

Turbulence/Turbulence

Géométrie des structures à petite échelle dans le vortex de Taylor-Green

Marc BRACHET

Résumé – Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles sont intégrées numériquement par méthode spectrale. Les symétries des conditions initiales permettent d'atteindre la résolution de 864^3 et des nombres de Reynolds élevés ($R_\lambda = 140$). La visualisation de l'écoulement turbulent résultant montre que la vorticité est plus concentrée spatialement que la dissipation d'énergie. Il en résulte une forte corrélation entre les zones d'activité turbulente et celles de dépression. Ces résultats sont confirmés par la mesure de l'exposant de codimension fractale qui indique une intermittence significativement plus grande pour la vorticité : $\mu = 0,86$; que pour la dissipation d'énergie : $\mu = 0,38$.

The geometry of small-scale structures of the Taylor-Green vortex

Abstract – The three-dimensional Navier-Stokes equations are numerically integrated by a spectral method. Using the symmetries of the initial data a resolution of 863^3 and high Reynolds numbers ($R_\lambda = 140$) are obtained. Visualisations of the resulting turbulent flow show that the vorticity is spatially more concentrated than the energy dissipation. Consequently the turbulent activity is strongly correlated with low pressure zones. Measures of the exponent of fractal codimension confirm these results by showing more intermitency for vorticity: $\mu = 0.86$, than for energy dissipation: $\mu = 0.38$.

Abridged English Version – To study developed turbulence numerically, a large range of spatial scales, and hence high resolution, is essential. One is quickly limited by the size of the computer. An idea that comes to mind is to simplify the geometry of the flow, for example by using periodic boundary conditions ([1], [2]).

The Taylor-Green vortex [3] is the three-dimensional flow that develops from the initial data:

$$\begin{aligned} V_x &= \sin(x) \cos(y) \cos(z) \\ V_y &= -\cos(x) \sin(y) \cos(z) \\ V_z &= 0 \quad (V_z \neq 0 \text{ for } t \neq 0), \end{aligned}$$

following the Navier-Stokes equations:

$$\begin{aligned} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v &= -\nabla p + \nu \Delta v \\ \nabla \cdot v &= 0. \end{aligned}$$

This is perhaps the simplest system in which to study the generation of excitation at small scales and the resulting turbulence. Since the initial conditions are products of trigonometric functions, we can use spectral methods, which are both simple to implement and accurate [4].

Compared with flows which are simply periodic, the Taylor-Green vortex displays additional symmetries. By taking advantage of these additional symmetries in the spectral integration algorithm for the Navier-Stokes equations, it is possible to gain factors of 64 in memory, of 32 in number of operation and thus a factor of 4 in the separation of scales for a given computational power. In practice it is possible to run on a Cray-2 with a resolution of 864^3 (at the cost of tens of CPU hours per turnover time).

The evolution at large Reynolds numbers of the Taylor-Green vortex follows essentially two phases [5]. During the first phase, the viscous effects can be neglected, and small-scale structures are generated which are well organized and laminar. During the second phase, viscous diffusion plays an important role in the dynamics and disordered dissipative structures

Note présentée par Yves POMEAU.

are created. The energy dissipation attains its maximum at a late stage of the viscous phase. In the stimulation which we present here, with a resolution of 864^3 and with a Reynolds number (defined as the inverse of the kinematic viscosity) of 5,000, this maximum takes place at $t=9$ (see *Fig. 1*). *Figure 2* shows the energy spectrum, defined here as the kinetic energy per unit volume and per wave number (averaged over angle) at the moment of maximum energy dissipation. Note that, over more than a decade, an inertial range is present over which the spectrum follows a power law with exponent close to the value of $-5/3$ predicted by Kolmogorov [6], followed by a dissipative zone. At this instant in time, the Reynolds number R_λ defined using the Taylor scale is about 140.

The chaotic and highly intermittent appearance of the small-scale excitations is shown in *Figure 3* which represents, in a planar section at $y=\pi/4$, the square of the vorticity field $\omega^2 = (\nabla \times v)^2$. *Figure 4* represents in the same fashion the local energy dissipation $\varepsilon = \nu/2 \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)$. Note that the energy dissipation appears somewhat less spatially concentrated than the vorticity. This is confirmed by examination of other planes of section, and also by *Figure 5*, which shows that the zones of turbulent activity are in low-pressure regions. Indeed, by taking the divergence of the Navier-Stokes equations, we find that the pressure obeys the equation:

$$\Delta p + 1/4 (\sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 - 2\omega^2) = 0.$$

It is therefore natural to establish an analogy to electrostatics, with the pressure corresponding to the potential resulting from negative and positive charges distributed according to the vorticity and the energy dissipation, respectively. The vorticity concentrations thus act like sources of low pressure and their greatest relative concentration is the cause of the spatial correlation observed between turbulent activity and low-pressure regions. We can quantify this relative concentration difference by measuring the intermittency of the vorticity and of the energy dissipation via the spectra of their local fluctuations. *Figures 7* and *8* show that these spectra follow power laws in $k^{1-\mu}$ with $\mu=0.38$ for the energy dissipation and $\mu=0.86$ for the vorticity. The exponent μ which was first introduced by Kolmogorov in 1962 [7] can also be interpreted as the Fourier fractal dimension of the dissipation in the limit of infinite Reynolds number [8]. Note that the non-uniqueness of the exponent μ that we observe here is taken into account in the multifractal theories of intermittency [9]. It may be possible to detect experimentally the high-vorticity low-pressure zones of fully developed turbulence by running a Wilson-type bubble chamber containing a suspension of active particles [10].

La turbulence est dite développée quand les échelles porteuses d'énergie et celles où se fait la dissipation sont nettement séparées. Pour cela il faut des nombres de Reynolds au moins de l'ordre de quelques milliers. Expérimentalement, on obtient des nombres bien plus élevés (jusqu'à quelques millions). Cependant, la quasi-totalité des méthodes actuelles de mesures ne donnent directement accès qu'aux vitesses, ce qui fait que la connaissance des structures à petite échelle caractérisée par de grands gradients de vitesse, reste expérimentalement très fragmentaire [1].

Quelle est la position des études numériques par rapport à ce problème? Pour étudier numériquement la turbulence développée, il faut disposer d'une large gamme d'échelles dans l'écoulement et donc d'une haute résolution. On se heurte ainsi rapidement aux limites de l'outil informatique. Une idée pour progresser est alors d'explorer certains aspects de la dynamique contenue dans les équations de Navier-Stokes en simplifiant au

maximum la géométrie de l'écoulement par exemple en utilisant des conditions aux limites périodiques [2].

Le vortex de Taylor-Green [3] est l'écoulement tridimensionnel qui se développe à partir de la condition initiale :

$$\begin{aligned} V_x &= \sin(x) \cos(y) \cos(z) \\ V_y &= -\cos(x) \sin(y) \cos(z) \\ V_z &= 0 \quad (V_z \neq 0 \text{ pour } t \neq 0), \end{aligned}$$

en suivant les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v &= -\nabla p + \nu \Delta v \\ \nabla \cdot v &= 0. \end{aligned}$$

C'est sans doute le système le plus simple dans lequel on puisse étudier la production d'excitations aux petites échelles et la turbulence qui en résulte. Cet écoulement se prête remarquablement bien au calcul numérique. Les conditions initiales étant des produits de fonctions trigonométriques on peut utiliser des méthodes spectrales qui sont simples et très précises [4].

Le vortex de Taylor-Green présente par rapport aux écoulements simplement périodiques des symétries supplémentaires qui permettent, en les exploitant dans l'algorithme spectral d'intégration des équations de Navier-Stokes, de gagner un facteur 64 en encombrement mémoire et 32 en nombre d'opérations. On gagne ainsi un facteur 4 dans la séparation des échelles à égalité de moyens informatiques. En pratique il est ainsi possible

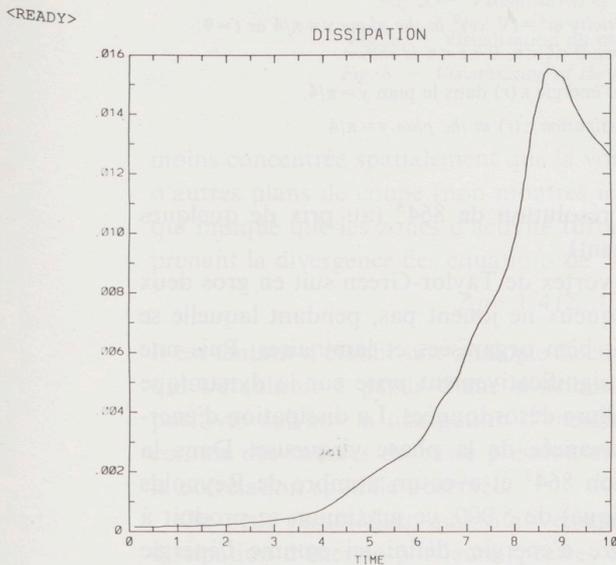


Fig. 1

Fig. 1. - Dissipation d'énergie $\epsilon(t) = \nu/2 \int dr \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2$ en fonction du temps.

Le maximum est atteint, après quelques temps de retournement, vers $t=9$.

Fig. 1. - Energy dissipation $\epsilon(t) = \nu/2 \int dr \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2$ versus time.

The maximum is reached, after a few eddy turnover times, around $t=9$.

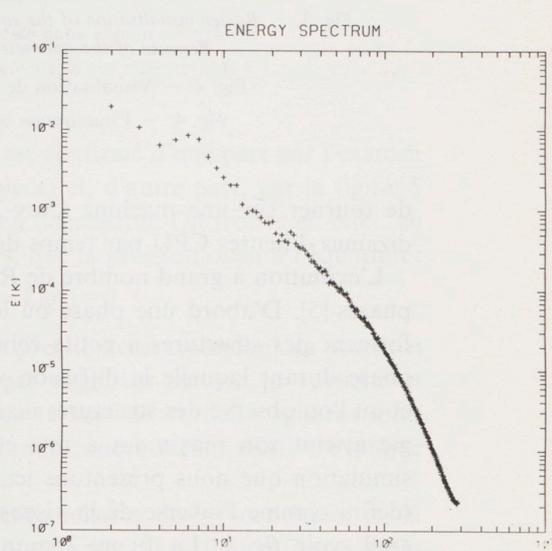


Fig. 2

Fig. 2. - Spectre d'énergie $E(k)$ à $t=9$, la pente est proche de $-5/3$ entre $k=6$ et 60 .
 Fig. 2. - Energy spectrum $E(k)$ at $t=9$; the slope is close to $-5/3$ between $k=6$ and 60 .

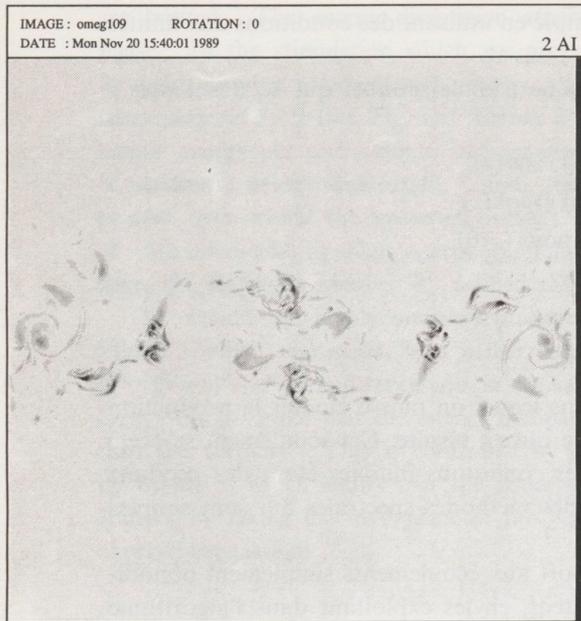


Fig. 3

Fig. 3. — Visualisation du carré de la vorticité $\omega^2 = (\nabla \times v)^2$ dans le plan $y = \pi/4$ en mode raster à $t = 9$.
En raison des symétries seule la portion $0 < x < \pi$, $0 < z < \pi$ du plan est montrée.

Fig. 3. — Raster visualisation of the square of the vorticity $\omega^2 = (\nabla \times v)^2$ in the plane $y = \pi/4$ at $t = 9$.
Because of the symmetries, only the area $0 < x < \pi$, $0 < z < \pi$ is shown.

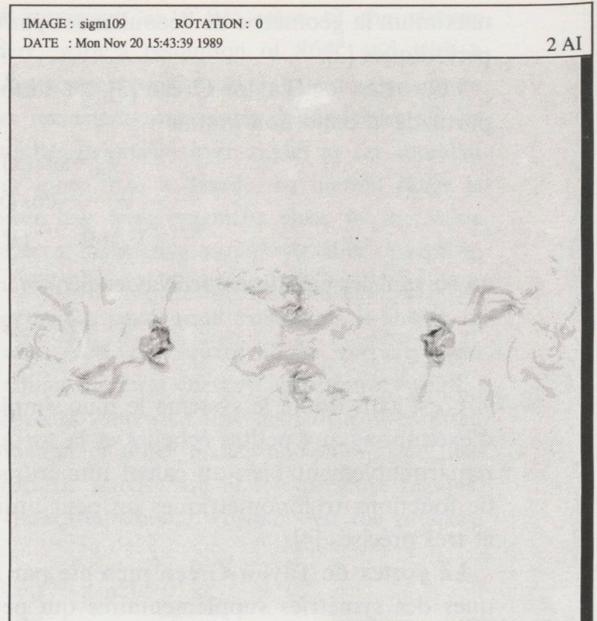


Fig. 4

Fig. 4. — Visualisation de la dissipation d'énergie $\varepsilon(r)$ dans le plan $y = \pi/4$.

Fig. 4. — Visualisation of the energy dissipation $\varepsilon(r)$ in the plan $y = \pi/4$.

de tourner sur une machine Cray-2 avec une résolution de 864^3 (au prix de quelques dizaines d'heures CPU par temps de retournement).

L'évolution à grand nombre de Reynolds du vortex de Taylor-Green suit en gros deux phases [5]. D'abord une phase où les effets visqueux ne jouent pas, pendant laquelle se forment des structures à petite échelle qui sont bien organisées et laminaires. Puis une phase durant laquelle la diffusion visqueuse a significativement prise sur la dynamique et où l'on observe des structures dissipatives d'allure désordonnées. La dissipation d'énergie atteint son maximum à une étape assez avancée de la phase visqueuse. Dans la simulation que nous présentons ici, en résolution 864^3 et avec un nombre de Reynolds (défini comme l'inverse de la viscosité cinématique) de 5,000, ce maximum se produit à $t = 9$, voir fig. 1. La figure 2 montre le spectre d'énergie, défini ici comme l'énergie cinétique par unité de volume et de nombre d'onde (moyennée sur les angles) à l'instant du maximum de la dissipation d'énergie. On remarque, sur près d'une décade, une zone inertielle où le spectre suit une loi en puissance proche de la valeur $-5/3$ prédite par Kolmogorov [6], suivie d'une belle zone dissipative. A cet instant le nombre de Reynolds construits sur l'échelle de Taylor R_λ vaut 140.

L'aspect spatial, chaotique et fortement intermittent, des excitations à petite échelle est révélé par la figure 3 qui représente, en coupe dans le plan $y = \pi/4$, le carré de la vorticité $\omega^2 = (\nabla \times v)^2$. La figure 4 représente de la même manière la dissipation locale d'énergie $\varepsilon = \nu/2 \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2$. On remarque que la dissipation d'énergie paraît plutôt

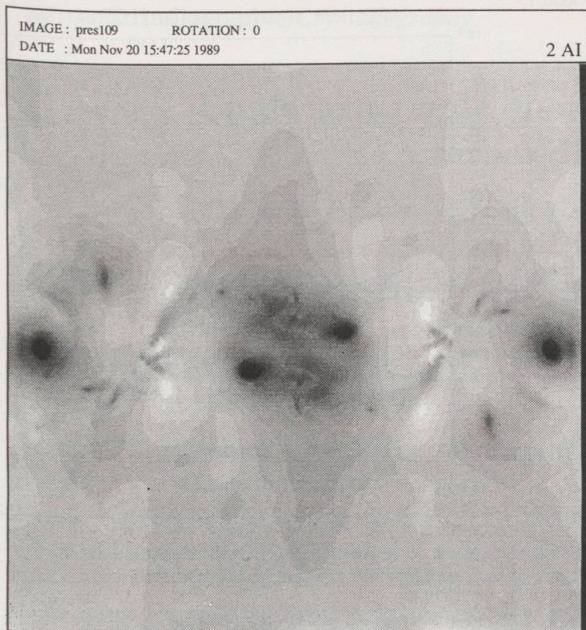


Fig. 5

Fig. 5. — Visualisation de la pression dans le plan $y=\pi/4$.

Fig. 5. — *Visualisation of the pressure field in the plan $y=\pi/4$.*

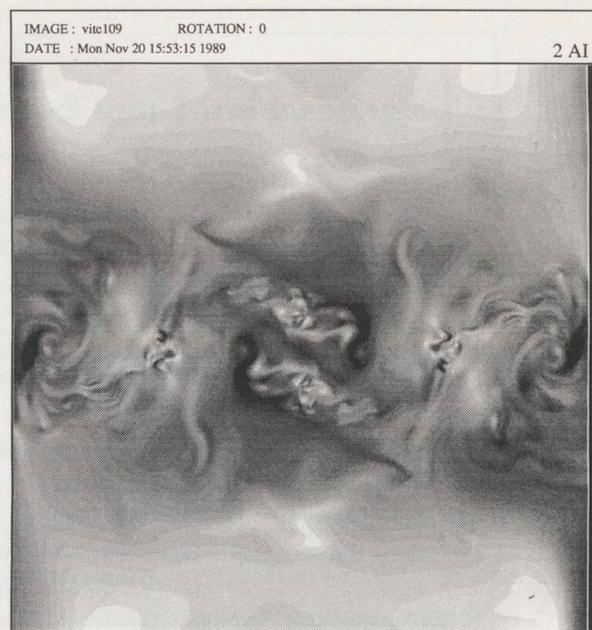


Fig. 6

Fig. 6. — Visualisation du module de la vitesse dans le plan $y=\pi/4$.

Fig. 6. — *Visualisation of the magnitude of velocity in the plan $y=\pi/4$.*

moins concentrée spatialement que la vorticité. Cela est confirmé d'une part par l'examen d'autres plans de coupe (non montrés ici faute de place) et, d'autre part, par la figure 5 qui indique que les zones d'activité turbulente sont en dépression. On trouve en effet, en prenant la divergence des équations de Navier-Stokes, que la pression obéit à l'équation :

$$\Delta p + 1/4 (\sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 - 2\omega^2) = 0$$

Il est tentant d'établir une analogie électrostatique, la pression correspondant au potentiel qui s'établirait à partir d'une distribution de charges négatives suivant la vorticité et positives suivant la dissipation d'énergie. Les concentrations de vorticité agissent ainsi comme des sources de basse pression et leur plus grande concentration relative explique la corrélation spatiale observée.

On peut caractériser quantitativement l'intermittence relative de la vorticité et de la dissipation d'énergie par leurs spectres des fluctuations locales : Les figures 7 et 8 montrent que ces spectres suivent des lois d'échelle en $k^{1-\mu}$ avec $\mu=0,38$ pour la dissipation d'énergie et $\mu=0,86$ pour la vorticité. L'exposant μ , qui a été introduit pour la première fois par Kolmogorov en 1962 [7], peut également s'interpréter comme la dimension fractale de Fourier de la dissipation dans la limite des nombres de Reynolds infinis [8]. Remarquons que la non-unicité de l'exposant μ que nous observons ici est prise en compte dans les théories multifractales de l'intermittence [9]. Il est sans doute possible de détecter expérimentalement les zones dépressionnaires de haute vorticité de la turbulence développée en procédant à des détenteurs dans une chambre à bulles contenant une suspension de particules actives [10].

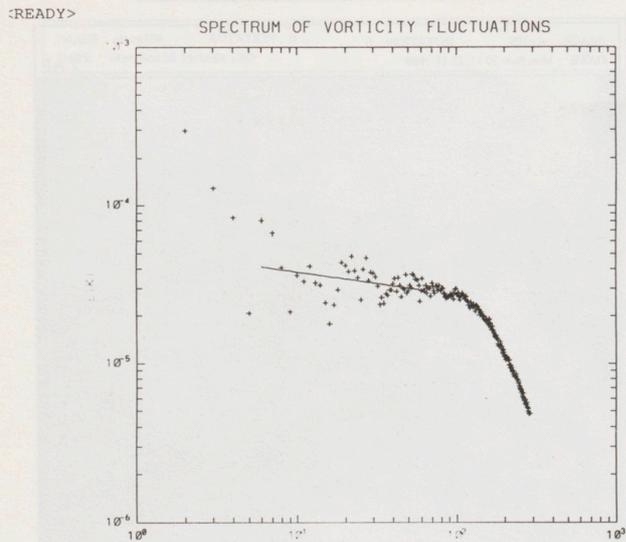


Fig. 7

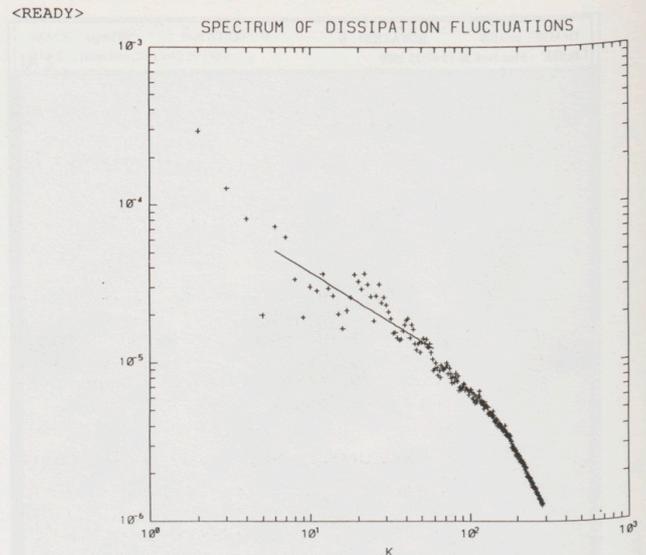


Fig. 8.

Fig. 7. — Spectre des fluctuations de la vorticité.

La ligne continue représente un ajustement de la forme $k^{-1+\mu}$ entre $k=6$ et 60 qui donne $\mu=0,86$.

Fig. 7. — *Spectrum of vorticity fluctuations.*

The continuous line is a least square fit between $k=6$ and 60 of the form $k^{-1+\mu}$ yielding $\mu=0.86$.

Fig. 8. — Spectre des fluctuations de la dissipation d'énergie.

Le même ajustement que pour la figure 7 donne ici $\mu=0,38$.

Fig. 8. — *Spectrum of energy dissipation fluctuations.*

The same fit as in Figure 7 yields $\mu=0.38$.

Les calculs ont été réalisés au Centre de Calcul vectoriel pour la Recherche et les visualisations ont été effectuées grâce au contrat D.R.E.T. n° 87/1483.

Note remise le 18 avril 1990, acceptée après révision le 20 juillet 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. S. MONIN et A. M. YAGLOM, *Statistical Fluid Mechanics*, 2, M.I.T. Press, 1975.
- [2] S. A. ORSZAG, *Les Houches*, 1973, in R. BALLIAN et J. L. PEUBE éd., Gordon and Breach, 1977, p. 235.
- [3] G. I. TAYLOR et A. E. GREEN, *Proc. Roy. Soc. Londres*, série A, 158, 1937, p. 499-521.
- [4] D. GOTTLIEB et S. A. ORSZAG, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, Soc. Industr. Appl. Math., Philadelphie, 1977.
- [5] M. BRACHET, D. MEIRON, S. A. ORSZAG, B. NICKEL, R. MORF et U. FRISCH, *J. Fluid Mech.*, 130, 1983, p. 411-452.
- [6] A. N. KOLMOGOROV, *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. (Doklady Akad. Nauk)*, 30, 1941, p. 301-316.
- [7] A. N. KOLMOGOROV, *J. Fluid Mech.*, 13, 1962, p. 82-101.
- [8] B. MANDELBROT, *Turbulence and Navier-Stokes Equation*, R. TEMAN éd., *Lecture Notes in Math.*, Springer, 565, 1976, p. 121.
- [9] G. PARISI et U. FRISCH, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, M. GHIL et G. PARISI éd., North-Holland, Amsterdam, 1985, p. 71.
- [10] Y. COUDER et Y. POMEAU, communication privée.

Laboratoire de Physique statistique, École normale supérieure,
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05.