\left[b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_{j-1}\right].$$

En utilisant n fois la relation (16) on a pour le Kernel de $\hat{A}$ l'expression

$$A(\eta^*,\eta) = \int_{\alpha_0=\eta}^{\alpha_{n+1}^*=\eta^*} \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i^*\,d\alpha_i \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i^*\alpha_i}\; P \prod_{i=1}^{n+1}\left[e^{(1+i\varepsilon a_j)\alpha_j^*\alpha_{j-1}}\,\times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[i\varepsilon(b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_{j-1})\right]\right],$$

soit, en sortant du produit P tout ce qui commute

(22) $$A(\eta^*,\eta) = \int_{\alpha_0=\eta}^{\alpha_{n+1}^*=\eta^*} \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i^*\,d\alpha_i \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i^*\alpha_i) + \sum_{j=1}^{n+1} s_j\,\alpha_j^*\alpha_{j-1}\right\} P\prod_{i=1}^{n+1}\exp\left[i\varepsilon(b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_{j-1})\right],$$

où nous avons utilisé $e^A e^B = e^{A+B}$ si $[A,B]=0$
et posé

(23) $$s_j = 1 + i\varepsilon a_j\ .$$

Nous procédons maintenant à quelques transformations qui laissent l'intégrale invariante dans la limite $\varepsilon \to 0$.

La première exponentielle de (22) peut s'écrire

(24) $$\exp\left[-\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i^*\,B_{ij}\,\alpha_j + \sum_{\ell=1}^{n}(\alpha_\ell^* j_\ell + j_\ell^*\alpha_\ell)\right],$$

où on a posé

$$B_{ij} = \delta_{ij} - s_i\,\delta_{i,j+1}$$

(25) $$j_1 = s_1\eta\ ,\ j_\ell = 0 \quad \ell \in [2,n]\cap\mathbb{N}$$

$$j_n^* = s_{n+1}\eta^*\ ,\ j_\ell^* = 0 \quad \ell \in [1,n-1]\cap\mathbb{N}.$$

Dans la limite $\varepsilon \to 0$ $s_i = 1 + i\varepsilon a_i \to 1$; $s_{n+1} = 1 + i\varepsilon a_{n+1} \to 1$

et donc on peut mettre, sans changer la valeur de l'intégrale dans la limite $\varepsilon \to 0$

(26) $$j_1 = \eta \ , \ j_\ell = 0 \ , \ \ell \in [2, n] \cap \mathbb{N}$$
$$j^*_n = \eta^* \ , \ j^*_\ell = 0 \ , \ \ell \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}$$

la seconde exponentielle de (22) peut s'écrire

$$\exp[i\varepsilon(b_{n+1}\eta^* + c_{n+1}\alpha^*_n)]\, P \prod_{i=2}^{n} \exp i\varepsilon\, [b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_{j-1}]\, \exp i\varepsilon\, [b_1\alpha^* + c_1\eta]$$

les termes à gauche et à droite de la P exponentielle tendent vers 1 quand $\varepsilon \to 0$ et donc dans cette limite, on peut remplacer l'expression par

$$P \prod_{j=2}^{n} \exp i\varepsilon\, [b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_{j-1}]$$

D'autre part on a $c_{j-1} = c_j - \varepsilon \dfrac{c_j - c_{j-1}}{\varepsilon}$

et donc si c est suffisamment régulier, on a

$$c_{j-1} = c_j + \theta(\varepsilon)$$

et on peut remplacer l'expression par

$$P \prod_{j=2}^{n} \exp i\varepsilon\, [b_j\alpha_j^* + c_{j-1}\alpha_{j-1}]$$

On démontre dans le chapitre suivant, Proposition 1 que :

$$P \prod_{j=1}^{n} e^{\theta_j} = P\, e^{\sum_{i=1}^{n}\theta_i} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} P \Big[\sum_{i=1}^{n}\theta_i\Big]^n ,$$

où dans le second membre le symbole P ordonne chronologiquement les θ_i ($[\theta_i, \theta_j]_+ = 0$) c'est à dire $P(\theta_{i_1} \dots \theta_{i_n}) = \theta_{iM(1)} \dots \theta_{iM(n)}$

avec $$iM(1) > iM(2) > \dots > iM(n)$$

c'est l'équivalent pour les varaibles anticommutantes de la formule de Dyson.

Dans la limite continue, notre P exponentielle tend vers :

$$P\exp i \int d\tau\, [b(\tau)\alpha^*(\tau) + c(\tau)\alpha(\tau)]$$

Le P produit n'est pas défini pour des temps égaux, nous verrons plus loin que cette non définition du P produit pour des temps égaux ne joue aucun rôle, dans la mesure où nous préférons rester avec des indices discrets, nous remplaçons la P exponentielle par l'expression donnant la même limite continue (voir la remarque au début du paragraphe 3).

(27) $$P \prod_{i=1}^{n} \exp i\varepsilon\, [b_j\alpha_j^* + c_j\alpha_j]$$

En regroupant les formules, nous avons donc à calculer dans la limite $\varepsilon \to 0$

(28) $$A(\eta^*, \eta) = \int \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i^*\, d\alpha_i \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* B_{ij}\alpha_j + \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha_\ell^* j_\ell + j_\ell^* \alpha_\ell)\Big] P\exp i\varepsilon \sum_{\ell=1}^{n} (b_\ell\alpha_\ell^* + c_\ell\alpha_\ell)$$

où la P exponentielle est définie par (27) et on a

(29)
$$B_{ij} = \delta_{ij} - s_i\,\delta_{i,j+1} \quad , \quad s_i = 1 + i\varepsilon a_i$$
$$j_1 = \eta \quad , \quad j_\ell = 0 \qquad \ell \in [2,n] \cap \mathbb{N}$$
$$j_n^* = \eta^* , \quad j_\ell^* = 0 \qquad \ell \in [1,n-1] \cap \mathbb{N}$$

Nous appellerons, pour des raisons évidentes, (28) une intégrale P-gaussienne ; remarquons que dans (28) $\alpha_i, \alpha_i^*, j_i, j_i^*$ sont des quantités anticommutantes alors que b_j et c_j sont des nombres.

III.2. LE P_1 - PRODUIT ET L'INTEGRALE P-GAUSSIENNE

Nous développons dans ce chapitre les techniques necessaires pour évaluer (28), remarquons premièrement que (28) peut s'écrire

(30)
$$W[j^*,j] = P\exp\, i\varepsilon \sum_{\ell=1}^{n} \left[c_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell^*} - b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell} \right] \times$$
$$\times \int \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i^*\, d\alpha_i\, \exp\Big[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* B_{ij} \alpha_j +$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha_\ell^* j_\ell + j_\ell^* \alpha_\ell) \Big] ,$$

où les dérivées sont des dérivées à gauche (ce qui explique le signe - pour b_ℓ) ; l'intégrale figurant dans (30) est une gaussienne standard et sa valeur est [15]

(31)
$$\int \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i^*\, d\alpha_i\, \exp\Big[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* B_{ij} \alpha_j + \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha_\ell^* j_\ell + j_\ell^* \alpha_\ell) \Big]$$
$$= (\det B)\, \exp \sum_{k,\ell=1}^{n} j_k^* B_{k\ell}^{-1} j_\ell \; ,$$

de sorte que nous pouvons écrire (30) sous la forme

(32)
$$W[j^*,j] = (\det B)\, P\exp\, i\varepsilon \sum_{\ell=1}^{n} \left[c_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell^*} - b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell} \right] \times$$
$$\times \exp \sum_{k\ell=1}^{n} j_k^* B_{k\ell}^{-1} j_\ell \, .$$

Nous avons maintenant besoin de la

Proposition III.1 : soit θ_i , $i \in [1,n] \cap \mathbb{N}$ des variables de Grassman, alors :

$$P \prod_{i=1}^{n} e^{\theta_i} \overset{\text{def}}{=} P\exp \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$ admet

le développement de Dyson :

$$P\exp \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} P\Big[\sum_{i=1}^{n} \theta_i\Big]^n ,$$

où le produit chronologique est défini par :

$$P\left[\theta_{i_1}\dots\theta_{i_p}\right] = \theta_{iM(1)}\cdots\theta_{iM(p)}$$

avec

$$iM(1) > iM(2)\cdots > iM(p)$$

Preuve : calculons $P\prod_{i=1}^{n} e^{\theta_i} = P\prod_{i=1}^{n}(1+\theta_i)$

$$= (1+\theta_n)(1+\theta_{n-1})\cdots\cdots(1+\theta_2)(1+\theta_1)$$

$$= 1 + \sum_i \theta_i + \sum_{i_1>i_2}\theta_{i_1}\theta_{i_2} + \cdots + \sum_{i_1>i_2>\dots>i_n}\theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_n}.$$

Calculons $\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}P\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right]^n$, les termes $\ell>n$ de la somme sont tous nuls car il arrive au moins deux fois le même θ_i et $\theta_i^2=0$.

$$= 1 + \sum_i\theta_i + \frac{1}{2!}P\sum_{i_1 i_2}\theta_{i_1}\theta_{i_2} + \cdots + \frac{1}{n!}P\sum_{i_1 i_2\dots i_n}\theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_n},$$

or, dans la somme $\frac{1}{p!}\sum_{i_1\dots i_p}P(\theta_{i_1}\dots\theta_{i_p})$ chaque monome $\theta_{i_1}\dots\theta_{i_p}$ avec $i_1>i_2\dots>i_p$ arrive $p!$ fois dans tous les ordres possibles et est remis en ordre par le P- produit

et donc

$$\frac{1}{p!}\sum_{i_1\dots i_p}P\left[\theta_{i_1}\dots\theta_{i_p}\right] = \sum_{i_1>i_2\dots>i_p}\theta_{i_1}\dots\theta_{i_p},$$

les deux expressions ayant le même développement sont donc égales.CQFD

Pour appliquer la proposition 1 à (32) nous rencontrons un problème que nous discutons ici en détail :

On a besoin d'une généralisation de la proposition 1 pour une P-exponentielle du type : θ_i, θ_i^* variables de Grassamn indépendantes.

$P\prod_{i=1}^{n} e^{\theta_i+\theta_i^*}$ on pense tout de suite à écrire

(33) $$P\prod_{i=1}^{n} e^{\theta_i+\theta_i^*} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}P\left[\sum_{i=1}^{\ell}(\theta_i+\theta_i^*)\right]^n,$$

mais il apparaît dans le membre de droite de (33) des monomes non nuls ayant le même indice répété sur lesquels l'action du P produit n'est pas défini.

Comme $e^{\theta_i+\theta_i^*} = 1+\theta_i+\theta_i^* + (\theta_i+\theta_i^*)^2 =$
$= 1+\theta_i+\theta_i^*$ la situation dans (33) est claire : pour que (33) soit exacte, il faut étendre la définition du P produit en posant que le P produit d'un monome avec indices répétés est nul car ces monomes ne sont pas présents dans le membre de gauche de (33).

Cependant, dans la mesure où nous sommes intéressés à la limite continue($\varepsilon\to 0$) des formules et que dans cette limite les termes qui ont besoin d'une définition du P produit pour des temps égaux pour être définis ne contribuent pas (ce que nous vérifierons dans le résultat de nos calculs) nous préférons laisser la définition du P produit pour des temps (indices) égaux indéterminés et nous introduisons le symbole $\doteq$ dont le sens est que $A \doteq B$ veut dire $A = B + T$ où T représente des termes faisant intervenir le P produit pour des temps égaux.

Pour résumer, nous écrivons

(34) $$P \prod_{i=1}^{n} e^{\theta_i + \theta_i^*} \doteq \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} P\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\theta_i + \theta_i^*) \right]^n .$$

Dans le sens que l'on peut transformer cette relation en égalité en définissant le P produit de manière ad-hoc pour des indices égaux, ici en le prenant nul, mais que ce n'est pas nécessaire de le faire car cette extension du P produit a une contribution nulle quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

A l'aide de (34), (32) peut s'écrire

(35) $$W[\vec{j}^*, \vec{j}] \doteq (\det B) \, P\exp i\varepsilon \sum_{\ell=1}^{n} \left[c_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell^*} - b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell} \right] \times \exp \sum_{k\ell} j_k^* B_{k\ell}^{-1} j_\ell$$

où la P exponentielle représente son expansion de Dyson

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P\left[\sum_{\ell=1}^{n} \left(c_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell^*} - b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell} \right) \right]^k .$$

Pour continuer, nous avons besoin d'introduire la notation de P_1 - produit : (nous utilisons le mot temps dans le sens indice).

Définition 1.III : Soient des quantités (nombres ou variables de Grassman) définies à des temps différents $i_1 \ldots\ldots i_p$

$A_1(i_1) \ldots\ldots A_p(i_p)$ nous définissons leurs P_1 produits comme :

$$P_1\left[A_1(i_1) \ldots A_p(i_p) \right] \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_{1\ldots p}^{M(1)\ldots M(p)} \; A_1(i_1) \ldots A_p(i_p) ,$$

où $\varepsilon_{1\ldots p}^{i_1\ldots i_p}$ est le tenseur complètement antisymétrique $\varepsilon_{12\ldots p}^{12\ldots p} = 1$ et M est la permutation telle que

$$i_{M(1)} > i_{M(2)} > \ldots > i_{M(p)} .$$

La définition s'étend comme d'habitude par linéarité à des combinaisons linéaires de monomes.

Remarquons que le P_1 produit n'est pas défini pour des temps égaux.

Nous avons la

Proposition III.2 : si les $A_k(i_k)$ sont des quantités anticommutantes, soit

$$[A_k(i_k), A_\ell(i_\ell)]_+ = 0 \qquad \forall k,\ell \in [1,p] \cap \mathbb{N}$$

alors $$P[A_1(i_1) \ldots A_p(i_p)] = P_1[A_1(i_1) \ldots A_p(i_p)]$$

Preuve :

Par définition du P produit

$$P[A_1(i_1)\dots A_p(i_p)] = A_{M(1)}(i_{M(1)})\dots A_{M(p)}(i_{M(p)}),$$

où

$$i_{M(1)} > i_{M(2)} > \dots > i_{M(p)}$$

et comme

$$A_{M(1)}(i_{M(1)})\dots A_{M(p)}(i_{M(p)}) = \varepsilon^{M(1)\dots M(p)}_{1\dots p}\; A_1(i_1)\dots A_p(i_p)$$

(car les $A_\ell(i_\ell)$ étant anticommutants, en les permutant pour passer de l'ordre $M(1)\dots M(p)$ à l'ordre $1\dots p$, on récupère le signe de la permutation, c'est à dire $\varepsilon^{M(1)\dots M(p)}_{1\dots p}$).

La dernière expression est juste la définition du P_1- produit CQFD.

Comme conséquence de la proposition 2 nous avons la

Proposition III.3

Sous le symbole P_1 des quantités anticommutantes définies à des temps différents commutent.

Preuve : d'après la proposition 2, dans ce cas le P_1 produit peut être remplacé par un P-produit, d'après la définition du P produit, il est trivial que l'on peut effectuer sous le signe P une permutation quelconque sans changer la valeur du P-produit, ensuite en utilisant encore la proposition 2 on peut revenir au P_1 produit.

Proposition III.4

Sous le symbole P_1 des quantités commutantes définies à des temps différents anticommutent.

Preuve : soit ρ une permutation de $[1,p]\cap\mathbb{N}$ alors en utilisant la définition du P_1- produit.

$$P_1[A_1(i_1)\dots A_p(i_p)] = \varepsilon^{M(1)\dots M(p)}_{1\dots p}\; A_1(i_1)\dots A_p(i_p)$$

et

$$P_1[A_{\rho(1)}(i_{\rho(1)})\dots A_{\rho(p)}(i_{\rho(p)})] = \varepsilon^{M'(\rho(1))\dots M'(\rho(p))}_{\rho(1)\dots\rho(p)}\; A_{\rho(1)}(i_{\rho(1)})\dots A_{\rho(p)}(i_{\rho(p)})$$

$$= \varepsilon^{M'(\rho(1))\dots M'(\rho(p))}_{\rho(1)\dots\rho(p)}\; A_1(i_1)\dots A_p(i_p),$$

où nous avons utilisé la commutativité des $A_\ell(i_\ell)$, or, par définition du P_1 produit les permutations M et M' sont telles que

$$i_{M(1)} > i_{M(2)} > \dots > i_{M(p)}$$

$$i_{M'(\rho(1))} > i_{M'(\rho(2))} > \dots\; i_{M'(\rho(p))},$$

c'est à dire que $M = P \circ M'$ ($\circ$ est le produit de composition des permutations)

et donc $\varepsilon^{M'(P(1))\cdots M'(P(p))}_{P(1)\cdots P(p)} = \varepsilon^{M(1)\cdots M(p)}_{P(1)\cdots P(p)}$

$= \varepsilon^{M(1)\cdots M(p)}_{1\cdots p} \quad \varepsilon^{P(1)\cdots P(p)}_{1\cdots p}$

(le signe de la permutation $P(1)\cdots P(p) \to M(1)\cdots M(p) = P^{-1} \circ M$ est le produit des signes des permutations $1\cdots p \to M(1)\cdots M(p)$ et $1\cdots p \to P(1)\cdots P(p)$)

en regroupant nos équations il vient

$$P_1\{A_{P(1)}(i_{P(1)})\cdots A_{P(p)}(i_{P(p)})\} = \varepsilon^{P(1)\cdots P(p)}_{1\cdots p} \times$$

$$\times\ \varepsilon^{M(1)\cdots M(p)}_{1\cdots p} \quad A_1(i_1)\cdots A_p(i_p)$$

soit

$$P_1[A_{P(1)}(i_{P(1)})\cdots A_{P(p)}(i_{P(p)})] = \varepsilon^{P(1)\cdots P(p)}_{1\cdots p}\, P_1[A_1(i_1)\cdots A_p(i_p)]$$

CQFD

A l'aide de la proposition 2 nous pouvons réécrire (35) comme [$\left(c_\ell \frac{\partial}{\partial j^*_\ell} - b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell}\right)$ est anticommutant].

$$W[\bar{j}^*, \bar{j}] \doteq (\det B)\, P_1 \exp i\varepsilon \sum_{\ell=1}^{n} \left[c_\ell \frac{\partial}{\partial j^*_\ell} - b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell}\right] \times$$

(36) $$\times \exp \sum_{k,\ell=1}^{n} j^*_k B^{-1}_{k\ell} j_\ell \,,$$

où la P_1 exponentielle est définie par son expansion de Dyson, obtenue en appliquant la proposition 2 à l'expansion de Dyson de la P exponentielle.

Nous définissons maintenant :

Définition 2.III

$$P_1 \exp\left\{\sum_{k,\ell=1}^{n} (j^*_k + i\varepsilon c_k) B^{-1}_{k\ell} (j_\ell + i\varepsilon b_\ell)\right\}$$

(37) $$\doteq P_1\left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!}\left[i\varepsilon \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial}{\partial j^*_k}\right]^r \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!}\left[-i\varepsilon \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \frac{\partial}{\partial j_\ell}\right] \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} j^*_\alpha B^{-1}_{\alpha\beta} j_\beta\right\}\right],$$

le symbole P_1 s'appliquant aux c_k et b_ℓ.

C'est à dire que cette P_1 exponentielle est définie de la façon suivante :

on développe $\exp\left\{\sum_{k,l=1}^{n} (j_k^* + i\varepsilon c_k) B^{-1}_{kl} (j_l + i\varepsilon b_l)\right\}$
en série de c_k et b_l autour de j, j^* et on applique un P_1- produit sur les c_l et b_k.

On a alors la

Proposition III 5

$$W[j^*,j] \doteq (\det B)\, P_1 \exp\left\{\sum_{k,l=1}^{n} (j_k^* + i\varepsilon c_k) B^{-1}_{kl} (j_l + i\varepsilon b_l)\right\}.$$

Preuve : en utilisant dans (36) la proposition 3 on peut écrire

$$W[j,j^*] = (\det B)\, P_1 \left[\exp i\varepsilon \sum_{l=1}^{n} c_l \frac{\partial}{\partial j_l^*} \exp i\varepsilon \sum_{m=1}^{n} -b_m \frac{\partial}{\partial j_m}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{k,l=1}^{n} j_k^* B^{-1}_{kl} j_l\right\},$$

en développant les exponentielles dans cette expression, on obtient juste la définition 2. CQFD

En regroupant les équations (28), (30) et la proposition 5 nous voyons que nous avons finalement montré dans ce paragraphe que

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i^* \, d\alpha_i \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* B_{ij} \alpha_j + \sum_{l=1}^{n} (\alpha_l^* j_l +$$

$$+ j_l^* \alpha_l)\right] \exp i\varepsilon \sum_{l=1}^{n} (b_l \alpha_l^* + c_l \alpha_l) \doteq$$

$$\doteq (\det B)\, P_1 \exp\left\{\sum_{k,l=1}^{n} (j_k^* + i\varepsilon c_k) B^{-1}_{kl} (j_l + i\varepsilon b_l)\right\}, \tag{38}$$

le membre de droite de (38) étant défini par (37).

III.3 APPLICATION AU CALCUL DE LA P EXPONENTIELLE

Remarquons que si nous n'avions pas, au chapitre 1 fait le remplacement

$$P \prod_{j=2}^{n} \exp i\varepsilon [b_j \alpha_j^* + c_{j-1} \alpha_{j-1}] \to P \prod_{j=1}^{n} \exp i\varepsilon [b_j \alpha_j^* + c_j \alpha_j]$$

(équation (27)) cela aurait eu pour effet de remplacer dans l'équation (30)

$$P\exp i\varepsilon \sum_{l=1}^{n} \left[c_l \frac{\partial}{\partial j_l^*} - b_l \frac{\partial}{\partial j_l}\right] \text{ par } P\exp i\varepsilon \sum_{l=2}^{n} \left[c_{l-1} \frac{\partial}{\partial j_{l-1}^*} - b_l \frac{\partial}{\partial j_l}\right],$$

la seule modification dans la limite $\varepsilon \to 0$ portant alors sur les produits chronologiques pour des temps égaux, toutes les formules du paragraphe 2 étant établies modulo la définition de ces produits, on voit que le remplacement était valide dans ce cadre. Nous allons maintenant calculer explicitement $A(y^*, y)$ dans la limite $\varepsilon \to 0$ et nous pourrons vérifier que la non définition des P produits pour les temps égaux n'entraîne pas d'ambiguités dans la limite continue.

Nous avons besoin de $\det B$ et de B^{-1}, d'après (29)

$$B_{ij} = \delta_{ij} - s_i \delta_{i,j+1}$$

En développant le déterminant suivant la 1ère ligne il ne vient qu'un terme, et en continuant ainsi il vient finalement

(39) $$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -s_n & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad \det B = 1 \, .$$

Les cas $n=2$ et $n=3$ suggèrent pour B^{-1} la forme suivante

(40) $$B^{-1}_{jk} = \delta_{jk} + \theta(j-k)\, s_{k+1}\, s_{k+2} \dots s_j \, ,$$

où

$$\theta(i) = 0 \qquad i \leq 0$$
$$= 1 \qquad i > 0 \, ,$$

nous vérifions que (40) est correct en calculant BB^{-1}.

Il vient

$$BB^{-1}_{ik} = \sum_j (\delta_{ij} - s_i \delta_{i,j+1}) (\delta_{jk} + \theta(j-k)\, s_{k+1} \times$$
$$\times s_{k+2} \dots s_j)$$
$$= \delta_{ik} + \theta(i-k)\, s_{k+1} \dots s_i - s_i \delta_{i-1,k} -$$
$$- s_i \theta(i-1-k)\, s_{k+1} \dots s_{i-1}$$

mais

$$\theta(i-1-k)\, s_{k+1} \dots s_{i-1} s_i + s_i \delta_{i-1,k} = \theta(i-k)\, s_{k+1} \dots s_i$$

et donc $\quad BB^{-1}_{ik} = \delta_{ik} \qquad$ OK.

Faisons le changement de notation

(41) $$\Delta_{jk} = B^{-1}_{jk} = \delta_{jk} + \theta(j-k)\, s_{k+1} s_{k+2} \dots s_j \, ,$$

nous cherchons la limite continue de Δ, c'est à dire la limite quand $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$, $\varepsilon(n+1) = t - t_0$,

de

(42) $$\Delta(t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_{i_1 i_2} \qquad \begin{cases} t_1 - t_0 = \varepsilon i_1 \\ t_2 - t_0 = \varepsilon i_2 \end{cases} ,$$

on voit que le terme δ_{jk} dans (41) n' a pas de contribution à la limite pour donner $\delta(t_1 - t_2)$ il faudrait $\frac{1}{\varepsilon}\delta_{jk}$ de sorte que la limite de (42) est donnée par

$$\Delta(t_1,t_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \theta\,(t_1-t_2) \prod_{\ell=i_2+1}^{i_1} s_\ell \,,$$

soit, en rappelant que (23) $s_j = 1+i\varepsilon a_j$ et en posant

(43) $$a_j = a(t) \qquad \text{pour} \quad \varepsilon j = (t-t_0)\,,$$

on a pour $t_1 > t_2$

$$\Delta(t_1,t_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{\ell=i_2+1}^{i_1} (1+i\varepsilon a_\ell)\,,$$

soit en prenant le Log,

$$\operatorname{Log} \Delta(t_1,t_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\ell=i_2+1}^{i_1} \operatorname{Log}(1+i\varepsilon a_\ell)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\ell=i_2+1}^{i_1} \left[i\varepsilon a_\ell + O(\varepsilon^2)\right],$$

$$= i\int_{t_2}^{t_1} dt\; a(t)\,,$$

de sorte que

(45) $$\Delta(t_1,t_2) = \theta\,(t_1-t_2)\; \exp i\int_{t_2}^{t_1} dt\; a(t).$$

Nous appliquons maintenant (38) à (28) et (24) il vient, en utilisant (39)

$$A(y^*,y) \doteq P_1 \exp\left\{\sum_{k\ell=1}^{n} (j_k^* + i\varepsilon c_k)\,\Delta_{k\ell}\,(j_\ell + i\varepsilon b_\ell)\right\}$$

où $$j_1 = y\,, \quad j_\ell = 0 \qquad \ell \in [2,n] \cap \mathbb{N}$$

$$j_n^* = y^*\,, \quad j_\ell^* = 0 \qquad \ell \in [1,n-1] \cap \mathbb{N}\,,$$

en utilisant (37) il vient $j_n^* + i\varepsilon c_n = j_n^*$, $j_i + i\varepsilon b_i = j_i \quad \varepsilon \to 0$

(on somme sur les indices répétés)

$$A(y^*,y) \doteq P_1 \exp\left\{-\varepsilon^2 c_k \Delta_{k\ell} b_\ell + j_n^* \Delta_{n\ell}\, i\varepsilon b_\ell + i\varepsilon c_k \Delta_{k1} j_1 + \right.$$

$$\left. + j_n^* \Delta_{n1} j_1\right\},$$

le symbole P_1 agissant sur b et c et n'agissant pas sur j_n^* et j_0 d'après la proposition III 4 b et c, et j^* et j anticommutent entre eux sous le signe P_1 , alors que j^* et b ou c, j et b ou c commutent ; on voit alors que chaque terme de la P_1 exponentielle commute avec les autres et donc que l'on peut écrire

$$A(y^*,y) = P_1 \left[\exp[-\varepsilon^2 c_k \Delta_{k\ell} b_\ell] \exp[y_n^* \Delta_{n\ell}\, i\varepsilon b_\ell] \times \right.$$

$$\left. \times \exp[i\varepsilon c_k \Delta_{ki} y_1] \times \exp[y_n^* \Delta_{n1} y_1] \right],$$

soit, en développant les exponentielles

$$A(y^*,y) = P_1 \left[\exp(-\varepsilon^2 c_k \Delta_{k\ell} b_\ell) \right] +$$

$$+ y^* P_1 \left[\exp(-\varepsilon^2 c_k \Delta_{k\ell} b_\ell) \Delta_{n\ell}\, i\varepsilon b_\ell \right] +$$

$$+ y P_1 \left[\exp(-\varepsilon^2 c_k \Delta_{k\ell} b_\ell)\, i\varepsilon c_k \Delta_{k1} \right] +$$

$$+ y^* y P_1 \left[\exp(-\varepsilon^2 c_k \Delta_{k\ell} b_\ell) \times \left[\right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \left[\Delta_{n1} - \varepsilon^2 \Delta_{nj} b_j c_i \Delta_{i1} \right] \right] \right],$$

dans la limite $\varepsilon \to 0$ en définissant

$$c(t) = c_k \quad , \quad \varepsilon_k = t - t_0$$

$$b(t) = b_\ell \quad , \quad \varepsilon_\ell = t - t_0$$

en utilisant $\sum_0^n \varepsilon \longrightarrow \int_{t_0}^{t} d\tau$

il vient, en utilisant la proposition III 4 pour faire des commutations,

$$A(y^*,y) = P_1 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_2\; c(\tau_1) \Delta(\tau_1,\tau_2) b(\tau_2) \right] +$$

$$+ y^* P_1 \left[i \int_{t_0}^{t} d\tau' \Delta(t,\tau') b(\tau') \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_2\; c(\tau_1) \Delta(\tau_1,\tau_2) b(\tau_2) \right\} \right] +$$

(47)

$$+ y P_1 \left[i \int_{t_0}^{t} d\tau\; c(\tau) \Delta(\tau,t_0) \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_2 \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, c(\tau_1) \Delta(\tau_1,\tau_2) b(\tau_2) \right\} \right] +$$

$$+ y^* y P_1 \left[\left(\Delta(t,t_0) + \int d\tau\, d\tau'\, c(\tau) \Delta(\tau,t_0) \Delta(t,\tau') b(\tau') \right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_2\; c(\tau_1) \Delta(\tau_1,\tau_2) b(\tau_2) \right\} \right],$$

avec $\Delta(\tau_1,\tau_2) = \Theta(\tau_1 - \tau_2) \exp i \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau\, a(\tau)$, le symbole $\mathcal{P}_1$ agissant sur b et c dans (47).

Nous avons donc déterminé explicitement $A(y^*, y)$ à l'aide du $\mathcal{P}_1$ produit.

III.4. REDUCTION DES $\mathcal{P}_1$ PRODUITS AUX $\mathcal{P}_2$ PRODUITS

Dans le chapitre précédent on a dérivé des expressions explicites pour

(48) $$\Delta(y^*, y) = A_{00} + A_{10}\, y^* + A_{01}\, y + A_{11}\, y^* y .$$

Nous allons voir que ces expressions peuvent se simplifier énormément.

Remarquons, en se rappelant les équations (6), (7), (8), que nous pouvons définir la transformation

(49) $$\bar{\hat{a}}^+ = \hat{a} \, , \quad \bar{\hat{a}} = \hat{a}^+ \qquad |\bar{0}\rangle = |1\rangle \, , \quad |\bar{1}\rangle = |0\rangle \, ,$$

ces nouveaux objets ont les bonnes relations

$$[\bar{\hat{a}}, \bar{\hat{a}}^+] = 1 \, , \qquad \begin{array}{ll} \bar{\hat{a}}^+ |\bar{0}\rangle = |\bar{1}\rangle \, , & \bar{\hat{a}}\, |\bar{0}\rangle = 0 \\ \bar{\hat{a}}^+ |\bar{1}\rangle = 0 \, , & \bar{\hat{a}}\, |\bar{1}\rangle = |\bar{0}\rangle \, , \end{array}$$

et donc, si nous remplaçons dans (7) $\hat{a} \longrightarrow \bar{\hat{a}}$, $\hat{a}^+ \longrightarrow \bar{\hat{a}}^+$ et en même temps nous remplaçons $|0\rangle \longrightarrow |\bar{0}\rangle$, $|1\rangle \longrightarrow |\bar{1}\rangle$ nous ne changeons rien.

Autrement dit, en transformant dans (7) $\hat{a} \longrightarrow \bar{\hat{a}} = \hat{a}^+$ et $\hat{a}^+ \longrightarrow \bar{\hat{a}}^+ = \hat{a}$ on doit avoir $\langle i | \tilde{Z} | j \rangle = \langle \bar{i} | \bar{\tilde{Z}} | \bar{j} \rangle$ (voir (8)) en transformant (7) on trouve

$$\bar{\hat{H}} = -d\,\mathbb{1} - a\,\hat{a}\,\hat{a}^+ - b\,\hat{a} - c\,\hat{a}^+$$

$$\bar{\hat{H}} = -d\,\mathbb{1} - a(1 - \hat{a}^+\hat{a}) - c\,\hat{a}^+ - b\,\hat{a} \, ,$$

on obtient donc $\hat{H}$ et donc $\bar{\tilde{Z}}$ en faisant la transformation

(50) $$\begin{aligned} d &\longrightarrow d + a \\ a &\longrightarrow -a \\ b &\longrightarrow c \\ c &\longrightarrow b \, , \end{aligned}$$

et sous (50) $\langle i | \tilde{Z} | j \rangle \longrightarrow \langle \bar{i} | \tilde{Z} | \bar{j} \rangle$
et donc, d'après (8) $\tilde{Z} \sim e^{i\int_{t_0}^{t} d\, d\tau}\, \hat{H} \longrightarrow e^{i\int_{t_0}^{t} (d+a)\, d\tau}\, \bar{\hat{H}} \, ,$

on doit avoir

$$A_{\bar{i}\bar{j}} = \left[e^{i\int_{t_0}^{t} a\, d\tau} \right] A_{ij} \Big|_{\substack{b \to c \\ c \to b \\ a \to -a}} \, ,$$

soit, en utilisant (45)

(51) $$A_{\bar{i}\bar{j}} = \left[\Delta(t, t_0) \right] A_{ij} \Big|_{\substack{b \to c \\ c \to b \\ a \to -a}} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{1} = 0 \\ \bar{0} = 1 \end{array} \right. .$$

Cette propriété n'est pas du tout évidente sur les expressions (47), mais nous vérifierons tout de même (51) sur les expressions finales obtenues à la fin de ce paragraphe.

Nous commençons par l'expression la plus simple : A_{oo}

Réduction de A_{oo}

D'après (47) et (48) on a

(52) $$A_{oo} = P_1 \exp \left[- \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \, d\tau_{1'} \, c(\tau_1) \Delta(\tau_1, \tau_{1'}) \, b(\tau_{1'}) \right],$$

avec $$\Delta(\tau_1, \tau_{1'}) = \Theta(\tau_1 - \tau_{1'}) \, e^{i\int_{\tau_{1'}}^{\tau_1} d\tau \, a(\tau)} ,$$

nous posons

(53) $$\Delta(\tau_1, \tau_2) = \Theta(\tau_1 - \tau_2) \, \bar{\Delta}(\tau_1, \tau_2) ,$$

ou

(54) $$\bar{\Delta}(\tau_1, \tau_2) = \exp i \int_{\tau_2}^{\tau_1} a(\tau) \, d\tau .$$

Remarquons que $\bar{\Delta}$ vérifie la relation de groupe

(56) $$\bar{\Delta}(\tau_1, \tau_{1'}) \bar{\Delta}(\tau_2, \tau_{2'}) = \bar{\Delta}(\tau_1, \tau_{2'}) \, \bar{\Delta}(\tau_2, \tau_{1'}) ,$$

car

$$\exp i \int_{\tau_{1'}}^{\tau_1} d\tau \, a(\tau) \exp i \int_{\tau_{2'}}^{\tau_2} a(\tau) = \exp i \int_{\tau_{2'}}^{\tau_1} d\tau \, a(\tau) \exp i \int_{\tau_{1'}}^{\tau_2} a(\tau) \, d\tau ,$$

en effet, si A est une primitive de a

$$\frac{d}{d\tau} A(\tau) = a(\tau)$$ on a

$$\exp i \left[A(\tau) \Big|_{\tau_{1'}}^{\tau_1} + A(\tau) \Big|_{\tau_{2'}}^{\tau_2} \right] = \exp i \left[A(\tau) \Big|_{\tau_{2'}}^{\tau_1} + A(\tau) \Big|_{\tau_{1'}}^{\tau_2} \right] ,$$

c'est la relation (56) qui va nous permettre de réduire les expressions des A_{ij} .

Le terme d'ordre n de A_{oo} s'écrit, d'après (52)

$$A_{oo}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \, d\tau_{1'} \ldots\ldots d\tau_n \, d\tau_{n'} \times$$

(57) $$\times P_1 \left[c(\tau_1) \Delta(\tau_1, \tau_{1'}) \, b(\tau_{1'}) \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots c(\tau_n) \Delta(\tau_n, \tau_{n'}) \, b(\tau_{n'}) \right] .$$

Nous allons construire une représentation graphique pour (57). Remarquons premièrement que la fonction $\Delta(\tau_i, \tau_{i'})$ contenant un $\Theta(\tau_i - \tau_{i'})$ on a toujours dans (57) $\tau_i > \tau_{i'}$.

L'idée est de séparer tous les ordres chronologiques des $\tau_i, \tau_{i'}$ par des fonctions Θ , de multiplier chaque expression par le signe dû à l'action du P_1 produit et ensuite d'en faire la somme.

Nous illustrons la méthode en calculant les premiers termes, on a $A_{00}^{(0)} = 1$ et

(58) $$A_{00}^{(1)} = -\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_{1'}\, P_1\left[c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\,b(\tau_{1'})\right],$$

et d'après la définition du P_1 - produit

$$A_{00}^{(1)} = -\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_{1'}\,\theta(\tau_1-\tau_{1'})\,c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\,b(\tau_{1'}) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_{1'}(-1)\,\theta(\tau_{1'}-\tau_1)\,c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\,b(\tau_{1'}),$$

où le signe $-$ dans la seconde intégrale correspond à l'action du produit P_1, voir la définition 1 III, ici le produit P_1 agit sur les "indices" τ_1 et τ'_1 .

La seconde intégrale est nulle car $\Delta(\tau_1,\tau_{1'})$ contient un $\theta(\tau_1-\tau_{1'})$ et donc

(59) $$A_{00}^{(1)} = -\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_{1'}\, c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\,b(\tau_{1'})\,.$$

Calculons maintenant

(60) $$A_{00}^{(2)} = \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, P_1\left[c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\,\times\right.$$

$$\left.\times\, b(\tau_{1'})\,c(\tau_2)\,\Delta(\tau_2,\tau_{2'})\,b(\tau_{2'})\right],$$

à cause des $\theta(\tau_i-\tau_{i'})$ contenus dans les Δ nous n'avons qu'à considérer les ordres où

$$\tau_1 > \tau_{1'} \quad , \quad \tau_2 > \tau_{2'}$$

ils sont indiqués dans les tables suivantes, les indices les plus à gauche correspondant aux temps les plus grands.

1 1' 2 2'		2 2' 1 1'
1 2 1' 2'	et	2 1 2' 1'
1 2 2' 1'		2 1 1' 2' .

les traits reliant i i' indiquent $\Delta(\tau_i,\tau_{i'})$
l'ordre correspondant à une ligne est assuré en mettant des facteurs θ
le signe correspondant à l'action du P_1- produit est celui de la permutation qui passe de l'ordre 1 1' 2 2' à l'ordre de la table.

par exemple la première ligne de la première table correspond à l'expression

$$\int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, \theta(\tau_1-\tau_{1'})\, \theta(\tau_{1'}-\tau_2)\, \theta(\tau_2-\tau_{2'}) \times$$

$$\times\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_1)\, c(\tau_2)\, \Delta(\tau_2-\tau_{2'})\, b(\tau_{2'})\,.$$

Remarquons qu'une expression de la seconde table (qui est simplement la première où on a effectué les transpositions $1 \longleftrightarrow 2$ $1' \longleftrightarrow 2'$) est égale à l'expression correspondante de la première table ; en effet : le signe dû à l'acion du P_1 produit est le même (on passe d'un ordre à l'autre par deux transpositions) et en faisant le changement de variable

$$\tau_1 \to \tau_2 \qquad \tau_{1'} \to \tau_{2'} \qquad \tau_2 \to \tau_1 \qquad \tau_{2'} \to \tau_{1'}$$

on récupère les facteurs θ de l'expression de la première table et comme les $c\,\Delta\, b\, c\,\Delta\, b$ sont symétriques en $1, 2$ on a la même intégrale.

Il suffit donc d'écrire les facteurs correspondant à la première table, ou $\tau_1 > \tau_{2'}$, et d'enlever le $\frac{1}{2!}$ venant de l'exponentielle.

Tenant compte de tout cela, nous avons

$$A_{00}^{(2)} = \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, \theta(\tau_1-\tau_{1'})\, \theta(\tau_{1'}-\tau_2)\, \theta(\tau_2-\tau_{2'}) \times$$

$$\times\, c(\tau_1)\, \bar\Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'})\, c(\tau_2)\, \bar\Delta(\tau_2, \tau_{2'})\, b(\tau_{2'}) -$$

$$- \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, \theta(\tau_1-\tau_2)\, \theta(\tau_2-\tau_{1'})\, \theta(\tau_{1'}-\tau_2) \times$$

$$\times\, c(\tau_1)\, \bar\Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'})\, c(\tau_2)\, \bar\Delta(\tau_2, \tau_{2'})\, b(\tau_{2'}) +$$

$$+ \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, \theta(\tau_1-\tau_2)\, \theta(\tau_2-\tau_{2'})\, \theta(\tau_{2'}-\tau_{1'}) \times$$

$$\times\, c(\tau_1)\, \bar\Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'})\, c(\tau_2)\, \bar\Delta(\tau_2, \tau_{2'})\, b(\tau_{2'}),$$

où nous avons écrit des $\bar\Delta$ au lieu de Δ car l'ordre $\tau_1 > \tau_{1'}$ étant garanti par les fonctions θ le θ figurant dans Δ est inutile. (voir (53), (54))

Nous montrons maintenant que les deux dernières intégrales se cancellent.

En effet, en utilisant (56) dans la dernière intégrale, on peut remplacer

$$\bar\Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, \bar\Delta(\tau_2, \tau_{2'}) \quad \text{par} \quad \bar\Delta(\tau_1, \tau_{2'})\, \bar\Delta(\tau_2, \tau_{1'})$$

et en faisant ensuite le changement de variable $\tau_{1'} \to \tau_{2'}$, $\tau_{2'} \to \tau_{1'}$ on récupère les Δ les b et les c avec leurs arguments habituels mais dans les fonctions θ on a fait la substitution $\tau_{1'} \to \tau_{2'}$, $\tau_{2'} \to \tau_{1'}$ or ce sont alors juste les fonctions θ de l'intégrale précédente, le signe étant différent, ces intégrales se cancellent.

Donc

(61) $$A_{00}^{(2)} = \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, \theta(\tau_1-\tau_{1'})\, \theta(\tau_{1'}-\tau_2)\, \theta(\tau_2-\tau_{2'}) \times$$

$$\times\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'})\, c(\tau_2)\, \Delta(\tau_2, \tau_{2'})\, b(\tau_2)\,.$$

Nous généralisons maintenant ce que nous venons de faire pour $A_{00}^{(2)}$ à $A_{00}^{(n)}$

Règles pour calculer $A_{oo}^{(n)}$

1. construire la table T_n de tous les ordres possibles de $1 1' \; 2 2' \dots n n'$ tels que

1 soit à gauche de 2
2 soit à gauche de 3
$\vdots$ $\qquad\vdots$
$n-1$ soit à gauche de n

et que
1 soit à gauche de 1'
2 soit à gauche de 2'
$\vdots$ $\qquad\vdots$
n soit à gauche de n'

2. à chaque ligne de la table

$j_1 j_2 \dots j_{2n}$ ou $j_k = \ell$ ou ℓ'

on fait correspondre l'intégrale

$$(-1)^n (-1)^p \int d\tau_1 d\tau_{1'} \dots d\tau_n d\tau_{n'} \prod_{i=1}^{2n-1} \theta(j_1 - j_{1+1}) \, c(\tau_1) \times$$

$$\times \bar{\Delta}(\tau_1, \tau_{1'}) b(\tau_{1'}) \dots\dots c(\tau_n) \bar{\Delta}(\tau_n - \tau_{n'}) b(\tau_{n'}) , \tag{62}$$

où p est la parité de la permutation qui fait passer de l'ordre

$1 1' \dots n n'$ à l'ordre $j_1 \dots j_{2n}$

$A_{oo}^{(n)}$ est donné par la somme des termes correspondant à chaque ligne de la table.

Que ces règles donnent $A_{oo}^{(n)}$ peut se voir en deux temps.

1. on a séparé chaque terme correspondant aux ordres indiqués par les lignes de la table par les fonctions θ et ce terme est bien multiplié par $(-1)^p$ correspondant à l'action du P_1-produit. On a donc correctement tous les termes correspondant à l'ordre de la table T_n (en remarquant que les fonctions θ assurent $\tau_i > \tau_{i'}$ et donc qu'on peut remplacer les $\Delta(\tau_i, \tau_{i'})$ par des $\bar{\Delta}(\tau_i, \tau_{i'})$).

2. tous les ordres possibles s'obtiennent en faisant les $n!$ permutations de T_n qui consistent à permuter ensembles $(1 1') \dots \dots (n n')$, c'est à dire si Π est une permutation de $1 \dots n$ à effectuer dans chaque ligne de la table

$1 \to \Pi(1)$, $1' \to \Pi(1)'$ .... $n \to \Pi(n)$ $n' \to \Pi(n)'$

Mais chacune de ces $n!$ permutations est paire car elle peut s'effectuer comme une suite de produit de <u>deux</u> transpositions (i et i' à la fois) et donc le signe de l'intégrale correspondante n'est pas changé ; en effectuant sur cette intégrale le changement de variables correspondant à l'inverse de la permutation Π , on revient à l'intégrale correspondant à la ligne considérée de T_n .

Donc, en considérant tous les ordres possibles, on obtient $n!$ fois le même résultat, nous avons cancellé le $n!$ avec le $\frac{1}{n!}$ de l'exponentielle.

Nous donnons maintenant une méthode générale pour construire la table T_n à partir de la table T_{n-1} .

Commençons par calculer le nombre de lignes de T_n , on a que

(63) $$\mathrm{Card}\,(T_n) = \frac{2n!}{2^n n!} = C_n \,,$$

En effet, il y a $2n!$ ordres possibles de $1\,1' \cdots\cdots n\,n'$ on ne garde que ceux où 1 est à gauche de 1'...... où n est à gauche de n' et il faut donc diviser par 2,n fois, on a alors les $n!$ permutations de T_n d'où (63).

En calculant on trouve

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 3$$
$$C_3 = 15$$
$$C_4 = 105$$
$$C_5 = 945 \,,$$

remarquons que

$$C_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{2\,(n+1)} \cdot \frac{2n!}{2^n\, n!} =$$

$$= (2n+1)\,\frac{2n!}{2^n\, n!}$$

soit

(64) $$C_{n+1} = (2n+1)\, C_n \,,$$

la méthode pour obtenir T_{n+1} en partant de T_n est comme suit : soit une ligne de T_n , premièrement on effectue dedans $1 \to 2$

$$1 \to 2 \,,\quad 1' \to 2' \quad \cdots \quad n \to n+1 \,,\quad n' \to (n+1)' \,,$$

soit alors $j_1 \cdots j_{2n}$ la ligne obtenue, on a alors $2n+1$ lignes de T_{n+1} par le mécanisme

$$1\;1'\;j_1 \cdots j_{2n}$$
$$1\;j_1\;1'\;j_2 \cdots j_{2n}$$
$$1\;j_1\;j_2\;1'\;j_3 \cdots\cdots j_{2n}$$
$$\vdots$$
$$1\;j_1\;j_2 \cdots\cdots j_{2n-1}\;1'\;j_{2n}$$
$$1\;j_1\;j_2 \cdots\cdots j_{2n}\;1' \,,$$

Il est clair que deux de ces $2n+1$ lignes ne peuvent être égales et que l'on ne peut obtenir par ce mécanisme deux lignes égales si on est parti de deux lignes différentes de T_n .

Comme on a obtenu $(2n+1)\,\mathrm{Card}\,(T_n)$ lignes différentes et que $\mathrm{Card}\,(T_{n+1}) = (2n+1)\,\mathrm{Card}\,(T_n)$ on a obtenu T_{n+1} .

Nous illustrons ces considérations en construisant T_2 et T_3 à partir de T_1 .

Evidemment

$T_1 = \quad 1\ 1'$ d'après le mécanisme indiqué, on construit T_2 en prenant $2\ 2'$

$$T_2 = \begin{array}{cccc} 1 & 1' & 2 & 2' \\ 1 & 2 & 1' & 2' \\ 1 & 2 & 2' & 1' \end{array} ,$$

ce qui est bien la table considéré précédemment.

Pour obtenir T_3 on transforme T_2 en

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2' & 3 & 3' \\ 2 & 3 & 2' & 3' \\ 2 & 3 & 3' & 2' \end{array} ,$$

et en appliquant le mécanisme à chaque ligne, la première étant à gauche, on obtient

(65)
$$T_3 = \begin{array}{lll} 1\ 1'\ 2\ 2'\ 3\ 3' & 1\ 1'\ 2\ 3\ 2'\ 3' \leftrightarrow & 1\ 1'\ 2\ 3\ 3'\ 2' \\ 1\ 2\ 1'\ 2'\ 3\ 3' & 1\ 2\ 1'\ 3\ 2'\ 3' \leftrightarrow & 1\ 2\ 1'\ 3\ 3'\ 2' \\ 1\ 2\ 2'\ 1'\ 3\ 3' & 1\ 2\ 3\ 1'\ 2'\ 3' \leftrightarrow & 1\ 2\ 3\ 1'\ 3'\ 2' \\ 1\ 2\ 2'\ 3\ 1'\ 3' & 1\ 2\ 3\ 2'\ 1'\ 3' \leftrightarrow & 1\ 2\ 3\ 3'\ 1'\ 2' \\ 1\ 2\ 2'\ 3\ 3'\ 1' & 1\ 2\ 3\ 2'\ 3'\ 1' \leftrightarrow & 1\ 2\ 3\ 3'\ 2'\ 1' \end{array} .$$

Pour illustrer la règle de correspondance, nous écrivons le terme correspondant à la 2ème ligne première colonne, la permutation est impaire (une transposition) et donc $p = 1$

$$(-1)^3 (-1)^1 \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, d\tau_2\, d\tau_{2'}\, d\tau_3\, d\tau_{3'}\; \theta(\tau_1 - \tau_2)\, \theta(\tau_2 - \tau_{1'}) \times$$

$$\times\, \theta(\tau_{1'} - \tau_{2'})\, \theta(\tau_{2'} - \tau_3)\, \theta(\tau_3 - \tau_{3'})\, c(\tau_1)\, \bar{\Delta}(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'}) \times$$

$$\times\, c(\tau_2)\, \bar{\Delta}(\tau_2, \tau_{2'})\, b(\tau_{2'})\, c(\tau_3)\, \bar{\Delta}(\tau_3, \tau_{3'})\, b(\tau_{3'}) .$$

Nous avons maintenant la

<u>Proposition III 6</u>

Les intégrales correspondant à deux lignes de T_n ne différant que par la transposition de deux indices primés se cancellent.

<u>Preuve</u> : premièrement les deux lignes diffèrant d'une transposition, le signe des intégrales correspondantes est différent.

Ensuite soit

$$j_1 \cdots j_k \, \ell'_1 \, j_{k+1} \cdots j_\ell \, \ell'_2 \, j_{\ell+1} \cdots j_{2n} \qquad \text{la première ligne}$$

$$j_1 \cdots j_k \, \ell'_2 \cdots j_\ell \, \ell'_1 \, j_{\ell+1} \cdots\cdots j_{2n} \qquad \text{la seconde ligne}$$

(éventuellement $k=\ell$ et ℓ'_1 et ℓ'_2 sont consécutifs) dans l'integrale correspondant à la seconde ligne il y a les facteurs

$$\bar{\Delta}(\zeta_{\ell_2}, \zeta_{\ell_2'})\, \bar{\Delta}(\zeta_{\ell_1}, \zeta_{\ell_1'})\, c(\zeta_{\ell_2})\, b(\zeta_{\ell_2'})\, c(\zeta_{\ell_1})\, b(\zeta_{\ell'_1})$$

que l'on peut réécrire en utilisant la propriété de groupe (56)

$$\bar{\Delta}(\zeta_{\ell_2}, \zeta_{\ell'_1})\, \bar{\Delta}(\zeta_{\ell_1}, \zeta_{\ell'_2})\, c(\zeta_{\ell_2})\, b(\zeta_{\ell'_2})\, c(\zeta_{\ell_1})\, b(\zeta_{\ell'_1})$$

en faisant alors le changement de variables $\zeta_{\ell_1'} \to \zeta_{\ell_2'}$, $\zeta_{\ell_2'} \to \zeta_{\ell_1'}$

on récupère les bons facteurs $c\Delta b \cdots c\Delta b$, et on a les fonctions θ correspondant à la première ligne, donc l'intégralge correspondant à la première ligne, avec un changement de signe. CQFD

Remarquons que cette proposition entraîne que toutes les lignes de T_n ont la même valeur, au signe près.

Cette proposition va nous permettre de prouver par récurrence que tous les termes de T_n se cancellent sauf le premier, c'est à dire $1\,1' \cdots\cdots n\,n'$.

En effet, supposons que T_n soit arrangée de telle sorte que sa 1ère ligne soit $1\,1' \cdots n\,n'$ et que les lignes suivantes se cancellent, la $i$ème ligne avec la $i+$unième ligne (i nombre pair).

(c'est le cas pour T_2)

Alors construisons T_{n+1} par le mécanisme habituel, 2 lignes de T_{n+1} correspondant à la même insertion $\overline{1\;1'}$ sur deux lignes de T_n se cancellant ne diffèrent entre elles que d'une transposition ℓ'_1 ℓ'_2 et donc se cancellent d'après la proposition III 6.

Donc il ne reste que les $2n+1$ lignes de T_{n+1} correspondant au mécanisme agissant sur la première ligne de T_n soit

$$\begin{array}{l}
\overline{1\;\;1'}\;\;2\;\;2'\;\;3\;\;3'\;\cdots\cdots\;(n+1)\;(n+1)' \\
\overline{1\;\;2\;\;1'}\;\;2'\;\;3\;\;3'\;\cdots\;(n+1)\;(n+1)' \\
\overline{1\;\;2\;\;2'\;\;1'}\;\;3\;\;3'\;\cdots\cdots\;(n+1)\;(n+1)' \\
\quad\;\vdots \hspace{14em} \vdots
\end{array}$$

$$\overbrace{1\ \ 2\ \ 2'\ \ 3\ \ 3'\ \ldots\ldots\ (n+1)\ \ 1'}\ (n+1)'$$

$$\overbrace{1\ \ 2\ \ 2'\ \ 3\ \ 3'\ \ldots\ldots\ (n+1)\ \ (n+1)'}\ 1' .$$

On voit que par la proposition III 6 ces lignes se cancellent par groupe de deux en partant du bas et il ne reste donc que la 1ère ligne

En réarrangeant T_{n+1} de sorte que les lignes se cancellant soient l'une après l'autre, on retrouve pour T_{n+1} la propriété supposée pour T_n . Comme cette propriété est vraie pour $n=2$ elle est vraie pour tout n.

Nous avons illustré cette récurrence en indiquant (65) sur T_3 , les lignes se cancellant en les joignant par des flèches.

Il résulte de ce qui précède que

(66) $A_{00}^{(n)} = \overbrace{1\,1'}\ \ldots\ldots\ \overbrace{n\,n'}$ soit, en faisant le changement de variable $\tau_i \to \tau_{2i-1}$, $\tau_{i'} \to \tau_{2i}$ il vient analytiquement

$$A_{00}^{(n)} = (-1)^n \int_{t_0}^{t_{2n}} \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\, \bar{\Delta}(\tau_{2i-1}, \tau_{2i})\, b(\tau_{2i}) \tag{67}$$

ce que nous notons symboliquement (on peut remplacer $\bar{\Delta}$ par Δ à cause de la présence des θ).

$$A_{00} = P_z \exp\left\{- \int_{t_0}^{t} c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_2)\, b(\tau_2)\right\} , \tag{68}$$

le sens de P_z étant de mettre des fonctions θ dans l'ordre chronologique, autrement dit le terme d'ordre n de (68) est (67).

<u>Réduction de A_{01} et A_{10}</u>

$$A_{10} = P_1\left[i \int_{t_0}^{t} d\tau'\, \Delta(t, \tau')\, b(\tau') \exp\left\{- \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'})\right\}\right]$$

(69)

$$A_{01} = P_1\left[\exp\left\{- \int d\tau_1\, d\tau_{1'}\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_{1'})\, b(\tau_{1'})\right\} i \int d\tau\, c(\tau)\, \Delta(\tau, t_0)\right] ,$$

Nous obtenons les règles pour calculer A_{10} et A_{01} en généralisant de manière évidente les règles pour A_{00} .

Pour A_{10} on construit la table T'_n correspondant à la table T_n , où dans chaque ligne on a mis tous les ordres possibles de τ' : par exemple à la ligne $\overbrace{1\,1'}\ \ldots\ \overbrace{n\,n'}$ de T_n correspondent les $2n+1$ lignes de T'_n

$$\tau'\ \overbrace{1\ \ 1'}\ \ldots\ldots\ \overbrace{n\ \ n'}$$

$$\overbrace{1\ \ \tau'\ \ 1'}\ \ldots\ldots\ \overbrace{n\ \ n'}$$

(70)
$$\begin{array}{l} 1\ 1'\ \tau' \ldots\ldots\ n\ n' \\ \vdots \\ 1\ 1' \ldots\ldots \tau'\,\overline{n\,n'} \\ 1\ 1' \ldots\ldots n\,\tau'\,n' \\ 1\ 1' \ldots\ldots n\,n'\,\tau', \end{array}$$

les règles de correspondance sont les mêmes que pour A_{00} sauf qu'il faut ajouter pour chaque τ'

si la ligne est $\quad j_1 \cdots j_k\, \tau'\, j_{k+1} \cdots j_{2n}$

$$\theta(\tau_{j_k} - \tau')\, \theta(\tau' - \tau_{j_{k+1}})$$

et

$$i \int_{t_0}^{t} d\tau'\, \bar{\Delta}(t,\tau')\, b(\tau')$$

et que dans $(-1)^p$ le p est maintenant la parité de la permutation qui passe de

$$\tau'\, 1\, 1' \ldots n\, n' \quad \text{à} \quad j_1 \cdots j_k\, \tau'\, j_{k+1} \cdots j_{2n} .$$

Maintenant la proposition III 6 étant toujours valable, il est clair que toutes les lignes de T_n' correspondant à des lignes de T_n se cancellant se cancellent encore entre elles de sorte qu'il ne nous reste que la ligne de T_n' correspondant à la 1ère ligne de T_n , c'est à dire (70).

D'autre part, nous avons l'équivalent de la proposition III 6 pour τ' , comme τ' est accompagné du facteur $\bar{\Delta}(t,\tau')\, b(\tau')$ il est clair, en répétant le raisonnement de la proposition III 6 que deux lignes différant par la transposition de τ' et d'un ℓ' se cancellent ; en observant (70) on remarque que les lignes se cancellent par groupe de deux en partant du bas et donc

(71)
$$A_{10}^{(n)} = \tau'\, 1\, 1' \ldots n\, n'$$

soit analytiquement

(72)
$$A_{10}^{(n)} = (-1)^n i \int_{t_0}^{t} d\tau' \prod_{i=1}^{2n} d\tau_i\, \bar{\Delta}(t,\tau')\, b(\tau')\, \theta(\tau'-\tau_1) \,\cdot$$
$$\times \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\, \bar{\Delta}(\tau_{2i-1}, \tau_{2i})\, b(\tau_{2i}),$$

(on peut remplacer les $\bar{\Delta}$ par des Δ à cause de la présence des θ) ce que nous notons symboliquement

(73)
$$A_{10} = P_2 \left[i \int_{t_0}^{t} d\tau'\, \Delta(t,\tau')\, b(\tau') \exp\left\{ - \int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_2\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1,\tau_2)\, b(\tau_2) \right\} \right],$$

le sens de (73) étant (72).

<u>Pour A_{01}</u> les règles sont :

On construit la table $\tilde{T}'_n$ correspondant à ajouter à chaque ligne de T_n les ordres possibles de τ

par exemple la 1ère ligne de $\tilde{T}_n$ est

(74)
$$\begin{array}{l}
\tau \;\; 1 \;\; 1' \;\; 2 \;\; 2' \ldots n \; n' \\
1 \;\; \tau \;\; 1' \;\; 2 \;\; 2' \ldots n \; n' \\
\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
1 \;\; 1' \;\; 2 \;\; 2' \ldots\ldots \tau \; n \; n' \\
1 \;\; 1' \;\; 2 \;\; 2' \ldots\ldots n \; \tau \; n' \\
1 \;\; 1' \;\; 2 \;\; 2' \ldots\ldots n \; n' \; \tau \, .
\end{array}$$

On a les mêmes facteurs que pour A_{00} sauf qu'il faut ajouter pour chaque τ

si la ligne est $j_1 \ldots j_k \, \tau \, j_{k+1} \ldots j_{2n}$

$$\theta(\tau_{j_k} - \tau)\, \theta(\tau - \tau_{j_{k+1}})$$

et
$$i \int d\tau \; c(\tau)\; \bar{\Delta}(\tau, t_0) \, ,$$

et que dans $(-1)^p$ le p est maintenant la parité de la permutation qui fait passer de

$$1\,1' \ldots n\,n'\,\tau \quad \text{à} \quad j_1 \ldots j_k \, \tau \, j_{k+1} \ldots j_{2n} \, .$$

Maintenant la proposition de III 6 étant toujours valable les lignes de T_n se cancellant entre elles entraînent des lignes de $\tilde{T}_n'$ se cancellant entre elles de sorte qu'il ne nous reste que les lignes (74).

D'autre part, nous avons l'équivalent de la proposition III 6 en remarquant que τ est accompagné de $c(\tau)\; \bar{\Delta}(\tau, t_0)$ de sorte que la propriété de groupe à utiliser maintenant est :

$$\bar{\Delta}(\tau, t_0)\; \bar{\Delta}(\tau_\ell, \tau_{\ell'}) = \bar{\Delta}(\tau_\ell, t_0)\; \bar{\Delta}(\tau, \tau_{\ell'}) \, ,$$

de sorte qu'en répétant le raisonnement de la proposition III 6 avec maintenant le changement de variables $\tau \to \tau_\ell$, $\tau_\ell \to \tau$.

On voit que deux lignes différant par la permutation de τ et d'un τ_ℓ se cancellent, de sorte qu'en inspectant (74), on voit que les lignes se cancellent deux par deux en partant du haut et que donc

$$A_{01}^{(n)} = \overline{1\,1'} \ldots \overline{n\,n'}\, \tau \, ,$$

soit analytiquement

(75)
$$A_{01}^{(n)} = (-1)^n \int_{t_0}^{t} d\tau \prod_{l=1}^{2n} d\tau_l \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j - \tau_{j+1})\, \theta(\tau_{2n} - \tau) \, \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\, \Delta(\tau_{2i-1}, \tau_{2i})\, b(\tau_{2i})\, (i) \, \times$$
$$\times\; c(\tau)\; \Delta(\tau, t_0) \, ,$$

ce que nous notons symboliquement

(76)
$$A_{01} = P_2 \left[\exp \left\{ - \int_{t_0}^{t} d\tau_1 d\tau_2\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_2)\, b(\tau_2) \right\} \times \right.$$
$$\left. \times\, i \int d\tau\, (c\tau)\, \Delta(\tau, t_0) \right] .$$

Nous vérifions maintenant que (51) s'applique bien.
On doit avoir
$$A_{\bar{i}\bar{j}} = \left[\Delta(t, t_0) \right] A_{ij} \Big|_{\substack{b \to c \\ c \to b \\ a \to -a}}$$
nous aurons besoin de

(77)
$$\bar{\Delta}(\tau_i, \tau_j) \Big|_{a \to -a} = \bar{\Delta}(\tau_j, \tau_i) \,,$$

ce qui est évident $\left(\bar{\Delta} = \exp i \int_{\tau_j}^{\tau_i} a\, d\tau \right)$.

Nous partons maintenant de l'expression (72) de $A_{10}^{(n)}$
en lui appliquant la transformation (51) et en utilisant (77)
il vient

$$\left[\Delta(t, t_0) \right] A_{10}^{(n)} \Big|_{\substack{b \to c \\ c \to b \\ a \to -a}} =$$

(78)
$$= \bar{\Delta}(t, t_0)\, (-1)^n\, i \int_{t_0}^{t} d\tau' \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j\, c(\tau')\, \bar{\Delta}(\tau', t)\, \Theta(\tau' - \tau_1) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{2n-1} \Theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \prod_{i=1}^{n} b(\tau_{2i-1})\, \bar{\Delta}(\tau_{2i}, \tau_{2i-1})\, c(\tau_{2i}) \,,$$

soit, en utilisant $\bar{\Delta}(\tau', t)\, \bar{\Delta}(t, t_0) = \bar{\Delta}(\tau', t_0)$

$$= (-1)^n i \int_{t_0}^{t} d\tau \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j\, c(\tau')\, \bar{\Delta}(\tau', t_0) \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j\, \Theta(\tau' - \tau_1) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{2n-1} \Theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i})\, \bar{\Delta}(\tau_{2i}, \tau_{2i-1})\, b(\tau_{2i-1}) \,,$$

en utilisant la propriété de groupe pour échanger τ' et τ_{2n}
dans les Θ il vient

$$= (-1)^n\, i \int_{t_0}^{t} d\tau' \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j\; c(\tau')\, \bar\Delta(\tau', t_0)\; \theta(\tau_{2n}-\tau_1) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{2n-2} \theta(\tau_j - \tau_{j+1})\; \theta(\tau_{2n-1}-\tau') \times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i}) \times$$

$$\times\, \bar\Delta(\tau_{2i}, \tau_{2i-1})\; b(\tau_{2i-1}) ,$$

et en faisant les changements de variables (permutation circulaire sur les τ_i)

$\tau_{2n} \to \tau_1$

$\tau_j \to \tau_{j+1}$, $j = 1, 2n-1$, ainsi que $\tau' \to \tau$

$$= (-1)^n \int_{t_0}^{t} d\tau \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j - \tau_{j+1})\; \theta(\tau_{2n}-\tau)\; \Delta(\tau, t_0)\, c(\tau) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\; \Delta(\tau_{2i-1}, \tau_{2i})\; b(\tau_{2i}) = A_{01}^{(n)}$$

soit

(79) $$[\Delta(t,t_0)]\, A_{10}^{(n)} \Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ a\to -a}} = A_{01}^{(n)} \qquad \text{OK}.$$

Réduction de A_{11}

(80) $$A_{11} = P_1 \Big[\Big\{ \Delta(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, d\tau'\, c(\tau)\, \Delta(\tau,t_0)\, \Delta(t,\tau')\, b(\tau') \Big\} \times$$

$$\times \exp\Big\{ - \int d\tau_1\, d\tau_1'\; c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1, \tau_1')\, b(\tau_1') \Big\} \Big] ,$$

Nous obtenons les règles pour calculer $A_{11}^{(n)}$ de la manière habituelle.

On construit la table T''_{n-1} obtenue en faisant correspondre à chaque ligne de T_{n-1} les lignes obtenues en mettant tous les ordres de τ et τ' possibles.

Si la lignes obtenue est

$$j_1 \cdots j_k\, \tau\, j_{k+1} \cdots j_\ell\, \tau'\, j_{\ell+1} \cdots j_{2(n-1)} ,$$

(on peut avoir aussi bien $\tau' > \tau$)

on fait correspondre, en plus des règles pour A_{00} , les facteurs :

$$\int d\tau\, d\tau'\; c(\tau)\; \bar\Delta(\tau, t_0)\; \bar\Delta(t, \tau')\; b(\tau')$$

$$\theta(j_k - \tau)\; \theta(\tau - j_{k+1})\; \theta(j_\ell - \tau')\; \theta(\tau' - j_{\ell+1}) ,$$

P est la parité de la permutation qui passe de l'ordre

$\tau\tau'\; 11' \ldots\; nn'$

à l'ordre $$j_1 \cdots j_k\, \tau\, j_{k+1} \cdots j_\ell\, \tau'\, j_{\ell+1} \cdots j_{2(n-1)} ,$$

cela pour le terme dépendant de τ, τ' , on doit aussi ajouter

$$\Delta(t,t_0)\,A^{(n)}_{00}$$

correspondant au premier terme de la (80).

Nous remarquons que comme d'habitude des lignes qui correspondent , avec la même insertion de τ et τ' ., à des lignes qui se cancellaient dans T_{n-1} se cancellent toujours, de sorte qu'il suffit de considérer les lignes générées par la 1ère ligne de T_{n-1} .

D'après notre expérience avec A_{01} et A_{10} , nous voyons que la généralisation de la proposition III 6 est ici que des lignes qui diffèrent par une tranposition $\tau \leftrightarrow \ell$ ou $\tau' \leftrightarrow \ell'$ se cancellent à cause de la propriété de groupe.

On a donc graphiquement

$$\begin{aligned}
A^{(n)}_{11} = {} & \Delta(t,t_0) \quad 1\,1' \ldots\, n\,n' \\
& + \sum_{\text{ordres de } \tau} \tau\,\tau'\; 1\,1' \ldots (n-1)(n-1)' \\
& + \sum_{\text{ordres } \tau} \tau\; 1\; \tau'\, 1' \ldots\ldots (n-1)(n-1)' \\
& + \sum_{\text{ordres } \tau} \tau\; 1\; 1'\, \tau' \ldots (n-1)(n-1)' \\
& \quad \vdots \\
& + \sum_{\text{Ordres } \tau} \tau\; 1\; 1' \ldots\ldots (n-1)\,\tau'\,(n-1)' \\
& + \sum_{\text{Ordres } \tau} \tau\; 1\; 1' \ldots\ldots (n-1)(n-1)'\,\tau' \; .
\end{aligned}$$

A cause de la généralisation de la proposition III 6 relative à τ' les termes reliés par une flèche se cancellent nous laissant

$$\begin{aligned}
A^{(n)}_{11} = {} & \Delta(t,t_0) \quad 1\,1' \ldots\, n\,n' \\
& + \sum_{\text{Ordres } \tau} \tau\,\tau'\; 1\,1' \ldots (n-1)(n-1)' \\
= {} & \Delta(t,t_0) \quad 1\,1' \ldots (n-1)(n-1)' \\
& + \tau\,\tau'\; 1\,1' \ldots (n-1)(n-1)' \\
& + \tau'\,\tau\; 1\,1' \ldots\ldots (n-1)(n-1)' \\
& + \tau'\,1\,\tau\,1' \ldots\ldots (n-1)(n-1)' \\
& + \\
& \quad \vdots \\
& + \tau'\,1\,1' \ldots \tau\,(n-1)(n-1)' \\
& + \tau'\,1\,1' \ldots (n-1)\,\tau\,(n-1)' \\
& + \tau'\,1\,1' \ldots (n-1)(n-1)'\,\tau \; .
\end{aligned}$$

A cause de la généralisation de la proposition III 6 relative à τ les termes reliés par une flèche se cancellent de sorte qu'il nous reste

(81) $$\begin{aligned} A_{11}^{(n)} = {} & \Delta(t,t_0)\ 1\ 1' \ldots n\ n' \\ & + \tau\ \tau'\ 1\ 1' \ldots (n-1)\ (n-1)' \\ & + \tau'\ 1\ 1' \ldots (n-1)\ (n-1)'\ \tau \ . \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que les deux premiers termes de (81) se cancellent.

D'après les règles de correspondances, le second terme s'écrit

$$(-1)^{n-1} \int d\tau\, d\tau' \prod_{i=1}^{n-1} d\tau_i\, d\tau_{i'}\ \Theta(\tau-\tau')\,\Theta(\tau'-\tau_1)\,\Theta(\tau_1-\tau_{1'}) \times$$

$$\times\ \Theta(\tau_{1'}-\tau_2) \ldots \Theta(\tau_{n-1}-\tau_{(n-1)'})\quad c(\tau)\,\bar\Delta(\tau,t_0) \times$$

$$\times\ \bar\Delta(t,\tau')\, b(\tau') \prod_{i=1}^{n-1} c(\tau_1)\,\bar\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\, b(\tau_{1'}) ,$$

ou en utilisant $\bar\Delta(t_0,t) = \bar\Delta(t,t_0)^{-1}$,

$$= -\Delta(t,t_0)(-1)^n \int d\tau\, d\tau' \prod_{i=1}^{n-1} d\tau_1\, d\tau_{1'}\ \Theta(\tau-\tau') \times$$

$$\times\ \Theta(\tau'-\tau_1)\,\Theta(\tau_1-\tau_{1'}) \ldots \Theta(\tau_{n-1}-\tau_{(n-1)'}) \times$$

$$\times\ c(\tau)\,\bar\Delta(\tau,\tau')\, b(\tau') \prod_{i=1}^{n-1} c(\tau_1)\,\bar\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\, b(\tau_{1'})$$

$$= -\Delta(t,t_0)\, A_{00}^{(n)} , \qquad (\text{voir } (67))$$

et donc

(82) $$A_{11}^{(n)} = \tau'\ 1\ 1' \ldots (n-1)\ (n-1)'\ \tau ,$$

soit analytiquement, la permutation est impaire.

(83) $$\begin{aligned} A_{11}^{(n)} = {} & (-1)(-1)^{n-1} \int_{t_0}^{t} d\tau\, d\tau' \prod_{i=1}^{n-1} d\tau_1\, d\tau_{1'}\, \Theta(\tau'-\tau_1)\,\Theta(\tau_1-\tau_{1'}) \ldots \\ & \ldots \Theta(\tau_{n-1}-\tau_{(n-1)'})\,\Theta(\tau_{(n-1)'}-\tau)\, c(\tau)\,\bar\Delta(\tau,t_0)\,\bar\Delta(t,\tau') \times \\ & \times\ b(\tau') \prod_{i=1}^{n-1} c(\tau_1)\,\bar\Delta(\tau_1,\tau_{1'})\, b(\tau_{1'}) , \end{aligned}$$

ou encore

$$A_{11}^{(n)} = \Delta(t,t_0)\,(-1)^n \int_{t_0}^{t} d\tau\, d\tau' \prod_{i=1}^{n-1} d\tau_1\, d\tau_1'\, \theta(\tau'-\tau_1)\,\theta(\tau_1-\tau_1')\ldots$$

(84)

$$\ldots\ldots\ \theta(\tau_{n-1}-\tau_{(n-1)'})\ \theta(\tau_{(n-1)'}-\tau) \times c(\tau)\,\bar{\Delta}(\tau,\tau') \times$$

$$\times\, b(\tau') \prod_{i=1}^{n-1} c(\tau_1)\ \bar{\Delta}(\tau_1,\tau_1')\, b(\tau_1'),$$

Nous voulons vérifier que (51) s'applique bien, c'est à dire que l'on doit avoir

(85) $$A_{11} = [\Delta(t,t_0)]\, A_{00}\Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ a\to -a}}$$

calculons $A_{00}^{(n)}\Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ a\to -a}}$ en utilisant (67) et (77) il vient

$$A_{00}^{(n)}\Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ a\to -a}} = (-1)^n \int_{t_0}^{t} \prod_{i=1}^{n} d\tau_1\, d\tau_1'\ \theta(\tau_1-\tau_1')\,\theta(\tau_1'-\tau_2)\ldots$$

$$\ldots\theta(\tau_n-\tau_{n'}) \prod_{i=1}^{n} b(\tau_1)\,\bar{\Delta}(\tau_1',\tau_1)\,c(\tau_1')$$

$$= (-1)^n \int_{t_0}^{t} \prod_{i=1}^{n} d\tau_i\ d\tau_1'\ \theta(\tau_1-\tau_1')\,\theta(\tau_1'-\tau_2)\ldots\ \theta(\tau_n-\tau_{n'}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_i')\ \bar{\Delta}(\tau_i',\tau_i)\ b(\tau_i),$$

soit, en faisant le changement de variables

$$\tau_i \to \tau_i' \qquad\qquad \tau_i' \to \tau_i$$

$$= (-1)^n \int_{t_0}^{t} \prod_{i=1}^{n} d\tau_1 d\tau_1'\ \theta(\tau_1'-\tau_1)\,\theta(\tau_1-\tau_{2'})\ldots\ldots\ \theta(\tau_{n'}-\tau_n) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_i)\ \bar{\Delta}(\tau_i,\tau_{i'})\,b(\tau_{i'}).$$

Dans cette intégrale, on peut comme d'habitude, en utilisant la propriété de groupe suivie d'un changement de variables, permuter à volonté dans les fonctions θ les τ_ℓ avec les τ_k, pour tout ℓ, k ainsi que les $\tau_{\ell'}$ avec les $\tau_{k'}$ pour tout ℓ', k' sans changer la valeur de l'intégrale.

Les fonctions θ correspondent à l'ordre

$$1'\ 1\ \ 2'\ 2\ \ 3'\ 3 \ldots n'\ n$$

En effectuant successivement les permutations

$$1' \leftrightarrow 2',\quad 2' \leftrightarrow 3' \quad \ldots\ldots \quad (n-1)' \leftrightarrow n'$$

on fait une permutation circulaire sur les indices primés qui les fait monter d'un cran, et on arrive à l'ordre

$$n' \quad 1 \quad 1' \quad 2 \quad 2' \quad 3 \ldots (n-1)' \; n$$

qui correspond aux fonctions θ

$$\theta(\tau_{n'}-\tau_1)\,\theta(\tau_1-\tau_{1'})\,\theta(\tau_{1'}-\tau_2)\,\theta(\tau_2-\tau_{2'})\ldots\theta(\tau_{(n-1)'}-\tau_n),$$

on a donc

$$A_{00}^{(n)}\Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ a\to -a}} = (-1)^n \int_{t_0}^{t} \prod_{i=1}^{n} d\tau_i\, d\tau_{i'}\; \theta(\tau_{n'}-\tau_1)\times$$

$$\times\,\theta(\tau_{1'}-\tau_2)\,\theta(\tau_2-\tau_{2'})\ldots\theta(\tau_{n-1}-\tau_{(n-1)'})\times$$

$$\times\,\theta(\tau_{(n-1)'}-\tau_n)\prod_{i=1}^{n-1} c(\tau_i)\,\bar\Delta(\tau_i,\tau_{i'})\,b(\tau_{i'})\,c(\tau_n)\times$$

$$\times\,\bar\Delta(\tau_n,\tau_{n'})\,b(\tau_{n'}),$$

et en faisant le changement de variables

$$\tau_n\to\tau,\qquad \tau_{n'}\to\tau'$$

$$A_{00}^{(n)}\Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ c\to -a}} = (-)^n \int_{t_0}^{t} \prod_{i=1}^{n-1} d\tau_i\, d\tau_{i'}\, d\tau\, d\tau'\; \theta(\tau'-\tau_1)\,\theta(\tau_1-\tau_{1'})\,\theta(\tau_{1'}-\tau_2)\ldots$$

(86) $$\ldots\theta(\tau_{n-1}-\tau_{(n-1)'})\,\theta(\tau_{(n-1)'}-\tau)\,c(\tau)\,\bar\Delta(\tau,\tau')\,b(\tau')\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1} c(\tau_i)\,\bar\Delta(\tau_i,\tau_{i'})\,b(\tau_{i'}).$$

En comparant (86) et (84) on voit que (85) est bien vérifiée.

Nous avons donc réduit les A_{ij} à des P_2- produits et vérifié explicitement les relations

(51) $$A_{\bar i\bar j} = [\Delta(t,t_0)]\,A_{ij}\Big|_{\substack{b\to c\\ c\to b\\ a\to -a}}\,.$$

Nous regroupons maintenant les résultats de ce paragraphe.

(86) A_{00} est donné par (68) et (67)

$$A_{00} = P_2 \exp\Big\{-\int_{t_0}^{t} c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1,\tau_2)\,b(\tau_2)\Big\},$$

dans le sens que

$$A_{00}^{(n)} = (-1)^n \int \prod_{j=1}^{2n} d\tau_j \prod_{j=1}^{2n-1}\theta(\tau_j-\tau_{j+1}) \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\,\bar\Delta(\tau_{2i-1},\tau_{2i})\,b(\tau_{2i}).$$

est donné par (72) et (73)

$$A_{10} = P_2\Big[i\int_{t_0}^{t} d\tau'\,\Delta(t,\tau')\,b(\tau')\exp\Big\{-\int_{t_0}^{t} d\tau_1\, d\tau_2\, c(\tau_1)\,\Delta(\tau_1-\tau_2)\,b(\tau_2)\Big\},$$

dans le sens que

$$A_{10}^{(n)} = i\,(-1)^n \int_{t_0}^{t} d\tau' \prod_{i=1}^{2n} d\tau_i \; \bar{\Delta}(t,\tau')\, b(\tau')\, \theta(\tau'-\tau_1) \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j-\tau_{j+1})$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\, \bar{\Delta}(\tau_{2i-1},\tau_{2i})\, b(\tau_{2i}).$$

A_{01} est donné par $\Delta(t,t_0)\, \Delta_{10} \Big|_{\substack{c \to b \\ b \to c \\ a \to -a}}$
ou par (75) (76)

$$A_{01} = P_z \left[\exp\left\{ - \int d\tau_1 d\tau_2\, c(\tau_1)\, \Delta(\tau_1,\tau_2)\, b(\tau_2) \right\} i \int d\tau\, c(\tau)\, \Delta(\tau,t_0) \right],$$

dans le sens que

$$A_{01}^{(n)} = (-1)^n \int_{t_0}^{t} d\tau \prod_{i=1}^{2n} d\tau_i \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j-\tau_{j+1})\, \theta(\tau_{2n}-\tau) \; \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i-1})\, \bar{\Delta}(\tau_{2i-1},\tau_{2i})\, b(\tau_{2i})\; i\, c(\tau)\, \Delta(\tau,t_0).$$

A_{11} est donné par $\Delta(t,t_0)\, A_{00} \Big|_{\substack{b \to c \\ c \to b \\ a \to -a}}$,

soit

$$A_{11}^{(n)} = (-1)^n \int \prod_{i=1}^{2n} d\tau_i \prod_{j=1}^{2n-1} \theta(\tau_j-\tau_{j+1}) \prod_{i=1}^{n} c(\tau_{2i})\, \Delta(\tau_{2i},\tau_{2i-1}) \; \times$$

$$\times\, b(\tau_{2i-1}) \times \Delta(t,t_0)$$

ou

$$\bar{\Delta}(\tau_1,\tau_2) = \exp i \int_{\tau_2}^{\tau_1} ds\, a(s)$$

$$\Delta(\tau_1,\tau_2) = \theta(\tau_1-\tau_2)\, \bar{\Delta}(\tau_1,\tau_2).$$

En revenant au paragraphe (1) nous voyons que nous avons résolu notre problème dans la mesure où, en remplacant les expressions (86) dans (8) (voir (17)), nous avons maintenant l'intégrale fonctionnelle produit (8) comme la somme d'une série d'intégrales fonctionnelles standard , en particulier en traitant les termes provenant de (86) comme des interactions, on va avoir une série de perturbations ne faisant plus intervenir de matrices non commutantes à chaque vertex.

IV 1. LE MODELE DANS LE FORMALISME OPERATEUR

Nous considérons le modèle [19] consistant en un oscillateur harmonique amorti forcé par un bruit blanc dont la fréquence est un processus markovien bivalué $m(t)$ indépendamment défini de matrice de transition.

(1) $$M = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{2} & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{\nu}{2} \end{bmatrix}$$

L'équation de Langevin est donc

(2) $$\ddot{q} + \lambda \dot{q} + \omega^2(t)\, q = f(t)$$

où $\omega^2(t) = \omega_0^2 \left(1 + \varepsilon\, m(t)\right)$, $m(t) = \pm 1$,

l'équation (2) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{\vec{Q}} + \mathcal{K} \vec{Q} = \vec{f}(t)$$

(3) $$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 & +\lambda \end{bmatrix} , \qquad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} ,$$

où $f(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de corrélation

(4) $$\left\{ f(t) , f(t') \right\} = c\, \delta(t - t') .$$

Nous introduisons maintenant le formalisme opérateur correspondant à ce modèle en utilisant librement les résultats du chapitre III.

Le système est décrit par les opérateurs de Heisenberg.

(4') $$\begin{aligned} q_i^{(\nu)}(t) &= e^{iHt}\, q_i^{(\nu)}\, e^{-iHt} \\ p_1^{(\nu)}(t) &= e^{iHt}\, p_1^{(\nu)}\, e^{-iHt} \end{aligned} \qquad i = 1, 2 ; \quad \nu = 1, 2$$

nous introduisons aussi les opérateurs

(5) $$q_i = \sum_\nu q_i^{(\nu)} , \qquad p_i = \sum_\nu p_i^{(\nu)} ,$$

ainsi que les projecteurs

(6) $$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbb{1} = P_1 + P_2 ,$$

on a, bien sûr,

(7) $$\left\{ \begin{aligned} q_i^{(\nu)} &= P^{(\nu)} q_i \\ p_i^{(\nu)} &= P^{(\nu)} p_i . \end{aligned} \right.$$

L'hamiltonien correspondant à (3) et (4) s'écrit

(8) $$H = \left[-i \frac{c}{2} \vec{p}\, P_2\, \vec{p} - \vec{p}\, \mathcal{K}_0\, \vec{q} \right] \mathbb{1} - \omega_0^2\, \vec{p}\, \underline{\varepsilon}\, \vec{q}\, \sigma_z - i \frac{\nu}{2} \left(\mathbb{1} - \sigma_x \right) ,$$

où

(9) $$\mathcal{K}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & +\lambda \end{bmatrix} , \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

et $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont des matrices de Pauli, explicitement

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Notons que :

$\rho_0, \underline{\varepsilon}$ et P_2 agissent sur les indices latins (espaces de $\vec{q}$)
$P^{(1)}, P^{(2)}$ et les matrices de Pauli agissent sur les indices grecs (espace de $m(t)$).

on veut obtenir les équations de mouvement pour les opérateurs
$p_i^{(\nu)}(t)$, $q_i^{(\nu)}(t)$.

Pour un opérateur O quelconque

$$\dot{O}_H = \frac{d}{dt}\left(e^{iHt} O_s e^{-iHt}\right) = iHe^{iHt} O_s e^{-iHt} + e^{iHt} O_s e^{-iHt} (-iH),$$

$\dot{O}_H = i\,[H O_H]$, , et il nous faut donc calculer

(10)
$$\begin{cases} \dot{p}_i^{(\nu)} = i\,[H, p_i^{(\nu)}] \\ \dot{q}_i^{(\nu)} = i\,[H, q_i^{(\nu)}]. \end{cases}$$

Nous avons besoin de H exprimé directement en fonction des p_i, q_i , en utilisant (8) et (9) il vient

$$\vec{p}\, P_2\, \vec{p} = p_2^2$$

$$\vec{p}\, \rho_0\, \vec{q} = [p_1, p_2] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = [p_1, p_2] \begin{bmatrix} -q_2 \\ \omega_0^2 q_1 + \lambda q_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}\, \rho_0\, \vec{q} = -p_1 q_2 + \omega_0^2 p_2 q_1 + \lambda p_2 q_2$$

$$\vec{p}\, \underline{\varepsilon}\, \vec{q} = [p_1, p_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \varepsilon p_2 q_1 ,$$

et donc

(11)
$$H = \left[-\frac{ic}{2} p_2^2 + p_1 q_2 - \omega_0^2 p_2 q_1 - \lambda p_2 q_2 - i\frac{\nu}{2}\right] \mathbb{1} - \\ -\omega_0^2 \varepsilon p_2 q_1 \sigma_z + i\frac{\nu}{2}\sigma_x ,$$

comme $\sigma_z = P^{(1)} - P^{(2)}$ et $\mathbb{1} = P^{(1)} + P^{(2)}$
nous écrivons finalement H sous la forme

(12)
$$H = \left[-i\frac{c}{2} p_2^2 + p_1 q_2 - \omega_0^2 p_2 q_1 - \lambda p_2 q_2 - i\frac{\nu}{2}\right] \otimes \\ \otimes \left(P^{(1)} + P^{(2)}\right) - \omega_0^2 \varepsilon p_2 q_1 \otimes \left[P^{(1)} - P^{(2)}\right] + \\ + i\frac{\nu}{2}\sigma_x .$$

On a aussi les relations de commutations

(13) $$[q_i, P_j] = i\,\delta_{ij}$$ et

$$[q_2, P_2^2] = q_2 P_2 P_2 - P_2 P_2 q_2$$
$$= [q_2, P_2] P_2 + P_2 [q_2, P_2] = iP_2 + P_2 i =$$
$$= 2iP_2$$

(14) $$[q_2, P_2^2] = 2iP_2 \,,$$

nous calculons maintenant les $[H, q_i^{(\alpha)}]$ et $[H, P_i^{(\alpha)}]$ les opérateurs étant des opérateurs de Schrödinger.

Il vient

$$[H, q_1^{(1)}] = H P^{(1)} q_1 - q_1 P^{(1)} H$$
$$= q_2 P^{(1)} [P_1, q_1] + i \frac{\nu}{2} q_1 (\sigma_x P^{(1)} - P^{(1)} \sigma_x)$$
$$= q_2 P^{(1)} (-i) + i \frac{\nu}{2} q_1 \left[\sigma_x, \frac{1}{2}(1+\sigma_z)\right]$$

$$[H, q_1^{(1)}] = -i q_2^{(1)} + \frac{\nu}{2} q_1 \sigma_y \,,$$

$$[H, q_2^{(1)}] = H P^{1} q_2 - q_2 P^{(1)} H$$
$$= P^{(1)} \left[\left(-i \frac{c}{2} P_2^2 - \omega_0^2 (1+\varepsilon) P_2 q_1 - \lambda P_2 q_2\right), q_2\right] +$$
$$+ i \frac{\nu}{2} q_2 \left[\sigma_x, \frac{1}{2}(1+\sigma_z)\right]$$

$$= P^{(1)} \left[\left(-i \frac{c}{2}\right)(-2iP_2) + \left(-\omega_0^2 (1+\varepsilon) q_1 - \lambda q_2\right)(-i)\right] +$$
$$+ \frac{\nu}{2} q_2 \sigma_y$$

$$[H, q_2^{(1)}] = -c P_2^{(1)} + i \omega_0^2 (1+\varepsilon) q_1^{(1)} + i \lambda q_2^{(1)} + \frac{\nu}{2} q_2 \sigma_y \,.$$

En procédant de même il vient sans difficulté

$$[H, q_1^{(2)}] = -i q_2^{(2)} - \frac{\nu}{2} q_1 \sigma_y$$

$$[H, q_2^{(2)}] = -c P_2^{(2)} + i \omega_0^2 (1-\varepsilon) q_1^{(2)} + i \lambda q_2^{(2)} - \frac{\nu}{2} q_2 \sigma_y$$

On a

$$[H, P_1^{(1)}] = H P^{(1)} P_1 - P_1 P^{(1)} H$$
$$= P^{(1)} \left[\left(-\omega_0^2 (1+\varepsilon) P_2 q_1\right), P_1\right] + i \frac{\nu}{2} P_1 \left[\sigma_x, \frac{1}{2}(1+\sigma_z)\right]$$

$$[H, P_1^{(1)}] = -i \omega_0^2 (1+\varepsilon) P_2^{(1)} + \frac{\nu}{2} P_1 \sigma_y \,,$$

et

$$[H, P_2^{(1)}] = H P^{(1)} P_2 - P_2 P^{(1)} H$$

$$= P^{(1)} \left[(p_1 q_2 - \lambda p_2 q_2), P_2 \right] + i \frac{\nu}{2} P_2 \left[\sigma_x, \frac{1}{2}(1 + \sigma_z) \right]$$

$$[H, P_2^{(1)}] = i p_1^{(1)} - \lambda i p_2^{(1)} + \frac{\nu}{2} P_2 \sigma_y \ ,$$

de même il vient facilement

$$[H, P_1^{(2)}] = -i \omega_0^2 (1-\varepsilon) p_2^{(2)} - \frac{\nu}{2} P_1 \sigma_y$$

$$[H, P_2^{(2)}] = i p_1^{(2)} - \lambda i p_2^{(2)} - \frac{\nu}{2} P_2 \sigma_y \ .$$

En multipliant toutes ces équations par e^{iHt} à gauche et par e^{-iHt} à droite, et en posant

(15) $$\sigma_y(t) = e^{iHt} \sigma_y e^{-iHt}$$

il vient finalement les formules

(16)

$$\dot{q}_1^{(1)} = q_2^{(1)} + i \frac{\nu}{2} q_1(t) \sigma_y(t)$$

$$\dot{q}_1^{(2)} = q_2^{(2)} - i \frac{\nu}{2} q_1(t) \sigma_y(t)$$

$$\dot{q}_2^{(1)} = -ic p_2^{(1)} - \omega_0^2 (1+\varepsilon) q_1^{(1)} - \lambda q_2^{(1)} + i \frac{\nu}{2} q_2(t) \sigma_y(t)$$

$$\dot{q}_2^{(2)} = -ic p_2^{(2)} - \omega_0^2 (1-\varepsilon) q_1^{(2)} - \lambda q_2^{(2)} - i \frac{\nu}{2} q_2(t) \sigma_y(t)$$

ainsi que

(17)

$$\dot{P}_1^{(1)} = \omega_0 (1+\varepsilon) P_2^{(1)} + i \frac{\nu}{2} P_1(t) \sigma_y(t)$$

$$\dot{P}_1^{(2)} = \omega_0^2 (1-\varepsilon) P_2^{(2)} - i \frac{\nu}{2} P_1(t) \sigma_y(t)$$

$$\dot{P}_2^{(1)} = -P_1^{(1)} + \lambda P_2^{(1)} + i \frac{\nu}{2} P_2(t) \sigma_y(t)$$

$$\dot{P}_2^{(2)} = -P_1^{(2)} + \lambda P_2^{(2)} - i \frac{\nu}{2} P_2(t) \sigma_y(t) \ .$$

Nous voulons déduire des équations (16) les équations d'évolution pour les valeurs moyennes

(18) $$\langle q_i^{(\alpha)}(t)\rangle_{q_0\alpha_0 t_0} = \langle L | q_i^{(\alpha)} | \vec{q}_0, \alpha_0\, t_0\rangle^R$$

où $$\langle L| = \sum_\nu \int d\vec{q}\, \langle \vec{q}, \nu|$$ et

$$|\vec{q}_0\, \alpha_0\, t_0\rangle^R = e^{iHt_0}\,|\vec{q}_0,\alpha_0\rangle$$

On remarque que les derniers termes de (16) risquent de poser des problèmes, l'idée est la suivante : en définissant

(19) $$\mathbb{P}^{(\nu)}(t) = e^{iHt}\, P^{(\nu)}\, e^{-iHt} ,$$

vérifiant $[\mathbb{P}^{(\nu)}(t)]^2 = \mathbb{P}^{(\nu)}(t)$, $\mathbb{P}^{(1)}(t) + \mathbb{P}^{(2)}(t) = \mathbb{1}$

ainsi que

(20) $$\langle L,\alpha\ t| = \langle L|\mathbb{P}^{(\alpha)}(t)$$

on a les relations

$$q_1^{(\alpha)}(t)\,\mathbb{P}^{(\alpha)}(t) = q_1(t)\,\mathbb{P}^{(\alpha)}(t)\,\mathbb{P}^{(\alpha)}(t) = q_1^{(\alpha)}(t)$$

et donc les valeurs moyennes

$\langle L| q_1^{(\alpha)}(t) | \vec{q}_0,\alpha_0\, t_0\rangle^R$ peuvent s'écrire

$\langle L,\alpha,t| q_1^{(\alpha)}(t)|\vec{q}_0,\alpha_0\, t_0\rangle^R$

(la même propriété étant vraie pour les $P_1^{(\alpha)}$)
et, en procédant ainsi, les derniers termes de (16) vont se simplifier en étant projetés sur $\langle L,\alpha,t|$

Nous calculons $\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha,t|$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha,t| = \frac{\partial}{\partial t}\langle L|\mathbb{P}^{(\alpha)}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\langle L|e^{iHt}\,\mathbb{P}^{(\alpha)}e^{-iHt}$$

or $\langle L|H = 0$ (conservation de la probabilité)

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha t| = \frac{\partial}{\partial t}\langle L|\mathbb{P}^{(\alpha)}e^{-iHt} = \frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha|e^{-iHt} ,$$

où on a posé

(21) $$\langle L\alpha| = \int d\vec{q}\ \langle\vec{q},\alpha| ,$$

il vient donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha,t| = \langle L,\alpha|(-iH)\,e^{-iHt} ,$$

on a la propriété habituelle $\langle L|P_i = 0$ et le seul terme de H ne contenant pas de P_i à gauche est (voir (11)) $-i\frac{\nu}{2}(1-\sigma_x)$ donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha,t| = \frac{\nu}{2}\langle L,\alpha|(\sigma_x-1)\,e^{-iHt}$$

or $\sigma_x = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ et donc

$$\langle L,1|\sigma_x = \langle L,2|$$

$$\langle L,2|\sigma_x = \langle L,1|$$

soit en posant $\bar{1}=2,\ \bar{2}=1$
et en utilisant $\langle L,\alpha\, t| = \langle L,\alpha|e^{-iHt}$

(22) $$\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha,t| = \frac{\nu}{2}\left[\langle L,\bar{\alpha},t| - \langle L,\alpha,t|\right].$$

Les valeurs moyennes s'écrivant

$$\langle q_i^{(\alpha)}(t)\rangle = \langle L,\alpha\, t|\, q_i^{(\alpha)}(t)\,|\vec{q}_0\,\alpha_0\,t_0\rangle^R$$

on a

$$\frac{d}{dt}\langle q_i^{(\alpha)}(t)\rangle = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\langle L,\alpha\, t|\right\} q_i^{(\alpha)}(t)\,|\vec{q}_0\,\alpha_0\,t_0\rangle^R +$$

$$+ \langle L,\alpha\, t|\,\dot{q}_i^{(\alpha)}(t)\,|\vec{q}_0\,\alpha_0\,t_0\rangle^R ,$$

soit, en utilisant (22) ainsi que

$$\langle L\bar{\alpha}\, t|\, q^{(\alpha)}(t) = 0 \qquad \text{car} \qquad \mathbb{P}^{(\alpha)}\mathbb{P}^{(\bar{\alpha})} = 0$$

il vient

(23) $$\frac{d}{dt}\langle q_i^{(\alpha)}(t)\rangle = \langle L\,\alpha\, t|\left[\dot{q}_i^{(\alpha)} - \frac{\nu}{2}q_i^{(\alpha)}\right]|\vec{q}_0\,\alpha_0\,t_0\rangle^R .$$

Pour pouvoir replacer (16) dans (23) il nous reste à évaluer

$$\langle L\alpha\, t|\, q_i(t)\,\sigma_y(t)$$

$$= \langle L\alpha\, t|\,\sigma_y(t)\,q_i(t)$$

$$= \langle L\alpha|e^{-iHt}\, e^{iHt}\,\sigma_y\, e^{-iHt} q_i(t)$$

$$= \langle L,\alpha|\,\sigma_y\, e^{iHt}\, q_i(t),$$

or

$$\langle 1|\sigma_y = [1,0]\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} = [0,-i]$$

$$\langle 2|\sigma_y = [0,1]\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} = [i,0],$$

soit $\langle\alpha|\sigma_y = (-1)^\alpha i \langle\bar\alpha|$

et donc

$$\langle L\alpha|\sigma_y e^{-iHt} q_i(t) = i(-1)^\alpha \langle L\bar\alpha|e^{-iHt} q_i(t) =$$

$$= i(-1)^\alpha \langle L\bar\alpha, t|q_i(t),$$

d'où

(24) $$\langle L\alpha t|q_i(t)\sigma_y(t) = i(-1)^\alpha \langle L,\bar\alpha t|q_i(t) \;;$$

nous réécrivons (16) sous la forme

(25)
$$\dot q_1^{(\alpha)} = q_2^{(\alpha)} - i(-1)^\alpha \frac{\nu}{2} q_1(t)\sigma_y(t)$$

$$\dot q_2^{(\alpha)} = -icP_2^{(\alpha)} - \omega_0^2\left(1-(-1)^\alpha\varepsilon\right)q_1^{(\alpha)} - \lambda q_2^{(\alpha)} - i(-1)^\alpha\frac{\nu}{2}q_2\sigma_y(t).$$

En reportant (25) dans (23) et en utilisant (24) il vient

$$\frac{d}{dt}\langle q_1^{(\alpha)}\rangle = \langle L,\alpha t|\left[q_2^{(\alpha)} - \frac{\nu}{2}q_1^{(\alpha)}\right]|\vec q_0\alpha_0, t_0\rangle^R +$$

$$+ \frac{\nu}{2}\langle L,\bar\alpha,t|q_1(t)|\vec q_0\alpha_0 t_0\rangle^R$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_2^{(\alpha)}\rangle = \langle L,\alpha,t|\left[-icP_2^{(\alpha)} - \omega_0^2\left(1-(-1)^\alpha\varepsilon\right)q_1^{(\alpha)} -\right.$$

$$\left. - \lambda q_2^{(\alpha)}\right]|\vec q_0\alpha_0 t_0\rangle^R - \frac{\nu}{2}\langle L\alpha t|q_2^{(\alpha)}(t)|\vec q_0\alpha_0 t_0\rangle^R +$$

$$+ \frac{\nu}{2}\langle L,\bar\alpha,t|q_2(t)|\vec q_0\alpha_0 t_0\rangle^R,$$

soit

(26)
$$\frac{d}{dt}\langle q_1^{(\alpha)}(t)\rangle = \langle q_2^{(\alpha)}(t)\rangle - \frac{\nu}{2}\langle q_1^{(\alpha)}(t)\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_1^{(\bar\alpha)}(t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_2^{(\alpha)}(t)\rangle = -\omega_0^2\left(1-(-1)^\alpha\varepsilon\right)\langle q_1^{(\alpha)}(t)\rangle - \lambda\langle q_2^{(\alpha)}(t)\rangle -$$

$$- \frac{\nu}{2}\langle q_2^{(\alpha)}(t)\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_2^{(\bar\alpha)}(t)\rangle.$$

Notre modèle est soluble dans la mesure où les équations pour les moments d'ordre n ne font pas intervenir de moments d'ordre $> n$ (ici $n = 1$) (26) est un système fermé d'équations différentielles. Cela est essentiellement dû à ce que l'interaction est <u>linéaire</u> ; si on ajoutait à l'Hamiltonien un terme pq^2 ce ne serait plus vrai.

Remarquons aussi que le caractère non markovien du processus $q(t)$ se manifeste ici par le fait que pour avoir l'évolution de

$$\langle \vec{q}(t)\rangle = \sum_{\alpha} \langle \vec{q}^{\,(\alpha)}(t)\rangle$$

il ne suffit pas de se donner les $\langle \vec{q}(0)\rangle$: il faut les $\langle \vec{q}^{\,(\alpha)}(0)\rangle$.

IV 2. <u>FORMULATION PROBALISTE</u>

Nous commençons par dériver l'équation de Fokker-Planck ; suivant les résultats du chapitre II la probabilité conditionnelle est donnée par

$$W(\vec{q},\nu,t;\vec{q}_0,\nu_0,t_0) = \langle \vec{q},\nu | \mathcal{U}(t,t_0) | \vec{q}_0,\vec{\nu}_0\rangle$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,t_0) = -iH\,\mathcal{U}(t,t_0) \quad ,$$

l'équation de Fokker-Planck est donc

(27) $$\frac{\partial}{\partial t} W(\vec{q},\nu,t;\vec{q}_0,\nu_0,t_0) = -iH\Big|_{p_j=-i\frac{\partial}{\partial q_j}} W(\vec{q},\nu,t;\vec{q}_0,\nu_0,t_0)$$

soit en posant

(28) $$W(\vec{q},\nu,t;\vec{q}_0,\nu_0,t_0) = W^{(\nu)}(\vec{q},t)$$

et en utilisant $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ainsi que (11)

il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} W^{1}(\vec{q},t) = \left[\frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - \frac{\partial}{\partial q_1} q_2 + \omega_0^2(1+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial q_2} q_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial q_2} q_2 - \frac{\nu}{2}\right] \times$$

(29) $$\times W^{(1)}(\vec{q},t) + \frac{\nu}{2} W^{(2)}(\vec{q},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W^{2}(\vec{q},t) = \left[\frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - \frac{\partial}{\partial q_1} q_2 + \omega_0^2(1-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial q_2} q_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial q_2} q_2 - \frac{\nu}{2}\right] \times$$

$$\times W^{(2)}(\vec{q},t) + \frac{\nu}{2} W^{(1)}(\vec{q},t).$$

Par ailleurs, $\langle q_1^{(\alpha)} \rangle$ est donné par

(30) $$\langle q_1^{(\alpha)} \rangle = \int d\vec{q}\; q_1\; W^{(\alpha)}(\vec{q},t).$$

Nous voyons maintenant comment (29) et (30) permettent de retrouver directement les équations pour les $\langle q_1^{(\alpha)}(t) \rangle$:

on a d'après (30)

$$\langle \dot{q}_1^{(\alpha)} \rangle = \int d\vec{q}\; q_1 \frac{\partial}{\partial t} W^{(\alpha)}(\vec{q},t).$$

Il suffit de remplacer dans cette équation la valeur de $\frac{\partial}{\partial t} W^{(\alpha)}(\vec{q},t)$ donnée par (29) puis d'intégrer par partie pour obtenir l'équation désirée ; nous illustrons la procédure pour $q_1^{(1)}$, on a

$$\langle \dot{q}_1^{(1)} \rangle = \int d\vec{q}\; q_1 \Big\{ \Big[\frac{c}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - \frac{\partial}{\partial q_1} q_2 + \omega_0^2 (1+\varepsilon) \frac{\partial}{\partial q_2} q_1 +$$

$$+ \lambda \frac{\partial}{\partial q_2} q_2 - \frac{\nu}{2} \Big] W^{(1)}(\vec{q},t) + \frac{\nu}{2} W^{(2)}(\vec{q},t) \Big\} ,$$

en intégrant par partie il vient

$$\langle \dot{q}_1^{(1)} \rangle = \langle q_2^{(1)} \rangle - \frac{\nu}{2} \langle q_1^{(1)} \rangle + \frac{\nu}{2} \langle q_1^{(2)} \rangle ,$$

ce qui est bien l'équation (26) pour $\alpha = 1$

Nous terminons ce paragraphe en dérivant par cette méthode les équations d'évolution pour les moments d'ordre deux pris au même temps.

On a

(31) $$\langle L | q_i^{(\alpha)}(t)\, q_j^{(\beta)}(t) | \vec{q}_0\, \alpha_0\, t_0 \rangle^R = \delta_{\alpha\beta} \int d\vec{q}\; q_i \times$$

$$\times q_j\, W^{(\alpha)}(\vec{q},t) ,$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \langle q_i^{(\alpha)} q_j^{(\alpha)} \rangle = \int d\vec{q}\; q_i\, q_j\, \dot{W}^{(\alpha)}(\vec{q},t) ,$$

en utilisant l'équation de Fokker-Planck et en intégrant par partie il vient

$$\frac{d}{dt}\langle q_i^{(1)}\, q_j^{(1)}\rangle = \int d\vec{q}\; q_i\, q_j \Big[\frac{c}{2}\frac{\overleftarrow{\partial^2}}{\partial q_2^2} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_1}\, q_2 -$$

(32)
$$- \omega_0^2\,(1+\varepsilon)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_2}\, q_1 - \lambda\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_2}\, q_2\Big]\, W^1(\vec{q},t) -$$

$$- \frac{\nu}{2}\langle q_i^{(1)}\, q_j^{(1)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_i^{(2)}\, q_j^{(2)}\rangle ,$$

en écrivant la même équation pour $\langle q_i^{(2)}\, q_j^{(2)}\rangle$ et en faisant agir les dérivées il vient le système

$$\frac{d}{dt}\langle q_1^{2(1)}\rangle = 2\langle q_1\, q_2^{(1)}\rangle - \frac{\nu}{2}\langle q_1^{2(1)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_1^{2(2)}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_1^{2(1)}\rangle = c\, W^{(1)} - 2\omega_0^2\,(1+\varepsilon)\langle q_1\, q_2^{(1)}\rangle - 2\lambda\langle q_2^{2(1)}\rangle -$$

(33)
$$- \frac{\nu}{2}\langle q_2^{2(1)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_2^{2(2)}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_1^{2(2)}\rangle = 2\langle q_1\, q_2^{(2)}\rangle - \frac{\nu}{2}\langle q_1^{2(2)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_1^{2(1)}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_2^{2(2)}\rangle = c\, W^{(2)} - 2\omega_0^2\,(1-\varepsilon)\langle q_1 q_2^{(2)}\rangle - 2\lambda\langle q_2^{2(2)}\rangle - \frac{\nu}{2}\langle q_2^{2(2)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_2^{2(1)}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_1 q_2^{(1)}\rangle = \langle q_2^{2(1)}\rangle - \omega_0^2\,(1+\varepsilon)\langle q_1^{2(1)}\rangle - \lambda\langle q_1 q_2^{(1)}\rangle -$$

$$- \frac{\nu}{2}\langle q_1 q_2^{(1)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_1 q_2^{(2)}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle q_1 q_2^{(2)}\rangle = \langle q_2^{2(2)}\rangle - \omega_0^2\,(1-\varepsilon)\langle q_1^{2(2)}\rangle - \lambda\langle q_1 q_2^{(2)}\rangle -$$

$$- \frac{\nu}{2}\langle q_1 q_2^{(2)}\rangle + \frac{\nu}{2}\langle q_1 q_2^{(1)}\rangle ,$$

où

$$\begin{cases} W^{(1)} = \int d\vec{q}\; W^{(1)}(\vec{q},t) \\ W^{(2)} = \int d\vec{q}\; W^{(2)}(\vec{q},t), \end{cases}$$

et donc

(34)
$$\begin{cases} \dot{W}^{(1)} = -\frac{\nu}{2} W^{(1)} + \frac{\nu}{2} W^{(2)} \\ \dot{W}^{(2)} = -\frac{\nu}{2} W^{(2)} + \frac{\nu}{2} W^{(1)} . \end{cases}$$

Remarquons que l'on peut [20, 21] faire l'étude de la stabilité à l'ordre deux (stabilité énergétique) du processus sur le système (33).

IV 3. SOMMATION DE LA SERIE DE PERTURBATION DE $\mathcal{S}'$

Suivant les résultats du chapitre II, que nous utilisons librement, la fonctionnelle génératrice peut s'écrire

(35) $$Z_{\nu_0}[\vec j, \vec j^*] = P\exp - i \int_{t_0}^{t} \hat h_I \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec j}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec j^*}\right) \quad Z_0[j, j^*],$$

où $\hat h = \hat h_0 + \hat h_I$ est l'Hamiltonien, $\hat h_0$ est une matrice diagonale et Z_0 est donné par

(36) $$Z_0[\vec j, \vec j^*] = \int D\vec q \, D\vec p \, \exp i \int_{t_0}^{t} d\tau \left[\vec p \dot{\vec q} - h_0(\vec q, \vec p) + \vec j \vec q + \vec j^* \vec p\right] \delta(q(t_0) - q_0)$$

d'après (8) nous prenons

(37) $$h_0 = -i \frac{c}{2} \vec p P_2 \vec p - \vec p \mu_0 \vec q$$

Nous nous interessons à la théorie des perturbations stationnaires, et donc nous prenons la limite $t_0 \to -\infty$

On veut donc calculer

(38) $$Z_0[\vec j, \vec j^*] = \int D\vec q \, D\vec p \, \exp i \int d\tau \left[\vec p\left[\dot{\vec q} + \mu_0 \vec q + \frac{ic}{2} P_2 \vec p\right] + \vec j \vec q + \vec j^* \vec p\right],$$

nous suivons la même méthode que pour les calculs analogues du chapitre I.

Le lemme d'intégration fonctionnelle par partie nous dit que

$$\int D\vec q \, D\vec p \, i\left[-\dot{\vec p} + \mu_0^T \vec p + \vec j\right] \exp i \ldots = 0$$

$$\int D\vec q \, D\vec p \, i\left[\dot{\vec q} + \mu_0 \vec q + icP_2 \vec p + \vec j^*\right] \exp i \ldots = 0,$$

soit

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu_0^T\right)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec j^*} + \vec j\right] Z_0[\vec j, \vec j^*] = 0$$

(39) $$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu_0\right)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec j} + icP_2 \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec j^*} + \vec j^*\right] Z_0[\vec j, \vec j^*] = 0.$$

Nous cherchons Z_0 sous la forme

(40)
$$Z_0[\vec{j},\vec{j}^*] = \exp - \left\{ \int d\tau_1\, d\tau_2\, \vec{j}^*(\tau_1)\, S(\tau_1-\tau_2)\, \vec{j}(\tau_2) + \frac{1}{2}\int d\tau_1\, d\tau_2\, \vec{j}(\tau_1)\, \Delta(\tau_1-\tau_2)\, \vec{j}(\tau_2) \right\},$$

où l'on suppose

(41) $\Delta^T(t) = \Delta(-t)$ correspondant à la propriété

$$\Delta_{12}(t_1-t_2) \sim \langle q(t_1)\,\dot{q}(t_2)\rangle = \langle \dot{q}(t_2)\, q(t_1)\rangle \sim \Delta_{21}(t_2-t_1)$$

en utilisant (41) il vient

(42)
$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec{j}^*(t)} Z_0 = i\int d\tau\, S(t-\tau)\,\vec{j}(\tau)\, Z_0[\vec{j},\vec{j}^*]$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \vec{j}(t)} Z_0 = i\int d\tau \left[S^T(\tau-t)\,\vec{j}^*(\tau) + \Delta(t-\tau)\,\vec{j}(\tau)\right] Z_0[\vec{j},\vec{j}^*],$$

et en portant (42)a dans (39)a il vient

$$\left[-i\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^T\right)\int d\tau\, S(t-\tau)\,\vec{j}(\tau) + \vec{j}(t)\right] Z_0[\vec{j},\vec{j}^*] = 0,$$

ce qui nous donne

(43) $$i\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^T\right) S(t) = \delta(t).$$

Nous résolvons (43) en posant

(44)
$$S(t) = \int dp\; e^{-ipt}\, S(p)$$

$$\Delta(t) = \int dp\; e^{-ipt}\, \Delta(p),$$

il vient $i(-ip - \Gamma_0^T)\, S(p) = \frac{1}{2\pi}$ soit

(45) $$S(p) = (2\pi)^{-1}\left(p - i\Gamma_0^T\right)^{-1}.$$

En portant maintenant (42) dans (39) il vient

$$\left\{ i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_0\right)\int d\tau \left[S^T(\tau-t)\,\vec{j}^*(\tau) + \Delta(t-\tau)\,\vec{j}(\tau)\right] - \right.$$

$$\left. - cP_2 \int d\tau\; S(t-\tau)\,\vec{j}(t) + \vec{j}^*(\tau)\right\} Z_0[\vec{j},\vec{j}^*] = 0,$$

nous remarquons que le terme en $\vec{j}^*$ disparaît car

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_0\right) S^T(t-\tau)$$

$$= i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_0\right)\int dp\; e^{-p(t-\tau)}\; S^T(p)$$

$$= \int dp\,(-i)\,(+ip-\Gamma_0)\,(2\pi)^{-1}\,(p-i\Gamma_0^T)^{-1\,T}\; e^{-ip(t-\tau)}$$

$$= \int dp\,(-)(p-i\Gamma_0)\,(2\pi)^{-1}\,(p-i\Gamma_0)^{-1}\; e^{-ip(t-\tau)}$$

$$= -(2\pi)^{-1}\int dp\; e^{-ip(t-\tau)} = -\delta(t-\tau)\,,$$

et il nous reste donc l'équation

(46) $$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_0\right)\Delta(t) = c\,P_2\,S(t)\,,$$

ou, en prenant la T.F.

$$i\,(-ip+\Gamma_0)\,\Delta(p) = c\,P_2\,S(p)\,,$$

soit, avec (45)

$$(p+i\Gamma_0)\,\Delta(p) = c\,(2\pi)^{-1}\,P_2\,(p-i\Gamma_0^T)^{-1}\,,$$

et donc

(47) $$\Delta(p) = (2\pi)^{-1}\,c\,(p+i\Gamma_0)^{-1}\,P_2\,(p-i\Gamma_0^T)^{-1}\,,$$

en posant $c = 1$

(48) $$\begin{cases} S(p) = (2\pi)^{-1}\,(p-i\Gamma_0^T)^{-1} \\ \Delta(p) = (2\pi)^{-1}\,(p+i\Gamma_0)^{-1}\,P_2\,(p-i\Gamma_0^T)^{-1}\,. \end{cases}$$

En calculant explicitement les matrices S et Δ à l'aide des expressions

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,,$$

on trouve finalement

$$S(p) = \frac{(2\pi)^{-1}}{p(p-\lambda i) - \omega_0^2} \begin{bmatrix} p-\lambda i & i\omega_0^2 \\ -i & p \end{bmatrix}$$

(49)
$$\Delta(p) = \frac{(2\pi)^{-1}}{(p^2-\omega_0^2) + \lambda^2 p^2} \begin{bmatrix} 1 & ip \\ -ip & p^2 \end{bmatrix}$$

OK avec [25].

D'après (37) et (8) nous voyons que l'interaction s'écrit

(50)
$$\hat{h}_I = -\omega_0^2 \vec{p}\, \varepsilon\, \vec{q}\, \sigma_z + i\frac{\nu}{2}\sigma_x - i\frac{\nu}{2}$$

le dernier terme de (50) peut être absorbé en remplaçant Z_0 par

(51)
$$e^{-\frac{\nu}{2}t}\Big|_\alpha^\beta Z_0\left[\vec{j}, \vec{j}^*\right]$$

où α et β sont les bornes d'intégration dans le série de perturbation ; avec (51) l'Hamiltonien d'interaction s'écrit finalement

$$\hat{h}'_I = -\omega_0^2 \vec{p}\, \varepsilon\, \vec{q}\, \sigma_z + i\frac{\nu}{2}\sigma_x$$

et nous avons la théorie de perturbation stationnaire sous la forme

$$\langle F[\vec{p},\vec{q}]\rangle_{sta} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} e^{-\frac{\nu}{2}t}\Big|_\alpha^\beta Z_0\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{q}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{p}}\right] \times$$

(52)
$$\times \left\{ F[\vec{p},\vec{q}]\; P \exp i\int_\alpha^\beta d\tau\left[\omega_0^2 \vec{p}\,\varepsilon\,\vec{q}\,\sigma_z - i\frac{\nu}{2}\sigma_x\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\vec{p}=0\\ \vec{q}=0}}$$

où il est compris que la limite $\alpha \to -\infty$ doit être prise à la fin des calculs, β est un temps plus grand que les temps intervenant dans F ; le $\sum_{\mu}$ est dû à l'action de $\langle L|$ et le $\frac{1}{2}\sum_{\mu'}$ tient compte que

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \int d\vec{q}\, |\vec{q}_0, \nu_0\, t_0\rangle^R = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

De (52), et avec (49) (44) et (40), nous lisons les

Règles de Feynman

* Vertex $\quad * = \frac{\nu}{2}\sigma_x \int_\alpha^\beta d\tau$

(53)
* propagateurs $\quad$ —▨~~~ $= i\omega_0^2\,\varepsilon^T \sigma_z \int_\alpha^\beta d\tau$
  $\quad \overset{t}{\rightsquigarrow}\overset{t'}{} \quad S(t-t')$
  $\quad \overset{t}{\longrightarrow}\overset{t'}{} \quad \Delta(t-t')$
* facteurs globaux $\quad \frac{1}{2} e^{-\frac{\nu}{2}t}\Big|_\alpha^\beta \frac{1}{n_*!} \sum_{\mu\mu'} P$

Pour obtenir ces règles, on a développé la P exponentielle dans (52) sous la forme

$$P\exp\,(A+B) = P\left[\sum_{na=0}^{\infty}\frac{1}{na!}\,A^{na}\sum_{nb=0}^{\infty}\frac{1}{nb!}\,B^{nb}\right]$$

le facteur $\frac{1}{n_\blacksquare!}$ se cancellant avec les $n_\blacksquare!$ numérotations possibles des vertex (il vient ε^T car le vertex est pris dans l'ordre $\vec{q}\ \vec{p}$ au lieu de $\vec{p}\ \vec{q}$ dans (52)).

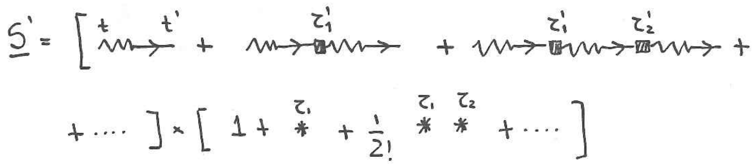
Nous calculons maintenant à l'aide des règles (53) $S'(t-t')$ la fonction de réponse stationnaire définie par

(54) $$S'(t-t')\Big|_{\alpha\beta} = \langle P_\alpha(t)\, q_\beta(t')\rangle_{sta}\,.$$

En posant

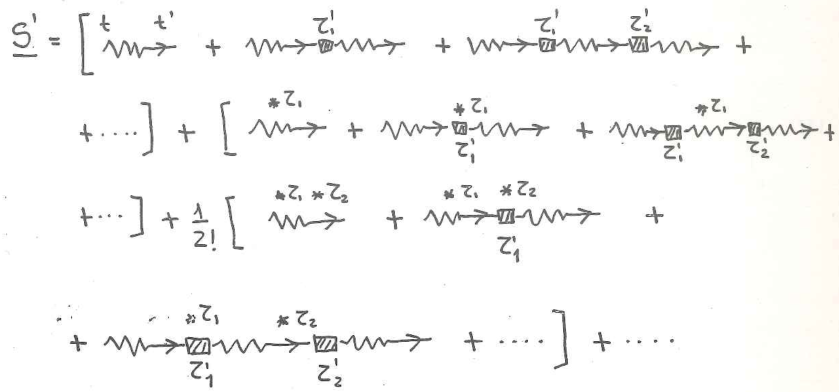
(55) $$S'(t) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{\nu}{2}t}\Big|_{\alpha}^{\beta}\sum_{k,k'}\underline{S}'\ ,$$

on a graphiquement



soit

(56)



En appelant I_{np} l'intégrant du p-ième terme de la n-ième ligne de (56) on voit que $(I_{1p}\equiv I_p)$

(57) $$I_{np} = \frac{1}{n!}\,P\left[\left(\frac{\nu}{2}\sigma_x\right)_{\tau_1}\cdots\cdots\left(\frac{\nu}{2}\sigma_x\right)_{\tau_n} I_p\right],$$

avec

$$I_p = P\Big[S(t-\tau_1')\, i\omega_0^2\sigma_z\,\underline{\varepsilon}^T S(\tau_1'-\tau_2')\cdots\cdots i\omega_0^2\sigma_z\,.$$

$$.\,\underline{\varepsilon}^T S(\tau_p'-t')\Big].$$

Soit le produit P portant sur les matrices σ

(58) $$I_p = (i\omega_0^2)^p \, P\left[(\sigma_z)_{\tau_1'} \ldots (\sigma_z)_{\tau_p'}\right] S(t-\tau_1')\,\underline{\varepsilon}^T \ldots \ldots \underline{\varepsilon}^T S(\tau_p'-t') ,$$

il vient donc, $I = \sum_{n,p=0}^{\infty} I_{np}$

(59) $$I = \sum_{n,p=0}^{\infty} (i\omega_0^2)^p \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^n}{n!} P\left[(\sigma_x)_{\tau_1} \ldots (\sigma_x)_{\tau_n} (\sigma_z)_{\tau_1'} \ldots (\sigma_z)_{\tau_p'}\right] S(t-\tau_1')\,\underline{\varepsilon}^T \ldots \underline{\varepsilon}^T S(\tau_p'-t'),$$

nous avons maintenant besoin du

<u>Lemme III 1</u> :

si $A(t_i)$, $B(t_j)$ sont tels que

(60) $$\begin{cases} [A(t_i)\,A(t_j)] = [B(t_i)\,B(t_j)] = 0 \\ [A(t_i)\,B(t_j)]_+ = 0 \end{cases}$$

alors

(61) $$P\left[A(\tau_1)\ldots A(\tau_n)\,B(\tau_1')\ldots B(\tau_p')\right] = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p} \varepsilon(\tau_i-\tau_j')\,A(\tau_1)\ldots A(\tau_n)\,B(\tau_1')\ldots B(\tau_p'),$$

où $\varepsilon(t) = 1, \quad t>0 \quad , \quad \varepsilon(t) = -1. \quad t<0$.

<u>Preuve</u> : on passe de l'ordre chronologique à l'ordre $A(\tau_1)\ldots A(\tau_n)\,B(\tau_1')\ldots B(\tau_n')$ en effectuant une commutation entre $A(\tau_i)$ et $B(\tau_j')$ si et seulement si $\tau_j' > \tau_i$, d'où le produit des ε dans (61), les autres commutations n'apportant pas de changement de signe d'après (60).

D'après les propriétés bien connues des matrices de Pauli, le lemme s'applique à (59) en donnant

$$I = \sum_{n,p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^n}{n!} (\sigma_x)^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p} \varepsilon(\tau_i-\tau_j')\,(\sigma_z)^p (i\omega_0^2)^p \times$$

$$\times S(t-\tau_1')\,\underline{\varepsilon}^T \ldots \underline{\varepsilon}^T S(\tau_p'-t'),$$

soit comme $$\underline{S}' = \sum_{n,p=0}^{\infty} \int \prod_{i=1}^{n} d\tau_i \prod_{j=1}^{p} d\tau'_j \, I_{np}$$

$$\underline{S}' = \sum_{n,p=0}^{\infty} \int \prod_{i=1}^{n} d\tau_i \prod_{j=1}^{p} d\tau'_j \, \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^n}{n!} (\sigma_x)^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{p} \varepsilon(\tau_i-\tau'_j) \times$$

$$\times (\sigma_z)^p \, (i\omega_0^2)^p \, S(t-\tau'_1) \, \underline{\varepsilon}^T \dots \underline{\varepsilon}^T S(\tau'_p-t') ,$$

en effectuant la somme sur n il vient

(62)
$$\underline{S}' = \sum_{p=0}^{\infty} (i\omega_0^2)^p \int \prod_{j=1}^{p} d\tau'_j \, \exp\left[\frac{\nu}{2}\sigma_x \int d\tau \prod_{j=1}^{p} \varepsilon(\tau-\tau'_j)\right] \times$$

$$\times (\sigma_z)^p \, S(t-\tau'_1) \, \underline{\varepsilon}^T \dots \underline{\varepsilon}^T S(\tau'_p-t').$$

Pour calculer S' nous avons besoin du

Lemme III 2

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu\mu'} \left[(\sigma_x)^n (\sigma_z)^p\right]\Big|_{\mu\mu'} = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^p\right).$$

Preuve : on a les relations $(\sigma_x)^2 = (\sigma_y)^2 = (\sigma_z)^2 = 1$ et

$$\sigma_x \sigma_z = -i\sigma_y$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} \sigma_x = 1 \, ; \quad \frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} \sigma_y = \frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} \sigma_z = 0 \, , \quad \frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} \mathbb{1} = 1$$

$$(\sigma_x)^n = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) + \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\sigma_x$$

$$(\sigma_z)^p = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^p\right) + \frac{1}{2}\left(1-(-1)^p\right)\sigma_z ,$$

en utilisant ces relations il vient

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} \left((\sigma_x)^n (\sigma_z)^p\right) = \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right)\left(1+(-1)^p\right) + \frac{1}{4} \cdot$$

$$\cdot \left(1-(-1)^n\right)\left(1+(-1)^p\right) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^p\right)$$

CQFD.

En utilisant (55) (62) et le lemme 2 il vient

(63)
$$S' = e^{-\frac{\nu}{2}t} \Big|_{\alpha}^{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} (i\omega_0^2)^{2l} \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{j=1}^{2l} d\tau'_j \, \exp\left[\frac{\nu}{2}\int_{\alpha}^{\beta} d\tau \, \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \prod_{j=1}^{2l} \varepsilon(\tau-\tau'_j)\right] S(t-\tau'_1) \, \underline{\varepsilon}^T \dots \underline{\varepsilon}^T S(\tau'_{2l}-t').$$

La fonction $S(t)$ vérifie $S(t)=0\ ,\ t>0$ (retardation) et on a donc $t' > \tau'_{2\ell} > \tau'_{2\ell-1} > \dots > \tau'_1 > t$

avec $\beta > t'$ et $t > \alpha$,

ces relations entrainent

$$\int_\alpha^\beta d\tau \prod_{j=1}^{2\ell} \varepsilon(\tau-\tau'_j) = +\tau\Big|_{\tau'_{2\ell}}^{\beta} - \tau\Big|_{\tau'_{2\ell-1}}^{\tau'_{2\ell}} + \tau\Big|_{\tau'_{2\ell-2}}^{\tau'_{2\ell-1}} +$$

$$+ \dots - \tau\Big|_{\tau'_3}^{\tau'_4} + \tau\Big|_{\tau'_2}^{\tau'_3} - \tau\Big|_{\tau'_1}^{\tau'_2} + \tau\Big|_{\alpha}^{\tau'_1}$$

$$\int_\alpha^\beta d\tau \prod_{j=1}^{2\ell} \varepsilon(\tau-\tau'_j) = \beta - \alpha - 2\sum_{j=1}^{2\ell}(-1)^j \tau'_j \quad ,$$

et donc (63) donne

(64)
$$S' = e^{-\frac{\nu}{2}t}\Big|_\alpha^\beta \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta \prod_{j=1}^{2\ell} d\tau'_j \; e^{\frac{\nu}{2}(\beta-\alpha)} \exp\Big[-\nu\sum_{j=1}^{2\ell}(-1)^j\tau'_j\Big] \times$$

$$\times (i\omega_0^2)^{2\ell} S(t-\tau'_1)\,\underline{\varepsilon}^T \dots \underline{\varepsilon}^T S(\tau'_{2\ell}-t'),$$

soit finalement $\tau'_j \longrightarrow \tau_j$

(65)
$$S' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta \prod_{j=1}^{2\ell} d\tau_j \; e^{-\nu(-1)^j\tau_j} (i\omega_0^2)^{2\ell} S(t-\tau_1)\,\underline{\varepsilon}^T \dots$$

$$\dots \underline{\varepsilon}^T S(\tau_{2\ell}-t').$$

en appelant D l'ensemble des τ_i vérifiant $\beta > \tau_{2\ell} > \tau_{2\ell-1} \dots > \tau_1 > \alpha$

on a, d'après la retardation de S

$$S' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_D \prod_{j=1}^{2\ell} d\tau_j \; e^{-\nu(-1)^j\tau_j} (i\omega_0^2)^{2\ell} S(t-\tau_1)\,\underline{\varepsilon}^T \dots$$

$$\dots \underline{\varepsilon}^T S(\tau_{2\ell}-t'),$$

en exprimant $S(t)$ à l'aide de $S(p)$ il vient

$$S' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_D \prod_{j=1}^{2\ell} d\tau_j \; e^{-\nu(-1)^j\tau_j} \int \prod_{i=1}^{2\ell+1} dp_i\, S(p_1)\,\underline{\varepsilon}^T \dots$$

$$\dots \underline{\varepsilon}^T S(p_{2\ell+1})\,(i\omega_0^2)^{2\ell} \times$$

$$\times\ e^{iP_1 t}\ e^{+iP_{2\ell+1} t'} \prod_{j=1}^{2\ell} e^{-i\tau_j (P_{j+1}-P_j)}$$

,

on a donc

(66)
$$S' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int \prod_{i=1}^{2\ell+1} dp_i\ e^{-ip_i t}\ e^{+P_{2\ell+1} t'}\ (i\omega_0^2)^{2\ell}\ \times$$

$$\times\ S(p_i)\ \underline{\varepsilon}^T \dots\ \underline{\varepsilon}^T\ S(P_{2\ell+1})\ J_\ell(P_1 \dots P_{2\ell+1})$$

où

(67)
$$J_\ell(P_1 \dots P_{2\ell+1}) = \int_D \prod_{j=1}^{2\ell} d\tau_j\ e^{-\tau_j[(-1)^j \nu + i(P_{j+1}-P_j)]} .$$

Nous calculons maintenant J_ℓ , d'après la définition de D on peut écrire

(68)
$$J_\ell = \int_\alpha^\beta d\tau_{2\ell}\ e^{-\tau_{2\ell}(\nu + i(P_{2\ell+1}-P_{2\ell}))} \int_\alpha^{\tau_{2\ell}} d\tau_{2\ell-1}\ \times$$

$$\times\ e^{-\tau_{2\ell-1}(-\nu + i(P_{2\ell}-P_{2\ell-1}))} \dots \int_\alpha^{\tau_3} d\tau_2\ e^{-\tau_2(\nu + i(P_3-P_2))}\ \times$$

$$\times \int_\alpha^{\tau_2} d\tau_1\ e^{-\tau_1(-\nu + i(P_2-P_1))}$$

calculons J_1

$$J_1 = \int_\alpha^\beta d\tau_2\ e^{-t_2(\nu + i(P_3-P_2))} \int_\alpha^{\tau_2} d\tau_1\ e^{-\tau_1(-\nu + i(P_2-P_1))}$$

$$= \int_\alpha^\beta d\tau_2\ e^{-\tau_2(\nu + i(P_3-P_2))}\ \frac{1}{\nu - i(P_2-P_1)}\ e^{-\tau_1(-\nu + i(P_2-P_1))}\Big|_\alpha^{\tau_2}$$

$$= \int_\alpha^\beta d\tau_2\ e^{-\tau_2(i(P_3-P_1))}\ \frac{1}{\nu - i(P_2-P_1)}$$

dans la limite $\alpha \longrightarrow -\infty$, $\beta \longrightarrow +\infty$

(69) $$J_1 = 2\pi\,\delta(P_3 - P_1)\,\frac{1}{\nu - i(P_2 - P_1)}$$

d'autre part, d'après (68)

$$J_2 = \int_\alpha^\beta d\tau_4\, e^{-\tau_4(\nu + i(P_5 - P_4))} \int_\alpha^{\tau_4} d\tau_3\, e^{-\tau_3(-\nu + i(P_4 - P_3))} \times$$

$$\times \frac{1}{-i(P_3 - P_1)}\,\frac{1}{\nu - i(P_2 - P_1)}\, e^{-\tau_2(i(P_3 - P_1))}\Big|_\alpha^{\tau_3}$$

en prenant la prescription $P_1 \longrightarrow P_1 - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ la borne α ne contribue plus et il vient

$$J_2 = \frac{1}{-i(P_3 - P_1) + \varepsilon}\,\frac{1}{\nu - i(P_2 - P_1)} \int_\alpha^\beta d\tau_4\, e^{-\tau_4(\nu + i(P_5 - P_4))} \times$$

$$\times \frac{e^{-\tau_3(-\nu + i(P_4 - P_1))}}{\nu - i(P_4 - P_1)}\Big|_\alpha^{\tau_3}$$

$$J_2 = \frac{1}{\nu - i(P_4 - P_1)}\,\frac{1}{-i(P_3 - P_1) + \varepsilon}\,\frac{1}{\nu - i(P_2 - P_1)} \times$$

$$\times \int_\alpha^\beta d\tau_4\, e^{-i\tau_4(P_5 - P_1)}$$

soit dans la limite $\alpha \longrightarrow -\infty$, $\beta \longrightarrow +\infty$

(70) $$J_2 = \frac{1}{\nu - i(P_4 - P_1)}\,\frac{1}{-i(P_3 - P_1) + \varepsilon}\,\frac{1}{\nu - i(P_2 - P_1)}\,2\pi\,\delta(P_5 - P_1).$$

En faisant une récurrence, on trouve

(71) $$J_\ell = \prod_{j=2}^{\ell} \frac{1}{\nu - i(P_{2j} - P_1)}\,\frac{1}{-i(P_{2j-1} - P_1) + \varepsilon}\,\frac{1}{\nu - i(P_2 - P_1)} \times$$

$$\times\, 2\pi\,\delta(P_{2\ell+1} - P_1)$$

Nous reportons (71) dans (66) il vient

$$S'-S = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \prod_{i=1}^{2\ell+1} dp_i \; e^{-ip_1 t} \; e^{+ip_{2\ell+1} t'} \; S(p_1)\,\underline{\varepsilon}^T \times$$

$$\times\, S(p_2)\,\underline{\varepsilon}^T \dots \underline{\varepsilon}^T S(p_{2\ell+1})\,(i\omega_0^2)^{2\ell}\; 2\pi\,\delta(p_{2\ell+1}-p_1) \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{\ell} \frac{1}{\nu - i(p_{2j}-p_1)} \; \frac{1}{-i(p_{2j-1}-p_1)+\varepsilon} \; \frac{1}{\nu - i(p_2-p_1)}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \prod_{i=1}^{2\ell} dp_i \; e^{-ip_1(t-t')} \; 2\pi\, S(p_1)\,\underline{\varepsilon}^T \dots\dots$$

$$\dots \underline{\varepsilon}^T S(p_1) \; (i\omega_0^2)^{2\ell} \prod_{j=2}^{\ell} \frac{1}{\nu - i(p_{2j}-p_1)} \times$$

$$\times \frac{1}{-i(p_{2j-1}-p_1)+\varepsilon} \; \frac{1}{\nu - i(p_2-p_1)}$$

soit encore pour la TF

$$S'(p) - S(p) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \prod_{i=2}^{2\ell} dp_i \; 2\pi\, S(p)\,\underline{\varepsilon}^T S(p_2) \dots \underline{\varepsilon}^T S(p_1) \times$$

$$\times\, (i\omega_0^2)^{2\ell} \prod_{j=2}^{\ell} \frac{1}{\nu - i(p_{2j}-p_1)} \; \frac{1}{-i(p_{2j-1}-p_1)+\varepsilon} \; \frac{1}{\nu - i(p_2-p_1)}$$

En effectuant les intégrales sur dp_1 sur le contour C , les poles de S étant dans le 1/2 plan $\mathrm{Im}(p) > 0$ (voir (49)).

on trouve $-2\pi i R$ où R est le résidu des fractions, les poles étant

$$p_{2j} = p_1 - i\nu \;, \quad p_{2j-1} = p_1 - i\varepsilon .$$

il vient donc $(\varepsilon \to 0)$

$$S'(p) - S(p) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\pi)^{2\ell}\, S(p)\, \underline{\varepsilon}^T S(p-i\nu)\, \underline{\varepsilon}^T S(p) \dots\dots$$

$$\dots\; \underline{\varepsilon}^T S(p)\, (i\omega_0^2)^{2\ell}$$

$$S'(p) - S(p) = \sum_{\ell=1}^{\infty} S(p) \left[(2\pi i \omega_0^2)^2\, \underline{\varepsilon}\, S(p-i\nu)\, \underline{\varepsilon}^T S(p) \right]^{\ell}$$

soit

$$S'(p) = S(p) \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[(2\pi i\, \omega_0^2)^2\, \underline{\varepsilon}^T S(p-i\nu)\, \underline{\varepsilon}^T S(p) \right]^{\ell}$$

$$S'(p) = S(p) \left[1 - (2\pi i\, \omega_0^2)^2\, \underline{\varepsilon}^T S(p-i\nu)\, \underline{\varepsilon}^T S(p) \right]^{-1}$$

soit finalement

(72) $$S'(p) = S(p) \left[1 + (2\pi\, \omega_0^2)^2\, \underline{\varepsilon}^T S(p-i\nu)\, \underline{\varepsilon}^T S(p) \right]^{-1}$$

On a donc sommé la série de perturbations et obtenu une expression fermée pour S'.

V 1. FONCTION DE PARTITION POUR UN SYSTEME DE SPIN 1/2

Soit, en mécanique quantique, un système de spin 1/2 ; l'Hamiltonien du système $\hat{h}(\vec{p}, \vec{q})$ est une matrice (2x2) en général non diagonale, si un champ magnétique est présent [26].

La fonction de partition du système est donné par [27].

(1) $$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{h}},$$

et en séparant $\mathrm{Tr}\,\hat{A} = \int d\vec{q}\, \langle \vec{q} | \mathrm{t_r}\,\hat{A} | \vec{q} \rangle$

c'est à dire $\mathrm{t_r}\,\hat{A} = \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha}$ on a

(2) $$Z = \mathrm{t_r} \int d\vec{q}\, \langle \vec{q} | e^{-\beta \hat{h}(\vec{p}, \vec{q})} | \vec{q} \rangle .$$

On peut construire une représentation fonctionnelle de cette dernière quantité exactement comme pour l'opérateur d'évolution dans le chapitre II, il vient

(3) $$Z = \mathrm{t_r} \int d\vec{q} \int D\vec{q}\, D\vec{p}\; P \exp \int_0^{\beta} du \left[i\vec{p}\dot{\vec{q}} - \hat{h}(\vec{p}, \vec{q}) \right] \times$$
$$\times\, \delta(\vec{q}(0) - \vec{q})\, \delta(\vec{q}(\beta) - \vec{q}),$$

où le symbole P agit sur le "temps" u, cette formule s'obtient de celle relative à l'opérateur d'évolution pour les substitutions [28]

$$it \to \beta$$

$i\int d\tau \;\longrightarrow\; \int du$ et le point dans (3) indique la dérivée par rapport à β.

Nous donnons maintenant une nouvelle dérivation des formules finales du chapitre III, ces formules vont nous permettre de réduire (3) à une intégrale fonctionnelle standard.

Notre point de départ est la formule (19) de l'appendice B, d'après la remarque qui la suit, on a

(4)
$$P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau \left[\hat{h}_0 + \hat{h}_I\right] = P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{h}_0 \times$$
$$\times P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{h}_I^{\,ip} ,$$

où

$$\hat{h}_I^{\,ip} = \left[P\exp -i\int_{t_0}^{\tau} ds\, \hat{h}_0\right]^{-1} \hat{h}_I(\tau) \left[P\exp -i\int_{t_0}^{\tau} ds\, \hat{h}_0\right].$$

Nous appliquons cette formule au cas

(5)
$$\hat{h}_0 = -a(\tau)\,\hat{a}^+\hat{a}$$
$$\hat{h}_I = -\left[b(\tau)\,\hat{a}^+ + c(\tau)\,\hat{a}\right] ,$$

avec

(6)
$$\begin{cases} \hat{a}^+\hat{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \hat{a}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \; \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{bmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \end{cases}$$

où
$$\hat{A} = P\exp\, i\int_{t_0}^{t} d\tau \left[a(\tau)\,\hat{a}^+\hat{a} + b(\tau)\,\hat{a}^+ + c(\tau)\,\hat{a}\right] ,$$

et d'après (5)

(7)
$$\hat{A} = P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau \left[\hat{h}_0 + \hat{h}_I\right].$$

Calculons

$$P\exp -i\int_{t_0}^{\tau} ds\, \hat{h}_0 = P\exp\, i\int_{t_0}^{\tau} ds\, a(s)\,\hat{a}^+\hat{a} =$$
$$= P\exp\, i\int_{t_0}^{t} ds\, a(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

ce qui donne, en utilisant $(\hat{a}^+\hat{a})^n = \hat{a}^+\hat{a} \quad , \quad n \geqslant 1$

$$P\exp\, i\int_{t_0}^{\tau} ds\, a(s)\,\hat{a}^+\hat{a} = \begin{bmatrix} \exp i\int_{t_0}^{\tau} ds\, a(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

soit, avec les notations du chapitre III

$$\bar{\Delta}(\tau, t_0) = \exp i \int_{t_0}^{\tau} ds\, a(s) \,,$$

$$\left(\bar{\Delta}(\tau, t_0)\right)^{-1} = \bar{\Delta}(t_0, \tau)$$

(8) $$P \exp -i \int_{t_0}^{\tau} ds\, \hat{h}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(\tau, t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

en utilisant (4), (7) et (8) il vient

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(t, t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P \exp \int_{t_0}^{t} d\tau \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(t_0, \tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & ib(\tau) \\ ic(\tau) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(\tau, t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

soit,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(t, t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P \exp \int_{t_0}^{t} d\tau \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t_0, \tau) b(\tau) \\ ic(\tau) \bar{\Delta}(\tau, t_0) & 0 \end{bmatrix} .$$

(9)

Développons la P - exponentielle en série de Dyson, avec

$\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(t, t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} d\tau_i \prod_{j=1}^{n-1} \Theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \times$$

(10) $$\times P \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t_0, \tau_i) b(\tau_i) \\ ic(\tau_i) \bar{\Delta}(\tau_i, t_0) & 0 \end{bmatrix} .$$

Nous calculons premièrement le terme $n = 2p$ de la série, le dernier produit de (10) s'écrit alors

$$P \prod_{i=1}^{2p} \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t_0, \tau_i) b(\tau_i) \\ ic(\tau_i) \bar{\Delta}(\tau_i, t_0) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= P \prod_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t_0, \tau_{2j-1}) b(\tau_{2j-1}) \\ ic(\tau_{2j-1}) \bar{\Delta}(\tau_{2j-1}, t_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t_0, \tau_{2j}) b(\tau_{2j}) \\ ic(\tau_{2j}) \bar{\Delta}(\tau_{2j}, t_0) & 0 \end{bmatrix} ,$$

en effectuant le produit des deux matrices et en utilisant la propriété de groupe $\bar{\Delta}(\tau_1, \tau_2)\,\bar{\Delta}(\tau_2, \tau_3) = \bar{\Delta}(\tau_1, \tau_3)$

on trouve

$$P \prod_{i=1}^{2p} \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t_0,\tau_i)b(\tau_i) \\ i\,c(\tau_i)\bar{\Delta}(\tau_i,t_0) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= P \prod_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} -c(\tau_{2j})\,\bar{\Delta}(\tau_{2j},\tau_{2j-1})\,b(\tau_{2j-1}) & 0 \\ 0 & -c(\tau_{2j-1})\,\bar{\Delta}(\tau_{2j-1},\tau_{2j})\,b(\tau_{2j}) \end{bmatrix}$$

ces matrices commutant il vient

$$= (-1)^p \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j})\,\bar{\Delta}(\tau_{2j},\tau_{2j-1})\,b(\tau_{2j-1}) & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j-1})\bar{\Delta}(\tau_{2j-1},\tau_{2j})b(\tau_{2j}) \end{bmatrix}.$$

En reportant ce résultat dans (10) on a

$$\hat{A}^{(2p)} = (-1)^p \int \prod_{i=1}^{2p} d\tau_i \prod_{j=1}^{2p-1} \Theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \times$$

(11)
$$\times \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(t,t_0) \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j})\bar{\Delta}(\tau_{2j},\tau_{2j-1})\,b(\tau_{2j-1}) & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j-1})\bar{\Delta}(\tau_{2j-1},\tau_{2j})b(\tau_{2j}) \end{bmatrix}.$$

Pour $A^{(2p+1)}$ il vient

$$\hat{A}^{(2p+1)} = (-1)^p \int \prod_{i=1}^{2p} d\tau_i \, d\tau \prod_{j=1}^{2p-1} \Theta(\tau_j - \tau_{j+1})\,\Theta(\tau_{2p} - \tau) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \bar{\Delta}(t,t_0) \prod_{j=1}^{p} C(\tau_{2j})\bar{\Delta}(\tau_{2j-1})\,b(\tau_{2j-1}) & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j-1})\bar{\Delta}(\tau_{2j-1},\tau_{2j})b(\tau_{2j}) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & i\,\bar{\Delta}(t_0,\tau)\,b(\tau) \\ i c(\tau)\bar{\Delta}(\tau,t_0) & 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$A^{(2p+1)} = (-1)^p \int \prod_{i=1}^{2p} d\tau_i \, d\tau \prod_{j=1}^{2p-1} \Theta(\tau_j - \tau_{j+1}) \Theta(\tau_{2p} - \tau) \times$$

(12)
$$\times \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\Delta}(t,\tau) b(\tau) \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j}) \bar{\Delta}(\tau_{2j}, \tau_{2j-1}) b(\tau_{2j-1}) \\ ic(\tau) \bar{\Delta}(\tau, t_0) \prod_{j=1}^{p} c(\tau_{2j-1}) \bar{\Delta}(\tau_{2j-1}, \tau_{2j}) b(\tau_{2j}) & 0 \end{bmatrix}$$

(11) et (12) sont bien les formules finales du chapitre III.

Les termes diagonaux de (12) étant nuls, on voit que seul (11) va contribuer à la trace ; en posant

(13)
$$\hat{h} = -d(\vec{p},\vec{q}) - a(\vec{p},\vec{q})\hat{a}^+\hat{a} - b(\vec{p},\vec{q})\hat{a}^+ - c(\vec{p},\vec{q})\hat{a}$$

En définissant $a(u) = a(\vec{p}(u), \vec{q}(u))$ et de même pour b, c et d, en modifiant (11) $i\int d\tau \longrightarrow$ du le $(-1)^p$ est supprimé et les Θ ont maintenant les u_i comme argument à cause de la redéfinition du produit P ; d'autre part $\bar{\Delta}(\tau_1,\tau_2) \to \bar{\Delta}(u_1,u_2) = \exp \int_{u_2}^{u_1} du \, a(u)$ on obtient l'expression modifiée de (11) qui portée dans (3) nous donne

$$Z = \sum_{p=0}^{\infty} \int d\vec{q} \int_{\vec{q}(0)=\vec{q}}^{\vec{q}(\beta)=\vec{q}} D\vec{p} \, D\vec{q} \exp \int_0^{\beta} du \left(i\vec{p}\dot{\vec{q}} + d(\vec{p},\vec{q}) \right) \times$$

(14)
$$\times \int \prod_{i=1}^{2p} du_i \prod_{j=1}^{2p-1} \Theta(u_j - u_{j+1}) \times \Big[\bar{\Delta}(\beta, 0) \prod_{j=1}^{p} c(u_{2j}) \times$$

$$\times \bar{\Delta}(u_{2j}, u_{2j-1}) b(u_{2j-1}) + \prod_{j=1}^{p} c(u_{2j-1}) \bar{\Delta}(u_{2j-1}, u_{2j}) b(u_{2j}) \Big]$$

ou

(15)
$$\bar{\Delta}(u_1, u_2) = \exp \int_{u_2}^{u_1} du \, a(u)$$

(14) nous donne la fonction de partition du système décrit par l'Hamiltonien (13) sous forme d'intégrales fonctionnelles standards.

V 2. APPLICATION A L'EFFET JAHN -TELLER LINEAIRE

Nous appliquons maintenant les résultats de la section précédente à l'effet Jahn-Teller linéaire qui est décrit par (référence [29] page 309, notations de la référence).

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \, \mathbb{1} + V \left[Q_1 U_1 + Q_2 U_2 \right]$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{P}^2}{\mu^2} + \omega_0^2 \vec{Q}^2\right) + E_0$$

$$\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\sigma_z \quad ; \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x .$$

Soit, en changeant les notations pour les rendre semblables à celles de la section précédente, et en posant $V = \lambda$, en laissant tomber E_0 qui ne change la fonction de partition que d'un facteur $e^{-\beta E_0}$ on a

$$\hat{h} = \hat{h}_0 + \hat{\underline{h}}_I$$

(15) $$\hat{h}_0 = \frac{1}{2}\left(\vec{p}^{\,2} + \omega^2 \vec{q}^{\,2}\right) \mathbb{1}$$

$$\hat{\underline{h}}_I = \lambda\left(-q_1 \sigma_z + q_2 \sigma_x\right)$$

Remarquons que l'on peut, sans changer la fonction de partition, remplacer $\hat{h}$ par $U^+ \hat{h} U$; où U est une matrice (2x2) unitaire. En effet, on a

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta U^+ \hat{h} U} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{tr}\left[-\beta U^+ \hat{h} U\right]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{tr}\left(U^+ \left[-\beta \hat{h}\right]^n U\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{tr}\left(U U^+ \left[-\beta \hat{h}\right]^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{tr}\left[-\beta \hat{h}\right]^n ,$$

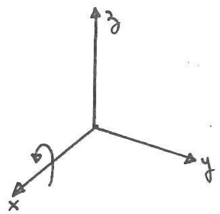
soit

(16) $$\mathrm{tr}\, e^{-\beta U^+ \hat{h} U} = \mathrm{tr}\, e^{-\beta \hat{h}} , \quad U^+ U = 1 .$$

Nous pouvons donc dans (15) remplacer $\hat{\underline{h}}_I$ par

$$\hat{h}_I = \lambda\left[q_1 \sigma_y + q_2 \sigma_x\right]$$

car la transformation $\sigma_x \to \sigma_x$, $\sigma_y \to \sigma_z$, $\sigma_z \to -\sigma_y$ étant une rotation autour de l'axe X est représentée par une matrice unitaire U telle que



$$U^+ \sigma_x U = \sigma_x , \quad U^+ \sigma_y U = \sigma_z$$

$$U^+ \sigma_z U = -\sigma_y .$$

Notre fonction de partition est donc celle du système

(17) $$\begin{cases} \hat{h}_0 = \frac{1}{2}\left(\vec{p}^{\,2} + \omega^2 \vec{q}^{\,2}\right) \mathbb{1} = h_0 \mathbb{1} \\ \hat{h}_I = \lambda\left[q_1 \sigma_y + q_2 \sigma_x\right] . \end{cases}$$

Ecrivons $\hat{h}$ sous la forme $\hat{h} = -d - a\,\hat{a}^+\hat{a} - b\,\hat{a}^+ -$
$- c\,\hat{a}$, en utilisant

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{a} + \hat{a}^+$$

$$\sigma_y = i\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = i(\hat{a} - \hat{a}^+)$$ il vient

$$\lambda\left[q_1\, i(\hat{a} - \hat{a}^+) + q_2(\hat{a} + \hat{a}^+)\right] = -b\hat{a}^+ - c\hat{a}$$

soit

(18)
$$\begin{cases} a = 0 & , \quad b = -\lambda[q_2 - iq_1] \\ d = -h_0 = -\frac{1}{2}(\vec{p}^{\,2} + \omega^2 \vec{q}^{\,2}) & , \quad c = -\lambda[q_2 + iq_1]. \end{cases}$$

En reportant dans (14), avec (15) $\bar{\Delta}(u_1, u_2) = 1$
il vient

$$Z = \sum_{P=0}^{\infty} \int d\vec{q} \int_{\vec{q}(0)}^{\vec{q}(\beta)=\vec{q}} D\vec{p}\, D\vec{q}\, \exp \int_0^\beta du \left(i\vec{p}\dot{\vec{q}} - \right.$$

$$\left. - h_0(\vec{p}, \vec{q})\right) \int \prod_{i=1}^{2P} du_i \prod_{j=1}^{2P-1} \theta(u_j - u_{j+1}) \times$$

$$\times \left[\prod_{j=1}^{P} c(u_{2j})\, b(u_{2j-1}) + \prod_{j=1}^{P} c(u_{2j-1}) \times \right.$$

(19)
$$\left. \times\, b(u_{2j})\right] ,$$

où c et b sont donnés par (18).

Nous évaluons cette intégrale par la méthode habituelle

(20)
$$Z = \sum_{P=0}^{\infty} \int_0^\beta \prod_{i=1}^{2P} du_i \prod_{j=1}^{2P-1} \theta(u_j - u_{j+1}) \left[\right.$$

$$\left.\left[\prod_{j=1}^{P} c(u_{2j})\, b(u_{2j-1}) + \prod_{j=1}^{P} c(u_{2j-1})\, b(u_{2j})\right]\right|_{\vec{q} = \frac{\delta}{\delta \vec{j}}} \times$$

$$\times\, Z_0[\vec{j}]\Big|_{\vec{j}=0}$$

où

$$Z_0[\vec{j}] = \int d\vec{q} \int_{\vec{q}(0)=\vec{q}}^{\vec{q}(\beta)=\vec{q}} D\vec{p}\; D\vec{q}\; \exp \int_0^\beta du \left[\left[i\vec{p}\,\dot{\vec{q}} - h_0(\vec{p},\vec{q}) + \vec{j}\,\vec{q} \right] \right].$$

On a

$$Z_0[\vec{j}] = Z_0^{(1)}(j_1)\, Z_0^{(2)}(j_2)$$

(21) où

$$Z_0^{(1)}[j_i] = \int dq \int_{q(0)=q}^{q(\beta)=q} Dp\,dq\; \exp \int_0^\beta du \left[ip\dot{q} - \frac{1}{2}(p^2+\omega^2 q^2) + j_i\, q \right],$$

soit en effectuant l'intégrale gaussienne sur P

$$Z_0^{(1)}[j_i] = \int dq \int_{q(0)=q}^{q(\beta)=q} Dq\; \exp \int_0^\beta du \left[-\frac{1}{2}(\dot{q}^2+\omega^2 q^2) + j_i\, q \right].$$

Cette intégrale est calculée dans [27] page 83 et vaut

(22) $$Z_0^{(1)}[j_i] = N^{(1)} \exp \frac{1}{2} \int_0^\beta du\,dv\; j_i\; \underline{\Delta}(u,v)\; j_i \; ,$$

où $N^{(1)}$ est la fonction de partition de l'oscillateur harmonique et

(23) $$\underline{\Delta}(u,v) = \frac{1}{2\omega}\; \frac{ch\left[\omega(|u-v| - \frac{1}{2}\beta)\right]}{sh\left[\frac{1}{2}\omega\beta\right]} .$$

Nous utilisons maintenant sur (20) l'identité habituelle

$$F\left[\frac{\delta}{\delta\vec{j}}\right] G[\vec{j}]\Big|_{\vec{j}=0} = G\left[\frac{\delta}{\delta\vec{q}}\right] F[\vec{q}]\Big|_{\vec{q}=0}$$

avec (21), (22) et (18) il vient

(24)
$$Z = \exp \frac{1}{2}\int du\, dv \left[\frac{\delta}{\delta q_1(u)} \Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta q_1(v)} + \frac{\delta}{\delta q_2(u)} \Delta(u,v) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\delta}{\delta q_2(v)} \right] \times \sum_{P=0}^{\infty} \int_0^\beta \prod_{i=1}^{2P} du_i \prod_{j=1}^{2P-1} \theta(u_j - u_{j+1}) \times \Big[$$
$$\times \Big[\prod_{j=1}^{P} \lambda^2 \big(q_2(u_{2j}) + i q_1(u_{2j})\big)\big(q_2(u_{2j-1}) - i q_1(u_{2j-1})\big) +$$
$$+ \prod_{j=1}^{P} \lambda^2 \big(q_2(u_{2j-1}) + i q_1(u_{2j-1})\big)\big(q_2(u_{2j}) - i q_1(u_{2j})\big) \Big]\Big] \Big|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} N ,$$

où $N = N^{(1)} N^{(2)}$ est la fonction de partition de l'oscillateur harmonique à deux degrés de liberté.

On va simplifier (24) en faisant le changement de variables.

(25)
$$\begin{cases} q_2 + i q_1 = L \\ q_2 - i q_1 = L^*, \end{cases}$$

(26)
$$\begin{cases} q_2 = \frac{1}{2}(L + L^*) \\ q_1 = \frac{i}{2}(L^* - L) \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta q_1} = \dfrac{\partial L}{\partial q_1}\dfrac{\delta}{\delta L} + \dfrac{\partial L^*}{\partial q_1}\dfrac{\delta}{\delta L^*} \\[2ex] \dfrac{\delta}{\delta q_2} = \dfrac{\partial L}{\partial q_2}\dfrac{\delta}{\delta L} + \dfrac{\partial L^*}{\partial q_2}\dfrac{\delta}{\delta L^*}, \end{cases}$$

soit avec (25)

(27)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta q_1} = i\dfrac{\delta}{\delta L} - i\dfrac{\delta}{\delta L^*} \\[2ex] \dfrac{\delta}{\delta q_2} = \dfrac{\delta}{\delta L} + \dfrac{\delta}{\delta L^*}. \end{cases}$$

D'après (27) la première exponentielle de (24) s'écrit

$$\exp \frac{1}{2}\int du\, dv \left[i\left(\frac{\delta}{\delta L} - \frac{\delta}{\delta L^*}\right)_u \Delta(u,v)\, i\left(\frac{\delta}{\delta L} - \frac{\delta}{\delta L^*}\right)_v + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\delta}{\delta L} + \frac{\delta}{\delta L^*}\right)_u \Delta(u,v) \left(\frac{\delta}{\delta L} + \frac{\delta}{\delta L^*}\right)_v \right]$$
$$= \exp \frac{1}{2}\int du\, dv\, 2\left[\frac{\delta}{\delta L^*(u)} \Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta L(v)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta}{\delta L(u)} \Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta L^*(v)} \right]$$
$$= \exp \int du\, dv \left[\frac{\delta}{\delta L^*(u)}\, 2\Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta L(v)} \right]$$

où nous avons utilisé $\underline{\Delta}(u,v) = \underline{\Delta}(v,u)$ (voir (23))

En posant

(28)
$$\Delta(u,v) = \frac{1}{\omega} \frac{ch\left[\omega|u-v| - \frac{1}{2}\omega\beta\right]}{sh\left[\frac{1}{2}\omega\beta\right]} = 2\underline{\Delta}(u,v),$$

et en utilisant (25), (24) peut donc s'écrire

(29)
$$Z = \exp \int du\, dv \left[\frac{\delta}{\delta L^*(u)} \Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta L(v)}\right] \times \sum_{P=0}^{\infty} \int_0^{\beta} \prod_{i=1}^{2P} du_i \prod_{j=1}^{2P-1} \theta(u_j - u_{j+1}) \left[\prod_{j=1}^{P} \lambda^2 L^*(u_{2j}) \times L(u_{2j-1}) + \prod_{j=1}^{P} \lambda^2 L^*(u_{2j-1}) L(u_{2j})\right] N \Bigg|_{\substack{L=0\\L^*=0}}$$

et en faisant dans le second membre le changement de variables

$$u_{2\ell-1} \to u_\ell$$
$$u_{2\ell} \to v_\ell$$

il vient

(30)
$$Z = \exp \int du\, dv \left[\frac{\delta}{\delta L^*(u)} \Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta L(v)}\right] \sum_{P=0}^{\infty} \int_0^{\beta} \prod_{i=1}^{P} du_i\, dv_i \times \prod_{i=1}^{P} \theta(u_i - v_i) \prod_{i=1}^{P-1} \theta(v_i - u_{i+1}) \left[\prod_{\ell=1}^{P} \lambda^2 L^*(v_\ell) L(u_\ell) + \prod_{\ell=1}^{P} \lambda^2 L^*(u_\ell) L(v_\ell)\right] N \Bigg|_{\substack{L=0\\L^*=0}}.$$

La première exponentielle dans (30) génère toutes les contractions $\overbrace{L^*(u)\, L(v)} = \Delta(u,v)$, remarquons que le premier terme de la dernière parenthèse de (30) s'écrit comme le dernier en échangeant L et L^*, comme $\Delta(u,v) = \Delta(v,u)$ on a $\overbrace{L^*(u)\, L(v)} = \overbrace{L(u)\, L^*(v)}$ et donc les deux termes donnent la même contribution. Il vient donc comme formule finale

(31)
$$\tilde{Z} = \exp \int du\, dv \left[\frac{\delta}{\delta L^*(u)} \Delta(u,v) \frac{\delta}{\delta L(v)}\right] \times \sum_{P=0}^{\infty} \lambda^{2P} \times \int_0^{\beta} \prod_{i=1}^{P} du_i\, dv_i \prod_{i=1}^{P} \theta(u_i - v_i) \prod_{i=1}^{P-1} \theta(v_i - u_{i+1}) \times \prod_{\ell=1}^{P} L^*(u_\ell) L(v_\ell) \Bigg|_{\substack{L=0\\L^*=0}}$$

la fonction de partition du système étant

(32) $$Z = 2N\tilde{Z}$$, N étant la fonction de partition du système libre (oscillateur harmonique à deux dimensions).

Nous donnons une représentation graphique de (31).

<u>Règles pour $\tilde{Z}^{(2p)}$</u>

$= \Delta(u,v)$

$= \theta(x-y)$

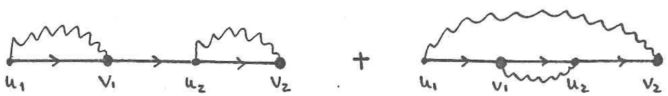
Faire toutes les contractions 

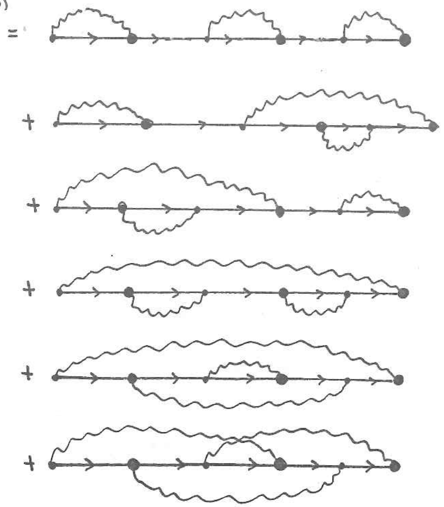
possibles sur le graphe

Multiplier par $\lambda^{2p} \int_0^\beta \prod_{i=1}^{p} du_i\, dv_i$.

Voici la liste des graphes jusqu'à $\tilde{Z}^{(6)}$

$\tilde{Z}^{(2)} =$ 

$\tilde{Z}^{(4)} =$ 

$\tilde{Z}^{(6)} =$ 

Nous terminons cette section en calculant $\tilde{Z}^{(2)}$, pour cela nous commençons par faire des manipulations sur $\Delta(u,v)$; d'après (28) on a

$$\Delta(u,v) = \frac{1}{\omega} \frac{ch(x-B)}{sh\, B}$$

avec $x = \omega|u-v|$ et $B = \frac{1}{2}\omega\beta$

or

$$\frac{ch(x-B)}{sh\, B} = \frac{ch\,x\; ch\,B - sh\,x\; sh\,B}{sh\,B} =$$

$$= -sh\,x + ch\,x\,\frac{ch\,B}{sh\,B}$$

$$= -\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \left(\frac{\operatorname{ch} B}{\operatorname{sh} B} - 1 \right)$$

$$= e^{-x} + \operatorname{ch} x \; \frac{\operatorname{ch} B - \operatorname{sh} B}{\operatorname{sh} B}$$

$$= e^{-x} + \operatorname{ch} x \; \frac{e^{-B}}{\operatorname{sh} B}$$

soit

$$\frac{\operatorname{ch}(x-B)}{\operatorname{sh} B} = e^{-x} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{e^{-B}}{\operatorname{sh} B} \right) + e^{x} \frac{1}{2} \frac{e^{-B}}{\operatorname{sh} B} ,$$

et donc

(29)
$$\Delta(u,v) = \frac{1}{\omega} \left[e^{-\omega|u-v|} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{\omega\beta}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2}} \right) + e^{+\omega|u-v|} \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{\omega\beta}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2}} \right]$$

soit en posant

(30)
$$\begin{cases} A(\beta) = \dfrac{1}{\omega} \left(1 + \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{-\frac{\omega\beta}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2}} \right) = \dfrac{1}{\omega} \tilde{A}(\beta) \\ B(\beta) = \dfrac{1}{\omega} \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{-\frac{\omega\beta}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2}} = \dfrac{1}{\omega} \tilde{B}(\beta) , \end{cases}$$

(31)
$$\Delta(u,v) = A\, e^{-\omega|u-v|} + B\, e^{\omega|u-v|} .$$

Remarquons aussi que

(32)
$$\begin{cases} \tilde{A}(\beta) \sim 1 + e^{-\omega\beta} , & \beta \to \infty \\ \tilde{B}(\beta) \sim e^{-\omega\beta} , & \beta \to \infty . \end{cases}$$

Nous calculons maintenant

$$\tilde{Z}^{(2)} = \underset{u \qquad v}{\text{〰}} = \lambda^2 \int_0^\beta du\, dv\; \theta(u-v)\; \Delta(u,v)$$

il vient

$$\tilde{Z}^{(2)} = \lambda^2 A \int_0^\beta du\, e^{-\omega u} \int_0^u dv\, e^{\omega v} + \lambda^2 B \int_0^\beta du\, e^{u\omega} \int_0^u dv\, e^{-\omega v}$$

$$= \lambda^2 A \int_0^\beta du\, e^{-\omega u} \frac{1}{\omega}\left[e^{\omega u} - 1\right] + \lambda^2 B \int_0^\beta du\, e^{\omega u}\left(-\frac{1}{\omega}\right)\left[e^{-\omega u} - 1\right]$$

$$= \frac{\lambda^2 A}{\omega} \int_0^\beta du \left(1 - e^{-\omega u}\right) - \frac{\lambda^2 B}{\omega} \int_0^\beta du \left(1 - e^{\omega u}\right)$$

$$= \frac{\lambda^2 A}{\omega}\left[\beta + \frac{1}{\omega}\left[e^{-\omega\beta} - 1\right]\right] - \frac{\lambda^2 B}{\omega}\left[\beta - \frac{1}{\omega}\left[e^{\omega\beta} - 1\right]\right]$$

or $$A - B = \frac{1}{\omega}$$

(33) $$\tilde{Z}^{(2)} = \frac{\lambda^2}{\omega^2}\left[\beta + A(\beta)\left[e^{-\omega\beta} - 1\right] + B(\beta)\left[e^{\omega\beta} - 1\right]\right].$$

En utilisant (32) on a

(34) $$\tilde{Z}^{(2)} \sim \frac{\lambda^2 \beta}{\omega^2} \quad , \beta \to \infty .$$

L'énergie du fondamental est donné par

$$E_0 = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{\beta} L\, Z = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{\beta}\left[L\, Z_N + L\, \tilde{Z}\right] = E_0^{(0)} + \Delta E_0 ,$$

on a donc

(35) $$\Delta E_0 = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{\beta} \operatorname{Log} \tilde{Z}$$

et (34) nous indique que

$$\tilde{Z} \sim 1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}\beta + O(\lambda^4) \quad , \quad \beta \to \infty .$$

En développant $\operatorname{Log} \tilde{Z}$ en puissances de λ

$$\operatorname{Log} \tilde{Z} = \frac{\lambda^2}{\omega^2}\beta + O(\lambda^4)$$

et donc

$$\Delta E_0^{(2)} = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{\beta}\left[\frac{\lambda^2}{\omega^2}\beta\right] = -\frac{\lambda^2}{\omega^2}$$

(35) $$\Delta E_0^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{\omega^2}$$ ce qui est OK avec la référence [29].

APPENDICE A : ORDRE DES OPERATEURS ET THEOREME DE WICK GENERALISE

Nous suivons [30] soit $\vec{q}$ et $\vec{p}$ des opérateurs vérifiant

(1) $$[\hat{q}, \hat{p}] = i ,$$

nous définissons la fonction

(2) $$D_\alpha(x,y) = e^{\frac{i}{2}(1-2\alpha)xy} \, e^{i(x\hat{p}+y\hat{q})} ,$$

à la fonction de l'espace des phases A (p,q) on associe l'opérateur α-ordonné

(3) $$\left\{A(p,q)\right\}_\alpha = A\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) D_\alpha(x,y) \Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

à un opérateur donné $B(\hat{p},\hat{q})$ on associe son α- fonction $b_\alpha(p,q)$ telle que

(4) $$\left\{b_\alpha(p,q)\right\}_\alpha = B(\hat{p},\hat{q}) ,$$

on étend, par abus de notation

(5) $$\left\{A(\hat{p},\hat{q})\right\}_\alpha \overset{\text{déf.}}{=} \left\{A(p,q)\right\}_\alpha .$$

Nous remarquons que

$$\left\{D_{1/2}(x,y)\right\}_\alpha = \left\{e^{i(xp+yq)}\right\}_\alpha =$$

$$= e^{i\left(\frac{x}{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{y}{i}\frac{\partial}{\partial y'}\right)} \, e^{\frac{i}{2}(1-2\alpha)x'y'} \, e^{i(x'\hat{p}+y'\hat{q})} \Big|_{\substack{x'=0\\y'=0}}$$

(6) $$\left\{D_{1/2}(x,y)\right\}_\alpha = D_\alpha(x,y) ,$$

on a que

$$a\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) \, e^{i(x\hat{p}+y\hat{q})} =$$

(7) $$= f\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{p}}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{q}}\right) a(\hat{p},\hat{q}) \, e^{i(x\hat{p}+y\hat{q})} ,$$

ce qui peut se prouver en remplaçant $x \to \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{p}}$ $y \to \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{q}}$,

puis en commutant les dérivées et en remplaçant

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \to p \qquad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} \to q \, .$$

Nous définissons (8) $f_{\alpha\alpha'}(x,y) = e^{-i(\alpha-\alpha')xy}$
alors d'après (2) et (6)

(8) $$D_\alpha(x,y) = f_{\alpha\alpha'}(x,y)\left\{D_{1/2}(x,y)\right\}_{\alpha'}$$

on a d'après (2), (3), (8) et (5)

(9) $$\left\{a(\hat{p},\hat{q})\right\}_\alpha = a\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f_{\alpha\alpha'}(x,y) \cdot \left\{D_{1/2}(x,y)\right\}_{\alpha'}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} ,$$

en utilisant la linéarité de l'opération $\left\{\,\right\}_{\alpha'}$,

(10) $$\left\{a(\hat{p},\hat{q})\right\}_\alpha = \left\{a\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f_{\alpha\alpha'}(x,y) \cdot D_{1/2}(x,y)\right\}_{\alpha'}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

et, utilisant (7) et (2)

(11) $$\left\{a(\hat{p},\hat{q})\right\}_\alpha = \left\{f_{\alpha\alpha'}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{p}}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{q}}\right) \cdot a(\hat{p},\hat{q})\; D_{1/2}(x,y)\right\}_{\alpha'}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} ,$$

et, remarquant que chaque $\frac{\partial}{\partial \hat{p}}$ ou $\frac{\partial}{\partial \hat{q}}$ agissant sur l'exponentielle donne des x ou des y qui $\to 0$, l'exponentielle $\to 1$

(12) $$\left\{ a(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha} = \left\{ f_{\alpha\alpha'}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\hat{p}}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\hat{q}}\right) a(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha'}.$$

En invoquant encore la linéarité de $\{\,\}_{\alpha'}$, et en définissant $\frac{\partial}{\partial\hat{p}}$ et $\frac{\partial}{\partial\hat{q}}$ comme ne changeant pas l'ordre des opérateurs

(13) $$\left\{ a(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha} = f_{\alpha\alpha'}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\hat{p}}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\hat{q}}\right) \left\{ a(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha'}.$$

C'est le théorème de Wick statique, le théorème de Wick généralisé s'obtient en le combinant avec le théorème de Wick habituel.

Nous utilisons maintenant la formule familière :

$$e^{A+B} = e^{A}\, e^{B}\, e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

appliquée à (2) qui nous donne,

(14) $$\begin{cases} D_{\alpha}(x,y) = e^{-i\alpha xy}\, e^{ix\hat{p}}\, e^{iy\hat{q}} \\ D_{\alpha}(x,y) = e^{i(1-\alpha)xy}\, e^{iy\hat{q}}\, e^{ix\hat{p}} \end{cases}$$ ainsi que

De sorte que l'on a

(15) $$\begin{cases} D_{0}(x,y) = e^{ix\hat{p}}\, e^{iy\hat{q}} \\ D_{1}(x,y) = e^{iy\hat{q}}\, e^{ix\hat{p}} \end{cases}$$ ce qui entraîne avec (2)

(16) $$\begin{cases} \left\{ A(\hat{p})\, B(\hat{q}) \right\}_{0} = A(\hat{p})\, B(\hat{q}) \\ \left\{ A(\hat{p})\, B(\hat{q}) \right\}_{1} = B(\hat{q})\, A(\hat{p}) \end{cases}$$

et, uilisant (13) pour $\alpha' = 0$ on trouve

(17) $$\left\{ A(\hat{p}), B(\hat{q}) \right\}_{\alpha} = e^{i\alpha \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}}\, A(p)\, B(q)$$

soit

(18) $$\left\{ A(p), B(q) \right\}_{\alpha} = A\left(\hat{p} + i\alpha\frac{\partial}{\partial\hat{q}}\right) B(\hat{q})$$

on a, d'après la définition (4)

(19) $$\left\{ a_{\alpha}(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha} = \left\{ a_{\alpha'}(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha'}$$

et en utilisant (13)

(20) $$\left\{ a_{\alpha'}(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha'} = f_{\alpha\alpha'}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{p}} , \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{q}}\right) \left\{ a_{\alpha}(\hat{p},\hat{q}) \right\}_{\alpha'}$$

en simplifiant par $\left\{ \right\}_{\alpha'}$, il vient

(21) $$a_{\alpha'}(p,q) = f_{\alpha\alpha'}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial p} , \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right) a_{\alpha}(p,q)$$

pour le cas spécial $\alpha = 0$, $\alpha' = \alpha$ on a

(22) $$a_{\alpha}(p,q) = e^{-i\alpha \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}} a_0(p,q) \; .$$

APPENDICE B : DEMONSTRATION DES FORMULES POUR L'INTEGRALE PRODUIT

Nous définissons l'intégrale produit comme

(1) $$P\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} \hat{h}(t)\,dt\right\}$$, $\hat{h}(t)$ est une matrice

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{j=1}^{n+1} \exp\left\{-i\varepsilon \hat{h}(t_{j-1})\right\},$$

avec $t_{n+1} = t$ $\qquad \varepsilon = t_{j+1} - t_j = \dfrac{t - t_0}{n+1}$

Nous posons

(2) $$u(t,t_0) = P\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} \hat{h}(t)\,dt\right\}$$

ainsi que

(3) $$\begin{cases} u(t) = u(t,0) \\ u^{-1}(t) = u(0,t) \end{cases}$$

on a les relations

(4) $$\begin{cases} u(a,b)\,u(b,c) = u(a,c) \\ u(a,b) = u(a)\,u^{-1}(b) \end{cases}$$

De (1) nous tirons

(5) $$u(t+\varepsilon) = \exp\left\{-i\varepsilon\hat{h}(t)\right\} u(t)$$

de sorte que dans la limite $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t+\varepsilon) - u(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t} u(t) = -i\hat{h}(t)\, u(t)$$

donc u vérifie

(6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -i\hat{h}(t)\, u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

de sorte que l'expansion de Dyson est valable pour l'intégrale produit. (en fait une T exponentielle peut toujours s'écrire comme une intégrale produit, voir la référence [31] page 182).

Nous avons donc la formule

$$P\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{h}(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots d\tau_n \times$$

(7) $$\times\, T\left[\hat{h}(\tau_1) \ldots \hat{h}(\tau_n)\right],$$

où T représente le produit chronologique habituel.

Calculons maintenant

(8) $$P\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} d\tau \left(\hat{h}_0(t) + \hat{h}_I(t)\right)\right\},$$

dans ce but nous introduisons

(9) $$\begin{cases} u(t,t_0) = P\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} d\tau \left(\hat{h}_0 + \hat{h}_I\right)\right\} \\ u_0(t,t_0) = P\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{h}_0(\tau)\right\}, \end{cases}$$

ainsi que

(10) $$\begin{cases} u(t) = u(t,0)\,; & u^{-1}(t) = u(0,t) \\ u_0(t) = u_0(t,0)\,; & u_0^{-1}(t) = u_0(0,t), \end{cases}$$

de sorte que

(11) $$\begin{cases} u(t,t_0) = u(t)\, u^{-1}(t_0) \\ u_0(t,t_0) = u_0(t)\, u_0^{-1}(t_0). \end{cases}$$

Nous introduisons ainsi les opérateurs $U_I(t,t_0)$ et $U_I(t)$ par

(12)
$$U_I(t) = U_0^{-1}(t)\, U(t)$$
$$U_I(t,t_0) = U_I(t)\, U_I^{-1}(t_0)$$

de sorte que

(13)
$$U(t) = U_0(t)\, U_I(t)$$

nous remarquons maintenant que $U_0^{-1}(t)$ vérifie l'équation

(14)
$$\frac{\partial}{\partial t} U_0^{-1}(t) = U_0^{-1}(t)\,(+i)\,\hat{h}_0(t)$$

de sorte que $U_I(t)$ vérifie

(15)
$$\frac{\partial}{\partial t} U_I(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(U_0^{-1}(t)\, U(t)\right) = U_0^{-1} i\, \hat{h}_0(t)\, U(t) \; +$$
$$+ \; U_0^{-1}\left(-i\,(\hat{h}_0 + \hat{h}_I)\right) U(t),$$

soit $\frac{\partial}{\partial t} U_I(t) = U_0^{-1}(-i\hat{h}_I)\, U(t) = U_0^{-1}(-i)\,\hat{h}_I(t)\, U_0\, U_0^{-1}\, U(t),$

et donc, en posant

(16)
$$U_0^{-1}\, \hat{h}_I(t)\, U_0 = \hat{h}_I^{ip}(t) \quad ,$$

on a

(17)
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U_I(t) = -i\, \hat{h}_I^{ip}(t)\, U_I(t) \\ U_I(0) = 1 \end{cases}$$

La solution de (17) est

(18)
$$U_I(t) = P\exp -i \int_0^t \hat{h}_I^{ip}(\tau)\, d\tau$$

et comme $U = U_0 U_I$ il vient

(19)
$$U = P\exp \int_0^t -i\hat{h}_0\, d\tau \; P\exp -i \int_0^t \left[P\exp \int_0^\tau -i\hat{h}_0\, ds\right]^{-1} \times$$
$$\times\; \hat{h}_I(\tau)\left[P\exp \int_0^\tau -i\hat{h}_0\, ds\right] d\tau$$
$$= P\exp \int_0^t -i\,(\hat{h}_0 + \hat{h}_I)\, d\tau$$

(si la représentation interaction avait été prise en t_0 au lieu de 0 les bornes inférieures des intégrales dans (19) seraient toutes t_0).

Nous pouvons aussi obtenir une formule plus symétrique

$$U(t,t_0) = U(t)\,U^{-1}(t_0) = U_0(t)\,U_1(t)\,U_1^{-1}(t_0)\,U_0^{-1}(t_0)$$

$$U(t,t_0) = U_0(t)\,U(t,t_0)\,U_0^{-1}(t_0)$$ ce qui donne

(20)
$$P\exp -i\int_{t_0}^{t} d\tau\,(\hat h_0 + \hat h_I) = P\exp\int_0^t -i\hat h_0\, d\tau \;\times$$
$$\times\; P\exp\int_{t_0}^{t} -i\hat h_I^{IP}(\tau)\; P\exp\left[\int_0^{t_0} -i\hat h_0\, d\tau\right]^{-1}.$$

APPENDICE C : INTRODUCTION DES VARIABLES DE GRASSMAN EN MECANIQUE QUANTIQUE

Pour montrer comment les variables de Grassman peuvent s'introduire en théorie des champs, nous considérons les champs les plus simples possibles : des champs à zéro dimensions d'espace, c'est à dire des systèmes à un degré de liberté.

Pour les bosons : l'oscillateur harmonique
Pour les fermions : le spin 1/2

Nous commençons par donner sans démonstration les formules correspondant à la représentation holomorphique de l'oscillateur harmonique [16'] .

soit $|n\rangle$ les états propres de l'Hamiltonien $h = \hat a^+ \hat a$,
$\hat a^+$ et $\hat a$ vérifiant les relations habituelles $[\hat a, \hat a^+] = 1$, [26].

La représentation holomorphique consiste à faire correspondre aux états du système des fonctions analytiques.

(1)
$$|\psi\rangle \to \psi(a^*) = \sum_n \frac{a^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n|\psi\rangle \qquad a^* \in \mathbb{C}$$

les opérateurs $\hat a$ et $\hat a^*$ sont représentés par

(2)
$$\begin{cases} \hat a^+ \to a^* \\ a \to \dfrac{d}{da^*} \end{cases},$$

à un opérateur $\hat{A} = f(\hat{a}^+, \hat{a})$, on fait correspondre son symbole normal (a est une variable indépendante)

(3) $$A^{NS}(a^*, a) = f(a^*, a)$$

et son kernel

(4) $$A(a^*, a) = \sum_{nm} \frac{a^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{a^m}{\sqrt{m!}} \langle n|\hat{A}|m\rangle ,$$

reliés par

(5) $$A(a^*, a) = e^{a^*a} A^{NS}(a^*, a),$$

le produit interne est représenté par

(6) $$(\varphi, \psi) = \int (\varphi(a^*))^* \psi(a^*) e^{-a^*a} \frac{da^* da}{2\pi i} ,$$

cette formule et les suivantes se comprennent comme

$$a^* = x + iy$$
$$a = x - iy$$

$$\frac{da^* da}{2\pi i} \equiv \frac{dx\,dy}{\pi}$$

le * supplémentaire dans (6) est la conjugaison complexe

l'état $\hat{A}|\psi\rangle$ est représenté par

(7) $$A\psi(a^*) = \int A(a^*, \alpha) f(\alpha^*) e^{-\alpha^*\alpha} \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} ,$$

enfin le produit $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ a pour kernel

(8) $$C(a^*, a) = \int A(a^*, \alpha) B(\alpha^*, a) e^{-\alpha^+\alpha} \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} .$$

Les formules (1) $\longrightarrow$ (8) résument la représentation holomorphique, nous allons voir ce que nous pouvons obtenir des expressions presque identiques pour le spin 1/2 grâce aux variables de Grassman.

Pour une exposition détaillée du sujet, voir le livre de Berezin [15] qui en est l'inventeur. (aussi [17]).

Nous nous contenterons ici de montrer quelques formules qui sont utilisées dans le chapitre III.

Une algèbre de Grassman à n générateurs $\theta_1 \ldots\ldots \theta_n$ vérifiant les relations $[\theta_i, \theta_j]_+ = 0$ est l'espace des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ des monomes formés par les produits des θ_i .

Un élément général de l'algèbre peut s'écrire

$$a_0 + \sum_i a_i \theta_i + \sum_{i_1<i_2} a_{i_1 i_2} \theta_{i_1} \theta_{i_2} + \cdots\cdots +$$

$$+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \theta_{i_1} \theta_{i_2} \cdots\cdots \theta_{i_n} .$$

Notons que des produits de nombre pair de générateurs commutent avec tout mais ne sont pas des nombres car leur carré est nul.

Nous définissons la dérivée à gauche :

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_i} \left[\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots\cdots \theta_{j_p} \right] = \delta_{i j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_p} -$$

$$- \theta_{j_1} \delta_{i j_2} \theta_{j_3} \cdots\cdots \theta_{j_p} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_{k-1}} \delta_{i j_k} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_p}$$

$$+ \cdots\cdots + (-1)^{p-1} \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_{p-1}} \delta_{i j_p} ,$$

La définition s'étendant par linéarité, par exemple on a

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_1} \left(\theta_2 \theta_1 + \theta_1 \theta_3 \right) = - \theta_2 + \theta_3 \quad ,$$

pour que cette définition soit consistante, il faut prendre

$$\left[\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_i} , \theta_j \right]_+ = \delta_{ij}$$

et aussi

$$\left[\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_i} , \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_j} \right]_+ = 0 \quad ,$$

noter que comme $\theta_i^2 = 0$ $\quad \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_i} \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_i} = 0$.

Nous introduisons maintenant la représentation du spin 1/2 par des variables de Grassman.

Soit $|i\rangle$ les états propres de l'Hamiltonien $\hat{h} = \hat{a}^+ \hat{a}$,

$\hat{a}^+$ et $\hat{a}$ vérifiant, [26]

$$[\hat{a}, \hat{a}^+]_+ = 1 \quad ,$$

explicitement $i = 0, 1$ $\quad |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{a}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

soit a^* et a des générateurs d'une algèbre de Grassman, $[a^*, a]_+ = 0$ à un état $|\varphi\rangle$ on fait correspondre la "fonction de a^* "

(9) $$\varphi(a^*) = \sum_{n=0}^{1} a^{*n} \langle n|\varphi\rangle,$$

les opérateurs $\hat{a}^+$ et $\hat{a}$ sont représentés par

(10) $$\begin{cases} \hat{a}^+ \longrightarrow a^* \\ a \longrightarrow \overrightarrow{\dfrac{\partial}{\partial a^*}} \end{cases},$$

(qui ont les bonnes relations d'anticommutation, voir plus haut)

à un opérateur $\hat{A} = f(\hat{a}^+, \hat{a})$ on fait correspondre son symbole normal

(11) $$A^{NS}(a^*, a) = f(a^*, a),$$

et son kernel

(12) $$A(a^*, a) = \sum_{i,j=0}^{1} a^{*i} a^j \langle i|\hat{A}|j\rangle,$$

reliés par

(13) $$A(a^*, a) = e^{a^* a} A^{NS}(a^*, a)$$
$$\left(e^{a^* a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a^* a)^n = 1 + a^* a\right),$$

le produit interne est représenté par

(14) $$(\varphi, \psi) = \int (f(a^*))^* g(a^*) e^{-a^* a} \, da^* da$$
$$\left[(f_0 + f_1 a^*)^* = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 a \right]$$

l'état $\hat{A}|\varphi\rangle$ est représenté par

(15) $$\hat{A}|\varphi\rangle(a^*) = \int A(a^*, \alpha) f(\alpha^*) e^{-\alpha^* \alpha} d\alpha^* d\alpha,$$

où α^* et α sont de nouveaux générateurs

$$[\alpha^*, \alpha]_+ = 0 = [\alpha^*, a]_+ = [\alpha^*, a^*]_+ = [\alpha, a]_+ = [\alpha, a^*]_+$$

enfin le produit $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ a pour kernel

(16) $$C(a^*, a) = \int A(a^*, \alpha) B(\alpha^*, a) e^{-\alpha^* \alpha} d\alpha^* d\alpha.$$

(comparer (1) $\longrightarrow$ (8) avec (9) $\longrightarrow$ (16)).

Pour que (9) $\longrightarrow$ (16) ait un sens, il faut définir le sens des intégrales, c'est ce que nous faisons.

Les règles d'intégration sont

(17) $$\int da^* \, a^* = 1 \qquad\qquad \int da^* \, 1 = 0 \,,$$

l'intégrale est linéaire, les intégrales multiples sont définies par itération, les symboles da , da^* etc, vérifient

$$[a, da^*]_+ = [a^*, da^*]_+ = 0$$

Autrement dit l'intégration est équivalente à la dérivation à gauche :

(18) $$\int da^* \, f(a^*) = \frac{\vec{\partial}}{\partial a^*} f(a^*) .$$

(remarquons que Berezin prend la définition $\int a^* da^* = \mathbb{1}$ et qu'il y a donc un changement de signe par rapport à la nôtre).

Remarquons aussi qu'on peut intégrer par partie car

(14) $$\int da^* \frac{\vec{\partial}}{\partial a^*} f(a^*) = \frac{\vec{\partial}}{\partial a^*} \frac{\vec{\partial}}{\partial a^*} f(a^*) = 0$$

Il est facile et instructif de vérifier, simplement en calculant avec les règles (17) les relations (13) $\longrightarrow$ (16).

BIBLIOGRAPHIE

1. B.JOUVET, Quantum aspects of Classical and Statistical fields, preprint Orsay (Septembre 1977).

2. B.JOUVET, R.PHYTIAN, to appear in Phys.Rev. A.

3. R. PHYTIAN , J.Phys. A 10, 777 (1977).

4. PC MARTIN, ED SIGGIA, HA ROSE, Phys. Rev. A 8, 423 (1973).

5. H.LESCHKE, M.SCHMUTZ, Z.Physik B 27, 85 (1977).

6. CP ENZ, Physica 89 A, 1 (1977).

7. F.LANGOUCHE, D.ROEKARTS, E.TIRAPEGUI, Physica 95 A, 252 (1979).

8. F.LANGOUCHE, D.ROEKARTS, E.TIRAPEGUI, On the perturbation expansion for Fokker-Planck Dynamics to appear in Prog.Theor.Phys. (June 1979).

9. F.LANGOUCHE, D.ROEKARTS E.TIRAPEGUI, Discretization problems of functional integrals in phase space, to appear in Phys.Rev. D.

10. F.LANGOUCHE, D.ROEKARTS, E.TIRAPEGUI, Functional integral for the Fokker-Planck equation to appear in Nuovo-Cimento.

11. C. DE DOMINICIS and PELLITI preprint Saclay Octobre 77, to appear in Phys.Rev. B.

12. L.GARRIDO, M.SAN MIGUEL Progr.Theor.Phys. 59 40,55 (1978).

13. R.GRAHAM, Springer Tracks on Modern Physics 66 (1973) Berlin.

14. M.E BRACHET, E.TIRAPEGUI Physics Letters 71 A 2, 3, 179 (1979).

15. F.A BEREZIN The Method of Second Quantization. Academic Press (1966).

16. M.E. BRACHET, E.TIRAPEGUI preprint UCL.IPT - 79-09 Submited to Physics Letter

16' L.D FADDEEV, in Field Theory Les Houches, 1975, R.BALIAN and J.ZINN-JUSTIN eds (North Holland Publ.Co. Amsterdam 1976).

17 F.A BEREZIN, M.S MANIROV, Annals of Physics 104, 336 (1977).

18. R.L.STRATONOVIVICH, Topics in the Theory of random noise, (Gordon and Breach 1963).

19. R.C.BOURRET, U.FRISH, A.POUQUET, Physica 65, 303 (1973).

20. NG. Van KAMPEN, Physica 70 , 222 (1973).

21. NG. Van KAMPEN Phys.Rep. 24 , 171 (1976).

22. S.KARLIN Initiation aux processus aléatoires (Dunod 1969).

23. G.ROSEN, Formulation of classical and Quantum dynamical theory (Academic Press 1969) p. 40,41.

24. J.F. HAMILTON, L.S. SHULMAN, J. Math.Phys. 12, 160 (1971).

25. L.S.ORNSTEIN, GE.UHLENBECK in Selected papers on noise and stochastic process, N.WAX editor (Dover 1954).

26. C.COHEN-TANOUDJI, B.DIU, F.LAOLE, Mecanique Quantique (Hermann 1973).

27. R.P.FEYNMAN , Statistical Mechanics (Frontiers in Physics Benjamin 1972).

28. R.P.FEYNMAN, AR. HIBBS, Quantum Mechanics and Path Integrals (M.C. Graw Hill 1965).

29. FS.HAM Phys.Rev. 166, 307 (1968).

30. H.LESCHKE, AC. HIRSCHFELD, T.SUZUKI, Phys.Rev. D (to be published).

31 NN.BOGOLIOUBOV, DV.CHIRKOV, Introduction à la théorie quantique des champs (Dunod 1960).