

# Théorie cinétique d'un gaz de Bose dilué avec condensat

Yves POMEAU, Marc-Étienne BRACHET, Stéphane MÉTENS, Sergio RICA

Laboratoire de physique statistique de l'École normale supérieure, associé au CNRS et aux universités Paris-6 et Paris-7, 24, rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05, France

(Reçu le 18 janvier 1999, accepté après révision le 22 mars 1999)

**Résumé.** Nous montrons comment la théorie cinétique de Boltzmann–Nordheim est modifiée par la présence d'un condensat de Bose–Einstein. Le résultat est un système d'équations impliquant la fonction d'onde du condensat et une équation cinétique pour la composante normale (thermique) du gaz, système qui inclut la possibilité d'échange de masse entre les composantes condensée et normale par un processus de type émission induite préservant la cohérence du condensat. © Académie des sciences/Elsevier, Paris

*physique statistique / thermodynamique / gaz / plasmas*

## *Kinetic theory of a diluted Bose gas with a condensate*

**Abstract.** We show how Boltzmann–Nordheim kinetic theory is modified by the existence of a Bose–Einstein condensate. The final result is a set of coupled equations between the condensate and the normal (thermal) component of the gas. This system shows a possible exchange of mass between the condensate and the normal component through a kind of induced emission preserving the coherence of the condensate. © Académie des sciences/Elsevier, Paris

*statistical physics / thermodynamics / gases / plasmas*

## *Abridged English Version*

Soon after the final conception of non-relativistic quantum theory, Nordheim [1] proposed a quantum kinetic theory for Bosons and Fermions, describing in particular relaxation to equilibrium. This kinetic equation is for the dynamics of the momentum distribution as the Wigner transform of the one-particle density matrix. Below a given temperature (depending on the density of the gas), this Wigner function becomes singular at zero momentum, which corresponds to a finite fraction of particles in the ground state. This article addresses the question of how to modify the Boltzmann–Nordheim (B–N) equation to take into account this singular part in the Wigner transform. For a homogeneous system it is easy to derive a coupled system of equations for the condensate fraction and the excited states. The non-homogeneous case is more subtle: at zero temperature the dynamics of a weakly interacting Bose gas is described by the Gross–Pitaevskii (G–P) equation. Therefore, one may

Note présentée par Yves POMEAU.

imagine that for any temperature between 0 K and the transition temperature, the system is described by a coupled system of B–N and G–P equations (11) and (12). This theory is fully consistent in the case of a dilute gas, that is whenever  $f\hbar^{1/3} \ll 1$ ,  $f$  being the scattering length (positive) and  $n$  the number density of particles. We present here a heuristic derivation only.

The derivation of (11) and (12) proceeds from the quantum BBGKY hierarchy (1), for the density matrices  $R(1; 1')$ ,  $R_2(1, 2; 1', 2')$ , etc. (1, 1', 2... means the position  $r_1, r_1', r_2$ , etc.). Then one has that the one particle density matrix is factorized in the form (2). The next step relates  $R_2$  to  $R_1$  by (3). This gives the coupled equations (4) and (5) valid at Vlasov order (i.e. for time scales of order  $f^{-1}$ ). The oscillations of such a system gives a closed expression for the energy spectrum (6) at finite temperatures consistent with the Bogoliubov spectrum at  $T = 0$  K. Next order should give a B–N type equation, that is (7), where  $w_p(t)$  is the Wigner transform of  $R(1, 1')$ . Below threshold for the temperature one has that  $w_p(t)$  has a singular and a smooth part respectively represented by  $w_p(t) = (2\pi)^3 \rho_0(t) \delta^{(3)}(p) + \varphi_p(t)$ , where  $\varphi_p$  is a continuous Wigner distribution. Straightforward analysis from (7) yields (8) and (9). The first equation (8) says that the density of particles of the condensate is no longer conserved itself. This suggests that the G–P equation (4) must be modified to

$$i\partial_t \Psi_0(r, t) = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi_0 + f(\rho(r) + \tilde{R}(r; r)) \Psi_0(r) + 2i \text{Coll}'_2[\varphi] \Psi_0(r)$$

From the general properties of kinetic theory, the nonunitary part of this equation ( $i\Psi_0(1) \text{Coll}'_2[\varphi]$ ) is of order  $f^2$ , although the non-linear interaction term,  $\frac{2f\hbar^2}{m} \Psi_0(1) \rho(1)$  is of order  $f$ . Nevertheless this new term cannot be neglected because it is the one of lowest order in  $f$  representing the possibility of mass exchange between the condensate and the excited states. Mass conservation is enforced by the balance between this nonunitary term and a contribution proportional to  $|\Psi_0|^2$  in the kinetic equation (11). Energy conservation is a far more difficult question, as it requires to take into account that collisions occur between particles with an energy shifted by the interaction of the condensate (in the “Bogoliubov regime”). This is correct for particles of kinetic energy far above the interaction energy with the condensate. Therefore it remains to write the kinetic equations taking into account (at this order) the Bogoliubov spectrum, which appears as a non perturbative effect in the B–N equation. This effect concerns only the small momentum particles and can be neglected for temperature larger than  $(n^{1/3} f) \hbar^2 n^{2/3} / 2m$ .

---

L'équation cinétique d'un gaz de Bose (comme celle d'un gaz de Fermi) fut écrite par Nordheim [1] peu après la mise en place définitive de la mécanique quantique non relativiste. Elle décrit le retour à l'équilibre d'un gaz de Bose dilué comme résultat de l'évolution de la transformée de Wigner de la matrice densité à un corps (la distribution de Wigner). En-dessous d'une température d'équilibre dépendant de la densité, cette transformée devient singulière à impulsion nulle, ce qui correspond à une proportion finie de particules dans l'état fondamental. On peut alors se demander comment modifier l'équation de Boltzmann–Nordheim (B–N) pour tenir compte d'une partie singulière de la distribution de Wigner. Pour un système homogène, il n'est pas très difficile de déduire de l'équation de B–N un système couplé pour l'évolution des particules dans l'état fondamental et la partie continue de la distribution de Wigner. Ce système ne concerne que le cas homogène dans l'espace quand la matrice densité ne dépend que de la distance entre les deux arguments. Dans le cas inhomogène, la situation est plus compliquée, puisque l'équation de Gross–Pitaevskiï (G–P plus loin) décrit déjà la dynamique du

gaz de Bose avec interactions à température nulle [2]. Or, le cas intéressant est celui des perturbations inhomogènes, par exemple un écoulement autour d'un obstacle ou des ondes sonores. On imagine que les situations à densité de condensat non nulle et température finie vont exiger de coupler les équations de B-N et G-P. Cette note présente ce système couplé (pour d'autres propositions concernant ce problème voir [3-5]).

Étant donné la complexité formelle des méthodes de déduction, nous nous contenterons de justifications heuristiques, renvoyant à une publication ultérieure pour une présentation détaillée. Soulignons néanmoins que ce système couplé représente la dynamique de façon cohérente dans la limite des densités faibles. La théorie cinétique des gaz dilués, classiques ou quantiques, fait intervenir deux échelles de temps différentes : le temps moyen entre collisions  $t_{mfp} = \frac{1}{\rho f^2} \left( \frac{m}{k_B T} \right)^{1/2}$  qui est formé à partir du petit paramètre sans dimension mesurant la densité,  $\frac{\hbar^2 \rho}{m k_B T}$ ,  $m$  masse des particules,  $k_B$  constante de Boltzmann,  $T$  température,  $\rho$  densité numérique du gaz et  $f$  longueur de diffusion, positive, pour l'interaction entre atomes à basse énergie. Ce petit paramètre peut s'écrire d'autres façons, puisque l'on supposera la température inférieure par un facteur d'ordre 1 à la température de transition  $T \approx \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m k_B}$ . La théorie cinétique de Vlasov concerne [6] les échelles de temps courtes d'ordre  $t_{VI} \approx \frac{m}{\hbar \rho}$ , soit d'ordre de l'inverse de  $f$  (ce qui revient à dire que l'opérateur de collision correspondant est d'ordre  $f$ ). Pour obtenir cette équation cinétique, on part de la hiérarchie BBGKY quantique qui relie les matrices densité à un et deux corps  $R(1; 1')$ , et  $R_2(1, 2; 1', 2')$  ( $1, 1', 2, \dots$  est pour la position  $r_1, r_1', r_2, \dots$  l'argument temps sera omis le plus souvent) :

$$i\hbar \frac{\partial R(1; 1')}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 - \nabla_{1'}^2) R(1; 1') + \frac{\hbar^2}{m} (R_2(1, 1; 1', 1) - R_2(1, 1'; 1', 1')) \quad (1)$$

Cette équation est écrite pour un potentiel d'interaction en fonction delta, ce qui permet d'intégrer sur la coordonnée de la seconde particule dans le terme d'interaction. Cette approximation est justifiée parce que la diffusion est à grande longueur d'onde [7]. L'étape suivante relie  $R_2$  à la matrice densité à un corps et à la fonction d'onde du condensat  $\Psi_0$ , de complexe conjugué  $\bar{\Psi}_0$ . La matrice  $R_1$  se décompose en :

$$R(1; 1') = \Psi_0(1) \bar{\Psi}_0(1') + \tilde{R}(1; 1') \quad (2)$$

où  $\tilde{R}$  est la contribution des excitations thermiques, soit du fluide normal, telle que  $\tilde{R} \rightarrow 0$  quand  $|r_1 - r_1'| \rightarrow \infty$ . À l'approximation de Vlasov, on substitue dans la partie d'interaction de (1) la décomposition de  $R_2$  [8] :

$$\begin{aligned} R_2(1, 2; 1', 2') = & \Psi_0(1) \Psi_0(2) \bar{\Psi}_0(1') \bar{\Psi}_0(2') + \Psi_0(1) \bar{\Psi}_0(1') \tilde{R}(2; 2') \\ & + \Psi_0(2) \bar{\Psi}_0(2') \tilde{R}(1; 1') + \Psi_0(1) \bar{\Psi}_0(2') \tilde{R}(2; 1') + \Psi_0(2) \bar{\Psi}_0(1') \tilde{R}(1; 2') \\ & + \tilde{R}(1; 1') \tilde{R}(2; 2') + \tilde{R}(1; 2') \tilde{R}(2; 1') \end{aligned} \quad (3)$$

ce qui donne :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0(1)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \Psi_0(1) + \frac{\hbar^2}{m} (\rho(1) + \tilde{R}(1; 1)) \Psi_0(1) \quad (4)$$

et

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{R}(1; 1')}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 - \nabla_{1'}^2) \tilde{R}(1; 1') + \frac{\hbar^2}{m} \tilde{R}(1; 1') [\rho(1) + \tilde{R}(1; 1) - \rho(1') - \tilde{R}(1'; 1')] \quad (5)$$

où

$$\rho(1) = R(1; 1) = |\Psi_0(1)|^2 + \tilde{R}(1; 1)$$

est la densité numérique locale. À l'équilibre  $|\Psi_0|^2 = \rho_0$ , densité du condensat alors que  $\tilde{R}(1; 1')$  est une fonction de  $r_1 - r_{1'}$  et de la température. Sa transformée de Fourier est le facteur de Bose :

$$\tilde{R}_{\text{eq}}(1; 1') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p e^{i\frac{p}{\hbar}(r_1 - r_{1'})} \varphi_{\text{eq}}(p)$$

où

$$\varphi_{\text{eq}}(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{2m} - 1}$$

On peut déduire de ce système couplé la relation de dispersion, ou spectre dans la terminologie de Landau [9], soit une équation pour l'énergie comme fonction  $\omega(p)$  de l'impulsion pour des petites fluctuations au voisinage de l'équilibre :

$$1 = \frac{L(p)}{1 - L(p)} - \frac{2f\rho_s \hbar^2}{m} \frac{\frac{p^2}{2m}}{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 - \omega^2(p)} \quad (6)$$

avec :

$$L(p) = \frac{2f\hbar^2}{m(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p_2 \varphi_{\text{eq}}(p_2) \frac{\frac{p^2 - 2p \cdot p_2}{2m}}{\left(\frac{p^2 - 2p \cdot p_2}{2m}\right)^2 - \omega^2(p)}$$

En l'absence de particules thermiques (soit pour  $T = \varphi_{\text{eq}}(p) = 0$ ), on retrouve le spectre de Bogoliubov [10]. En raison de l'intégration sur  $p_2$  dans  $L(p)$ , il y a un effet d'amortissement Landau par résonance entre ondes et particules de même vitesse, effet d'amortissement dont le calcul détaillé implique la connaissance de  $\varphi_{\text{eq}}(p)$  dans un domaine d'énergie où il faut prendre en compte la renormalisation de Bogoliubov. À l'ordre de Vlasov, les masses du condensat,  $\int d^3 r_1 |\Psi_0(r_1)|^2$  et du fluide normal  $\int d^3 r_1 \tilde{R}(1; 1)$  sont conservées séparément, alors qu'un échange d'énergie a lieu, contraint par la conservation de l'énergie totale

$$\int d^3 r_1 \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (-\nabla_1 \cdot \nabla_{1'} \tilde{R}(1; 1'))|_{1=r'} + |\nabla_1 \Psi_0(1)|^2 + \frac{f\hbar^2}{2m} \left( \rho^2 - \frac{\rho_0^2}{2} \right) \right],$$

expression de l'énergie correcte au premier ordre en  $f$  [11]. Comme on le sait bien de la théorie cinétique classique, l'ordre suivant du développement de l'opérateur de collision (soit pratiquement l'ordre  $f^2$  ici) fait apparaître un opérateur d'évolution irréversible. Dans le cas présent, et en l'absence de condensat, cet opérateur de collision est celui de B-N, qui peut être déduit exactement à cet ordre  $f^2$  [6]. L'équation d'évolution du nombre d'occupation du moment  $p_1$  s'écrit :

$$\partial_t w_{p_1}(t) = \text{Coll}[w]$$

où

Coll[ $w$ ]  $\equiv$

$$\int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 W_{p_1, p_2; p_3, p_4} (w_{p_3} w_{p_4} (1 + w_{p_1}) (1 + w_{p_2}) - w_{p_1} w_{p_2} (1 + w_{p_3}) (1 + w_{p_4})) \quad (7)$$

Cela concerne le cas spatialement homogène, où  $R(1; 1')$  est liée à  $w_p$  par :

$$R(1; 1') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p e^{i \frac{p(r_1 - r_{1'})}{\hbar}} w_p$$

On peut voir  $w_p(t)$  comme une distribution de probabilité des impulsions des particules, bien que cette fonction, réelle, puisse être négative. Si  $w_p(t=0) > 0$ , alors l'équation de B-N maintient cette positivité à tout temps positif. La quantité  $W$  est telle que :

$$W_{p_1, p_2; p_3, p_4} = \frac{2f^2}{m\hbar^3} \delta^{(3)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta^{(1)}(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)$$

L'écriture de l'opérateur de collision sous sa forme habituelle est retrouvée en effectuant les intégrales sur  $p_3$  et  $p_4$ . Dans le cas présent (basse température), on prend  $f$  constant, indépendant des impulsions. La distribution  $w_p(t)$  est normalisée par :  $\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p w_p(t) = \rho$ . On prendra  $\hbar = m = 1$  dans la suite de cette note. Nous allons examiner d'abord le cas où une proportion finie des particules se trouve dans le condensat, le système restant homogène. La fonction  $w_p(t)$  se décompose alors en  $w_p(t) = (2\pi)^3 \rho_0(t) \delta^{(3)}(p) + \varphi_p(t)$ , où  $\varphi_p$  est la part continue de la distribution de Wigner, et  $\rho_0(t)$  la densité du condensat. Insérant cette décomposition dans l'opérateur de collision de (7), on trouve :

$$\text{Coll}[w] = j_0(t) \delta^{(3)}(p) + \tilde{\text{Coll}}[\varphi]$$

où  $j_0 = \int_{S(0^+)} \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 \text{Coll}[w]$ . L'intégrale  $\int_{S(0^+)} \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 \text{Coll}[w]$  décrit un flux de particules dans l'espace des impulsions vers l'origine, flux qui existe si  $\varphi_p$  a une singularité en  $j_0^{1/3} p^{-7/6}$  près de l'origine. Si un tel terme est essentiel [12] pour la formation d'un condensat à partir d'une distribution de Wigner continue, on supposera néanmoins qu'il est absent dans les situations faiblement hors d'équilibre que l'on souhaite étudier. On déduit alors de (7) deux équations couplées pour  $\rho_0$  et  $\varphi_p$  :

$$\partial_t \rho_0(t) = \rho_0(t) \text{Coll}_2[\varphi], \quad (8)$$

$$\partial_t \varphi_{p_1}(t) = \text{Coll}[\varphi] + \rho_0(t) \tilde{\text{Coll}}_2[\varphi] \quad (9)$$

où

$$\text{Coll}_2[\varphi] = \int_{2,3,4} \delta_{2;3,4} (\varphi_{p_3} \varphi_{p_4} - \varphi_{p_2} (\varphi_{p_3} + \varphi_{p_4} + 1));$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Coll}}_2[\varphi] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{3,4} \delta_{1;3,4} (\varphi_{p_3} \varphi_{p_4} - \varphi_{p_1} (\varphi_{p_3} + \varphi_{p_4} + 1)) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{2,4} \delta_{1,2;4} (\varphi_{p_4} (\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} + 1) - \varphi_{p_1} \varphi_{p_2}) \end{aligned}$$

avec les notations :

$$\int_{2,3} = \int d^3 p_2 d^3 p_3$$

$$\delta_{2;3,4} = W_{0,p_2;p_3,p_4} = 2f^2 \delta^{(3)}(p_2 - p_3 - p_4) \delta^{(1)}(p_2^2 - p_3^2 - p_4^2), \text{ etc.}$$

La généralisation de ce système au cas inhomogène se fait en plusieurs étapes.

D'abord, il faut transformer l'équation pour  $\rho_0$  en une équation pour  $\Psi_0$ . Cela est formellement simple, mais implique la propriété, conséquence d'une démonstration plus détaillée, selon laquelle l'échange de masse entre partie continue du spectre et condensat se fait en préservant la phase du condensat, une sorte d'émission/absorption induite. L'équation pour  $\rho_0$  se divise alors en deux équations, une pour  $\Psi_0$  et une pour son conjugué :

$$i \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = f(\rho(1) + \tilde{R}(1;1)) \Psi_0 + 2i \Psi_0 \text{Coll}_2[\varphi] \quad (10)$$

L'équation d'évolution de  $\varphi_p$  ne change pas de forme,  $\rho_0$  y étant pris égal à  $|\Psi_0|^2$ . L'équation (10) comporte deux contributions au membre de droite : la première, unitaire et déjà écrite pour l'ordre de Vlasov, est d'ordre  $f$ . La seconde, qui ne préserve pas la norme en général, est en  $f^2$ , comme on s'y attendait, sans être pour autant négligeable devant la première : non unitaire, elle représente un échange de masse condensat–fluide normal, conditionné par le fait que le gaz est hors d'équilibre (pour une distribution de Bose à potentiel chimique nul,  $\text{Coll}_2$  s'annule). Il ne semble pas que cela ait été remarqué dans la littérature. Anticipant sur des développements futurs, cet échange de masse dépend du même type d'effet que ceux qui contribuent à la production d'entropie, puisqu'il s'agit d'un terme scalaire pour les symétries géométriques. Si le système (9), (10) conserve la masse totale, il ne conserve l'énergie qu'à la condition de négliger la partie interaction de cette énergie. La fonction de Dirac  $\delta^{(1)}(p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)$  exprime la conservation de l'énergie dans  $\text{Coll}_2$  pour des processus impliquant le condensat. Elle a été écrite en supposant nulle l'énergie du condensat, ce qui n'est vrai qu'en l'absence d'interaction. Avec des interactions, il faut insérer la fréquence  $\frac{d\theta}{dt}$  du fondamental dans l'argument de cette fonction de Dirac,  $\theta(t)$  étant la phase de  $\Psi_0$ . Cela conduit à remplacer la fonction de Dirac pour la conservation de l'énergie par :

$$\delta^{(1)}\left(2 \frac{d\theta}{dt} + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2\right)$$

Il reste à écrire le système des équations couplées pour le cas inhomogène. On entend par là le cas où une théorie cinétique quantique s'applique, soit où les variations spatiales imposées par des conditions aux limites impliquent des échelles bien supérieures à la longueur de de Broglie thermique. Dans ces conditions,  $\varphi_p$  dépend aussi de  $r = \frac{r_1 + r_1'}{2}$ , et son équation d'évolution doit inclure le terme cinétique

habituel,  $\frac{\hbar}{m} \nabla_r \varphi_p(r)$ . Un autre effet de l'inhomogénéité possible du système est que  $\Psi_0$  devient maintenant fonction de  $r$ , c'est-à-dire que le condensat acquiert le nombre d'onde local  $\hbar \nabla_r \theta(r, t)$ , où  $\theta(r, t)$  est la phase de  $\Psi_0$ . Ce nombre d'onde doit être inséré dans l'argument de la fonction de Dirac exprimant la conservation de l'impulsion, ce qui est nécessaire de toute façon pour que les équations conservent l'impulsion totale. La fonction  $\delta^{(3)}(p_2 - p_3 - p_4)$  qui figure dans  $\text{Coll}_2$  dans le cas homogène est à remplacer par  $\delta^{(3)}(\nabla_r \theta + p_2 - p_3 - p_4)$  dans le cas inhomogène. La conservation de l'énergie, comme dans le cas homogène, entraîne une nouvelle modification de la fonction delta pour l'énergie dans l'opérateur de collision. On a déjà vu comment tenir compte d'une fréquence non nulle du fondamental. Cette fréquence non nulle peut provenir de l'interaction : y

compris pour le cas homogène, le fondamental a la fréquence  $f\rho$ . Au même ordre dans l'interaction, l'énergie des particules thermiques est aussi modifiée. Pour que les équations couplées conservent exactement l'énergie, il faut remplacer l'énergie des particules libres, soit  $\frac{p^2}{2}$  par  $\frac{p^2}{2} + f\left(\rho - \frac{\rho_0}{2}\right)$ . Cette addition ne change pas l'expression des fonctions  $\delta^{(1)}$  dont les arguments ne font pas apparaître le condensat, alors que dans  $\text{Coll}_2$  et  $\tilde{\text{Coll}}_2$ , on doit écrire la condition de conservation de l'énergie comme :

$$\delta^{(1)}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial t} - 2f\left(\rho - \frac{\rho_0}{2}\right) + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2\right)$$

Le système d'équations cinétiques proposé pour décrire le gaz de Bose-Einstein à température finie s'écrit donc :

$$\partial_t \varphi_p(t, r) + p\nabla_r \varphi_p + f\nabla_r(2\rho - \rho_0) \nabla_p \varphi_p = \text{Coll}[\varphi] + \rho_0 \tilde{\text{Coll}}'_2[\varphi] \quad (11)$$

et

$$i\partial_t \Psi_0(t, r) = -\frac{1}{2} \nabla_r^2 \Psi_0 + f(\rho(1) + \tilde{R}(1; 1)) \Psi_0 + 2i\Psi_0 \text{Coll}'_2[\varphi] \quad (12)$$

Dans ces équations, l'opérateur de collision  $\text{Coll}[\varphi]$  a déjà été défini, alors que les opérateurs  $\text{Coll}'_2$  et  $\tilde{\text{Coll}}'_2$  sont déduits de  $\text{Coll}_2$  et  $\tilde{\text{Coll}}_2$  par les substitutions  $\delta^{(1)}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial t} - 2f\left(\rho - \frac{\rho_0}{2}\right) + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2\right)$  pour  $\delta^{(1)}(p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)$  et  $\delta^{(3)}(\nabla_r\theta + p_2 - p_3 - p_4)$  pour  $\delta^{(3)}(p_2 - p_3 - p_4)$ . Les équations (11) et (12) constituent l'extension au cas avec condensat de l'équation de B-N pour des bosons, incluant une correction au premier ordre dans l'interaction qui permet la conservation exacte de l'énergie :

$$\int d^3 p d^3 r \varphi(p, r) \frac{p^2}{2} + \int d^3 r \left[ \frac{1}{2} |\nabla_r \Psi_0|^2 + \frac{f}{2} \left( \rho^2 - \frac{\rho_0^2}{2} \right) \right]$$

Rappelons que l'opérateur de collision pour la partie continue du spectre n'inclut pas de façon cohérente la renormalisation de Bogoliubov. Bien que la conservation de l'énergie soit assurée au premier ordre en  $f$ , cette renormalisation affecte de façon non perturbative les faibles impulsions. Cela ne concerne qu'une petite partie de la distribution des impulsions (impulsions d'ordre  $f$  fois l'impulsion thermique moyenne, sauf si la température devient d'ordre  $f$  fois la température de transition, ce que l'on a exclu), et peut donc être négligé en première approximation. Il est clair cependant que la prise en compte exacte du spectre de Bogoliubov est indispensable pour décrire quantitativement la superfluidité. Nous nous proposons donc d'étendre le présent travail à ce dernier cas, dans le but d'obtenir une théorie cinétique cohérente dont l'hydrodynamique soit bien le modèle à deux fluides. Cela implique déjà d'établir qu'il existe des états thermodynamiques, c'est-à-dire pratiquement des solutions stationnaires des équations cinétiques couplées, pour lesquels le superfluide et le fluide normal ont une vitesse relative non nulle. Cette possibilité existe déjà pour la théorie cinétique que nous proposons : tous les termes de collisions s'annulent pour une distribution continue dans les impulsions :

$$\varphi_{\text{eq}, u} = \frac{1}{e^{\frac{p^2 - 2pu + 2f\rho_0}{2k_B T}} - 1}$$

qui représente un fluide normal de vitesse  $u$  par rapport au condensat immobile. Cette vitesse  $u$  doit être telle que  $u^2 < 4f\rho_0$  pour que  $\varphi_{\text{eq}, u}$  reste normalisable, une sorte de critère de Landau [9]. Pour

$0 < u^2 < 4f\rho_0$ , la distribution d'équilibre n'est plus singulière comme fonction de  $p$ . L'application de cette théorie à un problème concret (par exemple écoulement autour d'un obstacle) rencontre une difficulté assez subtile : la matrice densité à un corps  $\tilde{R}(1; 1')$  doit comporter des conditions aux limites (par exemple de Dirichlet) pour ses deux arguments,  $r_1$  et  $r_1'$ , une condition difficile à transcrire pour sa transformée de Wigner, particulièrement dans le domaine des faibles impulsions où une approximation d'onde courte tombe en défaut, une difficulté de principe déjà signalée pour les fluctuations de point zéro [13]. Remarquons aussi que l'existence d'une singularité en vortex dans le condensat n'est pas certaine, comme solution stationnaire des équations cinétiques couplées. Au cœur du vortex, la différence de vitesse entre fluide normal, immobile et le condensat diverge, ce qui pourrait faire disparaître la solution d'équilibre pour la partie thermique, son existence réclamant une vitesse inférieure à une valeur critique.

### Références et notes bibliographiques

- [1] Nordheim L.W., Proc. Roy. Soc. London, A 119 (1928) 689.
- [2] Ginzburg V.L., Pitaevskiĭ L.P., Sov. Phys. JETP 7, (1958) 858; Pitaevskiĭ L.P., Sov. Phys. JETP 13 (1961) 451; Gross E.P., J. Math. Phys. 4 (1963) 195.
- [3] Gardiner C.W., Zoller P., Phys. Rev. A 55 (1997) 2902; Phys. Rev. A 58 (1998) 536; Jaksch D., Phys. Rev. A 56 (1997) 575.
- [4] Zaremba E., Griffin A., Nikuni T., Phys. Rev. A 57 (1998) 4695.
- [5] Kirkpatrick T.R., Dorfman J.R., J. Low Temp. Phys. 58 (1985) 301.
- [6] Balescu R., Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics, Wiley, New-York, 1975.
- [7] Landau L.D., Lifshitz E.M., Physique théorique, Ed. Mir, Moscou, 1982, tome X.
- [8] Cette décomposition de  $R_2$  n'est pas la plus générale. Comme conséquence de la théorie de Bogoliubov, il faudrait aussi inclure dans  $R_2$  des termes tels que  $\Psi_0(r_1) \Psi_0(r_2) \tilde{R}(1', 2')$  faisant intervenir une nouvelle fonction,  $\tilde{R}$  sans interprétation classique. Un examen plus détaillé montre néanmoins que les effets ainsi introduits restent d'ordre supérieur en  $f$  à ceux qui ont été retenus, à l'exception du petit domaine des faibles d'impulsions où la renormalisation de Bogoliubov change à l'ordre 1 le spectre.
- [9] Landau L.D., J. Phys. USSR 5 (1941) 71.
- [10] Bogoliubov N.N., J. Phys. 11 (1947) 23.
- [11] Lee T.D., Yang C.N., Phys. Rev. 112 (1958) 1419.
- [12] Lacaze R., Lallemand P., Pomeau Y., Rica S., Dynamical formation of a Bose–Einstein condensate, Preprint.
- [13] Pomeau Y., Europhys. Lett. 27 (1994) 377–382; Lopez-Ruiz R., Pomeau Y., J. Phys. A 28, (1995) L255–L259.