C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série II, p. 733-737, 1994

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

Simulation numérique d'écoulements cisaillés tridimensionnels à l'aide de l'équation de Schrödinger non linéaire

Caroline NORE, Malek ABID et Marc BRACHET

Résumé – Nous donnons une méthode de préparation de la condition initiale permettant l'étude des instabilités d'écoulements cisaillés tridimensionnels libres avec l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous présentons des simulations dont les résultats indiquent que cette dernière constitue une alternative aux équations d'Euler et de Navier-Stokes pour l'étude numérique de ce type d'écoulements.

Numerical study of 3D shear-flows using the nonlinear Schrödinger equation

Abstract – *An initial data preparation method, allowing the study of 3D free shear-flows with the nonlinear Schrödinger equation, is given. Simulations are presented, showing that this method is a valid alternative to the Euler and Navier-Stokes equations for the numerical study of shear-flows.*

Abridged English Version – The standard mathematical description of physical flows uses Euler's equation for inviscid fluids and Navier-Stokes equations for viscous ones. Superfluid flows (Landau and Lifchitz, 1989) are described in terms of the irrotational Euler equation (with quantized circulation around singular vortex filaments), or in terms of the Nonlinear Schrödinger Equation (NLSE). The latter is a p.d.e. for a complex field ψ (1). Madelung's transformation (Donnelly, 1991), $\psi = \sqrt{\rho}\exp(i\varphi)$, relates ψ to the superflow's density ρ and velocity $\vec{v} = 2\alpha\vec{\nabla}\varphi$. The nodal lines, $|\psi| = 0$, are non-singular quantized vortex filaments. If enough vortex filaments are present, the global rotation of the superflow will reproduce that of a classical rotational flow (Yarmchuk and Gordon, 1979). In this limit, we can use NLSE to produce numerical simulations. For this, one needs initial data for NLSE that minimizes the acoustic radiation. In the present Note, we show that such a project is possible by giving an explicit way to generate such initial data and report on simulations carried out with sensible results, both for swirl-free and swirling 3D jets.

Our procedure consists in minimizing the free energy (2). This amounts to integration of a real Ginzburg-Landau Equation incorporating advection (3) (RGLEA). As this equation has several branches of solutions, one must start with initial data containing vortices such that an absolute minimum of $\mathcal{F}$ is reached. This is not difficult for the flows under consideration.

To carry out the numerical integration, we use standard pseudo-spectral codes (Gottlieb and Orszag, 1977). In the lateral directions, we use sine-cosine transforms to implement free-slip boundary conditions away from the flow's centre. Our codes were validated by cross-checking with general periodic codes and linear theory. The runs presented below were performed with $64 \times 64 \times 64$ resolution in a $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ box, with $c = 2.5$ and $\rho_0 = 1$.

The jet's profile is that studied by Abid and Brachet (1993 *a*). The RGLEA converged solution consists of a periodic array of vortex rings. With non-axisymmetric perturbations, we obtain a behaviour similar to that observed by Kambe and Takao (1971) (see *fig.* 1).

We have also studied a swirling jet (Batchelor, 1964). The RGLEA converged solution consists of locked-up helices. The dynamics corresponding to a random perturbed helix includes reconnection phenomena (see *fig.* 2).

In conclusion, the initial data preparation method presented in this Note has been shown to yield radiation-free NLSE dynamics, that can be used to generate the basic flow instabilities.

Note présentée par Yves POMEAU.

1251-8069/94/03190733 $ 2.00 © Académie des Sciences

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Our computations were carried out on a 90-8 Cray computer at the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique.

La description mathématique standard d'écoulements physiques utilise l'équation d'Euler pour les fluides parfaits et les équations de Navier-Stokes pour les fluides visqueux. Quant aux écoulements superfluides (Landau et Lifchitz, 1989), ils sont décrits soit par l'équation d'Euler irrotationnelle (avec une condition de quantification de la circulation de la vitesse, le moment cinétique étant concentré dans des filaments quantiques singuliers) soit par l'équation de Schrödinger Non Linéaire (ESNL). Cette dernière est une équation aux dérivées partielles agissant sur une fonction complexe *scalaire* ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\,(\Omega \psi + \alpha\, \nabla^2 \psi - \beta \,|\, \psi \,|^2 \,\psi). \tag{1}$$

La fonction ψ est reliée à la densité ρ et à la vitesse $\vec{v} = 2\,\alpha\,\vec{\nabla}\,\varphi$ du superfluide par la transformation de Madelung (Donnelly, 1991), $\psi = \sqrt{\rho}\,\exp\,(i\,\varphi)$. L'ESNL contient naturellement des filaments tourbillonnaires de circulation $4\,\pi\alpha$, non singuliers, de rayon fini : les lignes de zéro de ψ. Elle a été utilisée pour étudier numériquement la nucléation de ces filaments dans l'hélium (Frisch *et al.*, 1992). La vitesse du son c, la densité du superfluide ρ_0 et la taille du cœur d'un tourbillon ξ sont reliées aux paramètres de l'ESNL par $\Omega = c/(\sqrt{2}\,\xi)$, $\beta = c/(\sqrt{2}\,\xi\,\rho_0)$, $\alpha = c\,\xi/\sqrt{2}$.

Avec un nombre de filaments suffisant, la rotation moyenne du superfluide reproduit celle d'un fluide classique rotationnel (Yarmchuk et Gordon, 1979). Dans cette limite, nous pouvons nous proposer de simuler des écoulements rotationnels tridimensionnels en utilisant l'ESNL. Pour cela, il faut disposer d'une condition initiale comportant une assemblée de filaments reproduisant au mieux l'écoulement rotationnel que nous voulons étudier et minimisant l'émission acoustique due aux effets de compressibilité. La présente Note a pour but d'établir la faisabilité pratique d'un tel projet en indiquant, d'une part, une nouvelle méthode de préparation du réseau initial de tourbillons, et, d'autre part, en obtenant des résultats satisfaisants sur des instabilités de jet 3 D et de jet tournant 3 D à l'aide de l'ESNL.

Notre méthode de préparation de la condition initiale consiste à minimiser l'énergie libre suivante :

$$\mathcal{F} = \int \left(\alpha \,\left|\, \vec{\nabla}\,\psi - i\,\frac{\vec{u}}{2\,\alpha}\,\psi \,\right|^2 - \Omega \,|\, \psi \,|^2 + \frac{\beta}{2}\,|\, \psi \,|^4 \right) d^3\,\vec{x}, \tag{2}$$

où le champ de vitesse $\vec{u}$ vérifie la condition d'incompressibilité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Cela revient à intégrer une équation de Ginzburg-Landau réelle comportant un terme d'advection (EGLRA) de la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\,\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}} \equiv \Omega \psi + \alpha\, \nabla^2 \psi - \beta \,|\, \psi \,|^2 \,\psi - i\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\,\psi - \frac{u^2}{4\,\alpha}\,\psi. \tag{3}$$

Pour un champ de vitesse $\vec{u}$ donné, il existe en général plusieurs minimums de $\mathcal{F}$. Il est donc nécessaire de partir d'une condition initiale comportant le nombre de filaments réalisant le minimum absolu de $\mathcal{F}$. En pratique, le choix de cette condition initiale est simple pour les écoulements cisaillés considérés dans cette Note (*voir* ci-après).

Pour intégrer numériquement l'ESNL et l'EGLRA, nous utilisons une méthode pseudo-spectrale standard (Gottlieb et Orszag, 1977). L'écoulement est périodique dans l'axe du jet et est développé suivant des fonctions trigonométriques dans les directions latérales. Ceci revient à imposer des conditions de glissement libre loin du jet. Cette méthode permet de gagner un facteur 4 en temps de calcul et en encombrement mémoire par rapport à un code périodique général (Abid et Brachet, 1993 *b*). L'EGLRA est intégrée avec un pas de temps Euler implicite pour les termes linéaires et explicite pour les termes non linéaires. Pour l'ESNL, nous utilisons le schéma temporel décrit dans Nore *et al.* (1993).

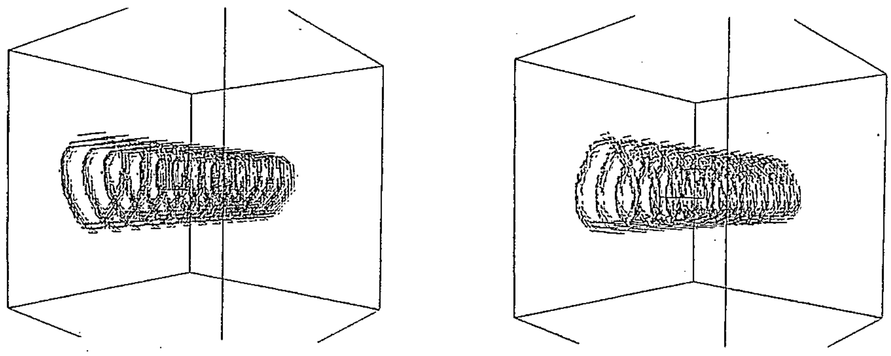
Nous avons validé les codes d'intégration de l'EGLRA et de l'ESNL, d'une part, par reproduction de la théorie linéaire, et d'autre part, par comparaison avec des codes périodiques généraux (Nore *et al.*, 1993). Pour l'ESNL, la vérification a été faite en regard de la solution d'onde acoustique qui est explicitée dans Nore *et al.* (1994). Les résultats présentés ci-dessous utilisent une résolution de $64 \times 64 \times 64$ dans une boîte de $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ avec $c = 2,5$ et $\rho_0 = 1$.

Nous avons préparé deux types d'écoulements cisaillés tridimensionnels, d'une part, un jet axisymétrique, d'autre part, un jet tournant.

Nous avons utilisé comme profil de jet celui étudié par Abid et Brachet (1993 *a*) :

$$u(r) = (U_0/2)\,[1 + \tanh(R\,(1 - r/R)/(2\,\theta))], \tag{4}$$

où U_0 est la vitesse au centre du jet, θ est l'épaisseur de la quantité de mouvement, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ et R est le rayon du jet. La condition initiale est obtenue par interpolation de la solution, superfluide en translation uniforme à U_0 à l'intérieur du jet, à la solution superfluide immobile à l'extérieur du jet. La solution convergée de l'EGLRA associée correspond à un jet formé par un réseau périodique d'anneaux tourbillonnaires. Sous la dynamique de l'ESNL, ce jet discret se déplace sans se déformer à vitesse constante et avec une émission acoustique minimale. En perturbant faiblement ce jet de façon sinusoïdale



a) b)

Fig. 1. – Jet avec perturbation orthoradiale (nombre d'onde azimutal $m = 3$) : *a*) vue en biais au temps adimensionné $U_0\,t/R = 0,4$, *b*) comme *a*) mais au temps adimensionné $= 1,6$. Les paramètres du jet sont : $U_0 = 1$, $\theta = 0,16$ et $R = 1$ pour une taille du cœur des tourbillons $\xi = 0,07$.

Fig. 1. – Azimuthal perturbation of the jet ($m = 3$ azimuthal wave number): a) Slantwise view with dimensionless time = 0.4; b) like a) but with dimensionless time = 1.6. The jet parameters are: $U_0 = 1$, $\theta = 0.16$ and $R = 1$ with a vortex core size $\xi = 0.07$.

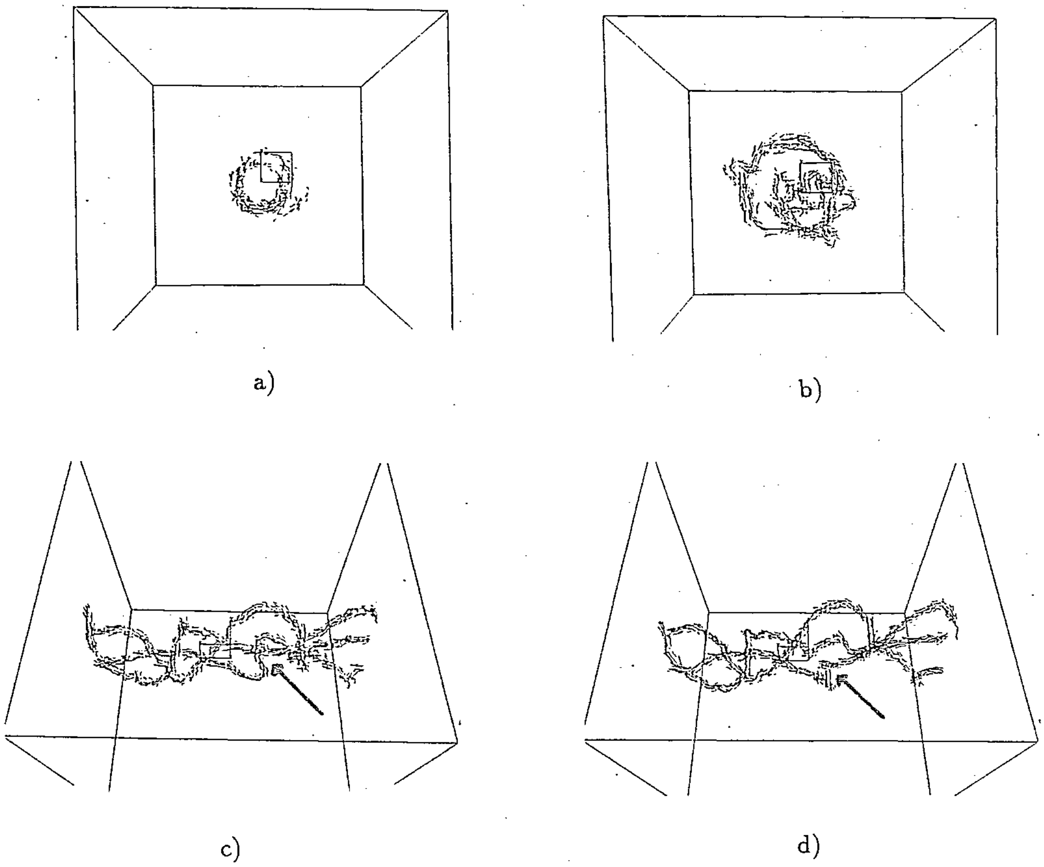


Fig. 2. – Écoulement de jet tournant : *a*) condition initiale vue dans l'axe pour l'ESNL, *b*) état éclaté; *c*) phénomène de reconnection (flèche) : avant, *d*) après la reconnection. Les paramètres du jet sont les mêmes qu'à la figure 1 avec $q = 0,8$ et $\xi = 0,047$. La perturbation aléatoire est d'amplitude 0,1.

Fig. 2. – Swirling jet flow: a) axial view of the initial data for the NLSE, b) vortex breakdown; c) reconnection event (arrow): before, d) after the reconnection. The jet parameters are the same as in figure 1 with $q = 0.8$ *and* $\xi = 0.047$. *The amplitude of the random perturbation is* 0.1.

dans la direction orthoradiale, nous observons un comportement similaire à celui obtenu expérimentalement par Kambe (Kambe et Takao, 1971) et analytiquement dans le cadre de l'équation d'Euler par Widnall (Widnall et Sullivan, 1973). La perturbation sinusoïdale correspond à une rotation rigide du mode orthoradial dans la direction opposée de la vorticité locale de l'anneau (cf. *fig.* 1).

Nous avons étudié également un jet tournant dont le profil est donné par Batchelor, 1964 :

$$u\,(r) = U_0 \exp\,(-(r/R)^2),$$
$$v\,(r) = -\,\frac{z\,R}{r^2}\,q\,(1 - \exp\,(-(r/R)^2)),$$
$$w\,(r) = \frac{y\,R}{r^2}\,q\,(1 - \exp\,(-(r/R)^2)),$$

où q est l'intensité de la rotation. La condition initiale pour l'EGLRA est obtenue en multipliant un champ de type jet, obtenu comme plus haut, par un champ comportant autant de filaments axiaux qu'il y a de quanta de circulation $4\pi\alpha$ dans la circulation globale $2\pi q R$. Sous la dynamique de l'EGLRA, les filaments se tressent avec les anneaux tourbillonnaires pour converger vers des hélices imbriquées. Sous la dynamique de l'ESNL, une triple hélice avance en se vissant sans émission acoustique notable. La dynamique correspondant à une triple hélice faiblement perturbée aléatoirement est particulièrement riche. Au cours du temps, les différents brins se repoussent, se rencontrent et peuvent subir un phénomène de reconnection, c'est-à-dire, de changement de topologie (Koplik et Levine, 1993) (cf. *fig.* 2 *c-d*). La section transverse de la structure s'agrandit notablement (cf. *fig.* 2 *a-b*). Ce phénomène a été relié à l'éclatement des filaments de vorticité présents dans les écoulements turbulents (Douady *et al.,* 1991).

En conclusion, l'utilisation de l'EGLRA (3) permet la réalisation de conditions initiales pour l'ESNL (1) correspondant à des écoulements cisaillés. La dynamique de l'ESNL reproduit la dynamique eulérienne des filaments de vorticité. Elle contient en plus de la reconnection. D'un point de vue numérique, l'ESNL présente l'avantage d'être une équation scalaire complexe. Par contre, elle présente l'inconvénient de ne contenir de la rotation que de manière discrète. Les simulations d'écoulements cisaillés que nous avons présentées dans cette Note démontrent que l'ESNL constitue une alternative prometteuse aux équations d'Euler et de Navier-Stokes pour l'étude numérique de phénomènes de base de la Mécanique des Fluides.

Nos calculs numériques ont été réalisés sur le Cray 90-8 de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique.

Note remise le 28 juillet 1994, acceptée le 22 août 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

M. ABID et M. BRACHET, Mécanisme de génération des « jets latéraux » dans les jets axisymétriques forcés, *C. R. Acad. Sci. Paris,* 316, série II, 1993 *a*, p. 1673-1678.

M. ABID et M. BRACHET, Numerical characterisation of the dynamics of vortex filaments in round jets, *Phys. Fluids A,* 5, (11), 1993 *b*, p. 2582-2584.

G. K. BATCHELOR, Axial flow in trailing line vortices, *J. Fluid Mech.,* 20, 1964, p. 645-658.

R. J. DONNELLY, *Quantized Vortices in Helium II,* Cambridge University Press, 1991.

S. DOUADY, Y. COUDER et M. E. BRACHET, Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence, *Phys. Rev. Lett.,* 67, 1991, p. 983-986.

T. FRISCH, Y. POMEAU et S. RICA, Transition to dissipation in a model of superflow, *Phys. Rev. Lett.,* 69, 1992, p. 1644.

D. GOTTLIEB et S. A. ORSZAG, *Numerical Analysis of Spectral Methods,* SIAM, Philadelphia, 1977.

T. KAMBE et T. TAKAO, Motion of distorted vortex rings, *J. Phys. Soc. Jap.,* 31, (2), 1971, p. 591-599.

J. KOPLIK et H. LEVINE, Vortex reconnection in superfluid helium, *Phys. Rev. Lett.,* 71, 1993, p. 1375-1378.

L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Mécanique des fluides,* 6, Mir, 1989.

C. NORE, M. BRACHET, E. CERDA et E. TIRAPEGUI, Scattering of first sound by superfluid vortices, *Phys. Rev. Lett.,* 72, (16), 1994, p. 2593-2596.

C. NORE, M. BRACHET et S. FAUVE, Numerical study of hydrodynamics using the nonlinear Schrödinger equation, *Physica D,* 65, 1993, p. 154-162.

S. WIDNALL et J. P. SULLIVAN, On the stability of vortex rings, *Proc. R. Soc. Lond. A.,* 332, 1973, p. 335-353.

E. J. YARMCHUK et M. J. V. GORDON, Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium, *Phys. Rev. Lett.,* 43, 1979, p. 214-217.

Laboratoire de Physique Statique, CNRS URA 1306, ENS Ulm,
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.