

**TURBULENCE.** — *Intégration numérique des équations de Navier-Stokes en régime de turbulence développée.* Note (\*) de **Marc Brachet**, présentée par Alexandre Favre.

Les équations de Navier-Stokes avec les conditions initiales proposées par G. I. Taylor et A. E. Green sont intégrées numériquement sur ordinateur vectoriel par une méthode spectrale. Les symétries du problème permettent d'atteindre la résolution de  $256^3$  et des nombres de Reynolds élevés ( $R_\lambda$  jusqu'à 108). L'écoulement possède plusieurs des caractéristiques de la turbulence développée, en particulier une dissipation intermittente avec un exposant de codimension fractale  $\mu = 0,5 \pm 0,2$ .

**TURBULENCE.** — Numerical Integration of the Navier-Stokes Equations in the Fully Developed Turbulence Regime.

*The Navier-Stokes equations with initial conditions proposed by G. I. Taylor and A. E. Green are numerically integrated on a vector computer by a spectral method. Using the symmetries of the problem a resolution of  $256^3$  and high Reynolds numbers ( $R_\lambda = 108$ ) are obtained. The flow has several characteristics of fully developed turbulence, in particular an intermittent dissipation with an exponent of fractal codimension  $\mu = 0.5 \pm 0.2$ .*

L'intégration des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles permet, à condition de la dissipation d'énergie  $\varepsilon(t) = 2\nu\Omega(t)$  [ $\Omega(t)$  est l'enstrophie], quantité qui reflète des théories statistiques approchées comme l'intermittence de la dissipation d'énergie ([1], [2]). Il est généralement admis que la structure à petite échelle de la turbulence développée est largement indépendante des caractéristiques détaillées du domaine de production. Pour la présente étude nous avons utilisé un écoulement incompressible particulier, introduit par G. I. Taylor et A. E. Green [3] qui se prête remarquablement bien au calcul numérique. Les conditions initiales du « vortex de Taylor-Green » sont  $2\pi$ -périodiques dans les trois coordonnées et ne comportent que des harmoniques de nombre d'onde un :

$$(1) \quad u = \cos x \sin y \cos z, \quad v = -\sin x \cos y \cos z, \quad w = 0.$$

L'écoulement présente six symétries discrètes préservées au cours de l'évolution. Trois de ces symétries impliquent l'existence d'une boîte cubique de côté  $\pi$  qui est imperméable à l'écoulement (vitesses normales aux faces nulles). Les lignes de courant sont initialement dans des plans horizontaux mais, sous l'action de la pression, il apparaît une composante verticale qui devient comparable à la composante horizontale au bout d'un temps environ égal à deux.

La numérisation des équations de Navier-Stokes est effectuée par une méthode pseudo-spectrale [4] avec un schéma temporel du second ordre. On rappelle que les méthodes du type spectral non seulement sont d'une mise en œuvre efficace grâce à l'utilisation de transformées de Fourier rapides, mais surtout donnent dans l'évaluation des termes non linéaires une précision qui peut croître exponentiellement avec la résolution. L'utilisation d'algorithmes spéciaux s'appuyant sur les symétries du vortex de Taylor-Green nous a permis d'atteindre la résolution de  $256^3$  (dans le cube de côté  $2\pi$ ). Sur l'ordinateur vectoriel Cray-1 le temps d'unité centrale est de 10 s par pas de temps auxquelles s'ajoutent 4 s de temps d'entrées/sorties non recouvertes.

Nous présentons ici les premiers résultats obtenus dans le cas visqueux. Pour une étude plus détaillée et un exposé des résultats obtenus par diverses méthodes dans le cas non visqueux nous renvoyons le lecteur à [6]. Dans ce qui suit le nombre de Reynolds  $R$  est défini comme l'inverse de la viscosité cinématique (l'échelle intégrale et la vitesse sont initialement de l'ordre de l'unité). En travaillant successivement à une résolution de  $64^3$ ,

128<sup>3</sup>, et 256<sup>3</sup> et en variant le nombre de Reynolds, il est possible de tester la précision du calcul. Cette précision dépend de la quantité calculée. Nos tests de précision portent sur la dissipation d'énergie  $\varepsilon(t) = 2\nu\Omega(t)$  [ $\Omega(t)$  est l'enstrophie], quantité qui reflète assez bien l'activité à petite échelle. A la résolution de 256<sup>3</sup> la précision est environ 1% à  $R = 1\,600$  et environ 8% à  $R = 3\,000$ .

La dissipation, qui est initialement 0( $\nu$ ), atteint un maximum  $2\nu\Omega(t_{\max})$  à un instant  $t_{\max}$  et décline ensuite (<sup>1</sup>). Pour  $R$  compris entre 100 et 3 000,  $\Omega_{\max}$  varie comme  $\nu^{-1}$  à mieux que 10% près. Dans une précédente étude

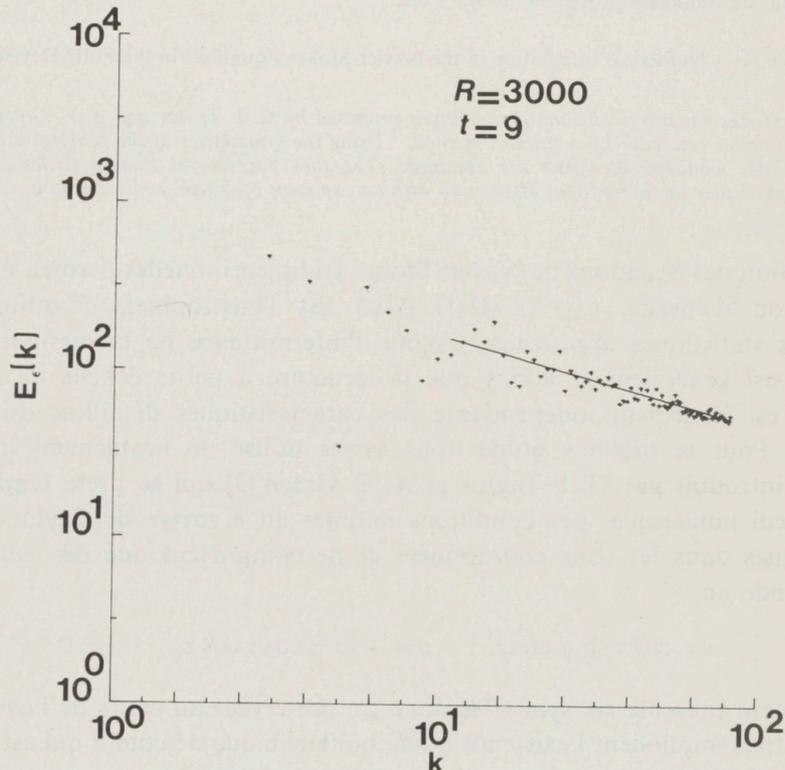


Fig. 1. — Spectre des fluctuations de la dissipation locale. La ligne continue représente un ajustement de la forme  $k^{-1+\mu}$  par méthode des moindres carrés entre  $k = 11$  et  $k = 83$  qui donne  $\mu = 0,46$ .

Fig. 1. — Spectrum of fluctuations of local dissipation. The continuous line is a least square fit between  $k = 11$  and  $k = 83$  of the form  $k^{-1+\mu}$ , yielding  $\mu = 0.46$ .

en résolution 64<sup>3</sup> atteignant  $R = 400$  [7],  $t_{\max}$  semblait se stabiliser autour de 6,5; en fait à partir de  $R = 500$   $t_{\max}$  passe assez brusquement à une valeur de l'ordre 9.

Pour  $R = 3\,000$ , à l'instant du maximum de la dissipation, le nombre de Reynolds (construit sur l'échelle de Taylor)  $R_\lambda$  vaut 108. En soufflerie les expériences à des  $R_\lambda$  comparables présentent déjà certaines caractéristiques de turbulence développée. Qu'en est-il du vortex de Taylor-Green ?

Une première réponse est apportée par l'analyse du spectre d'énergie, défini ici comme l'énergie cinétique par unité de nombre d'onde et de volume (moyennée sur les angles). Pour  $R = 1\,600$  et  $R = 3\,000$  le spectre aux instants voisins de  $t_{\max}$  est bien représenté par une loi de la forme  $C k^{-n} e^{-\delta k}$ , la valeur de l'exposant  $n$  et de l'échelle de dissipation  $\delta$  sont en accord avec la théorie de Kolmogorov 1941 et les données expérimentales [1]; la constante  $C$  est environ deux fois trop élevée. A  $R = 1\,600$  l'exponentielle du domaine de dissipation domine largement. Par contre à  $R = 3\,000$  le spectre est bien rectiligne au-delà

du nombre d'onde 12 en coordonnées logarithmiques. Au voisinage de l'instant du maximum de la dissipation l'exposant du spectre présente des fluctuations temporelles mais reste compris entre  $-1,5$  et  $-2,0$ . Pour plus de détails concernant par exemple l'isotropie des petites échelles (voir [6]).

La turbulence développée présente des caractéristiques qui ne sont pas prises en compte par la théorie de Kolmogorov 1941, comme l'intermittence de la dissipation [1]. Cette intermittence peut être caractérisée par le spectre  $E_\varepsilon(k)$  des fluctuations de la dissipation locale  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \nu \omega^2(\mathbf{r})$  où  $\omega$  est le vecteur tourbillon. La figure 1 montre le spectre en

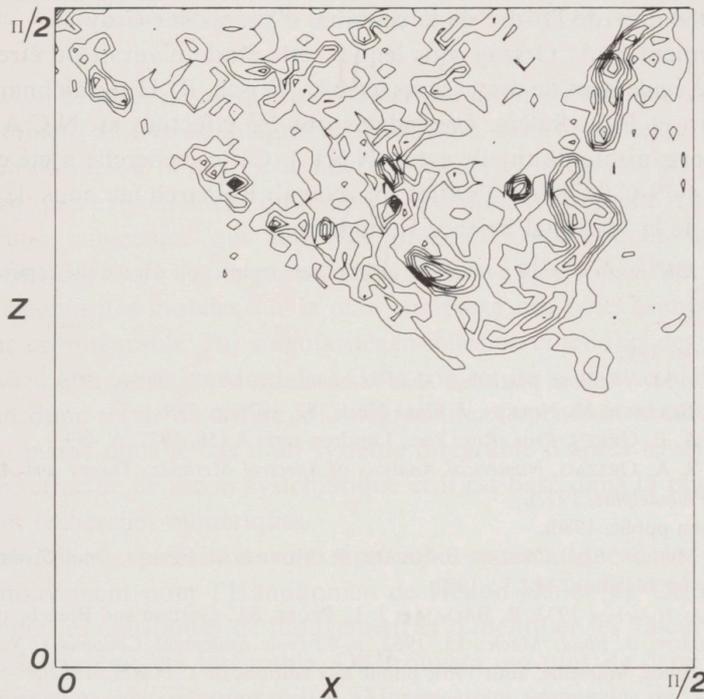


Fig. 2. — Courbes de niveau de la dissipation locale  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \nu \omega^2(\mathbf{r})$  dans le plan  $y = \pi/2$  ( $R = 3000$ ,  $t = 9$ ).  $|\omega|$  minimum : 0, maximum : 22,4, écart entre les niveaux : 2,48. Noter l'importante intermittence des structures dissipatives et leur caractère désordonné.

Fig. 2. — Level lines of local dissipation  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \nu \omega^2(\mathbf{r})$  in the plane  $y = \pi/2$  ( $R = 3000$ ,  $t = 9$ ).  $|\omega|$  minimum: 0, maximum: 22.4; increment: 2.48. Note the importance of the intermittency of dissipative structures and their disordered character.

coordonnées logarithmiques dans le cas  $R = 3000$  près de l'instant  $t_{\max}$ . Aux grands nombres d'onde le spectre suit une loi en  $k^{-1+\mu}$  avec  $\mu = 0,5 \pm 0,2$  en accord avec les résultats expérimentaux [1]. A  $R = 1600$  le spectre  $E_\varepsilon(k)$  est encore largement dominé par la coupure visqueuse. L'exposant  $\mu$ , introduit pour la première fois par Kolmogorov en 1962 [8], peut sous certaines conditions s'interpréter comme la dimension fractale de Fourier de la dissipation dans la limite de nombre de Reynolds infini [9]. Les interprétations géométriques possibles du phénomène d'intermittence suggèrent de chercher à visualiser la dissipation locale  $\varepsilon(\mathbf{r})$  dans l'espace physique ce qui expérimentalement n'a jamais été réalisé. La figure 2 représente les lignes de niveau de  $\varepsilon(\mathbf{r})$  à l'instant  $t = 9$  dans un plan de coupe  $y = \pi/2$ . En raison des symétries on n'a représenté qu'un carré de côté  $\pi/2$ . On voit que les structures dissipatives sont très intermittentes et ont un caractère désordonné.

Notons enfin que vers  $t=3$  quand la viscosité est encore inopérante, on a déjà une importante activité à petite échelle; celle-ci toutefois a un caractère très laminaire et est concentrée dans des sortes de couches limites au voisinage de certains plans de symétrie [6].

Le vortex de Taylor-Green, malgré l'extrême simplicité de ses conditions initiales, conduit à un régime de turbulence développée dans lequel les propriétés à petite échelle peuvent être analysées à la fois spectralement et dans l'espace physique et sont très proches de ce qui est observé expérimentalement. Cependant, à la résolution  $256^3$  les domaines inertiels et dissipatifs présentent sans doute un recouvrement excessif pour  $R = 3\,000$ . Des nombres de Reynolds sensiblement plus élevés avec une bonne séparation des échelles seraient accessibles en travaillant à la résolution  $512^3$  ce qui est à la limite des possibilités des ordinateurs existants (de l'ordre de la centaine d'heures sur Cray-1).

Je remercie vivement S. A. Orszag sans lequel cette étude n'aurait pu être réalisée. J'ai beaucoup bénéficié également de discussions avec U. Frisch, R. H. Kraichnan, D. Meiron, R. Morf, A. Patera et P.-L. Sulem. Les calculs ont été effectués au N.C.A.R., Boulder, Colorado (dont l'organisme de tutelle est la N.S.F.). Cette recherche a été effectuée sous contrat n° N00014-79-C-0478 de l'Office of Naval Research et sous le financement n° ATM-8017284 de la National Science Foundation.

(<sup>1</sup>) L'intégration en  $256^3$  jusqu'à  $t=10$  a nécessité 1 600 pas de temps, soit 4 h d'unité centrale.

(\*) Remise le 15 février 1982.

- [1] A. S. MONIN et A. M. YAGLOM, *Statistical Fluid Mechanics*, 2, M.I.T., Press, 1975.
- [2] U. FRISCH, P.-L. SULEM et M. NELKIN, *J. Fluid Mech.*, 87, 1978, p. 719.
- [3] G. I. TAYLOR et A. E. GREEN, *Proc. Roy. Soc.*, Londres, série A 158, 1937, p. 499.
- [4] D. GOTTLIEB et S. A. ORSZAG, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications (Soc. Industr. Appl. Math., Philadelphie, 1977)*.
- [5] S. A. ORSZAG (non publié, 1980).
- [6] M. BRACHET, D. MEIRON, S. A. ORSZAG, B. NICKEL, R. MORF et U. FRISCH, *Small Scale Structure of the Taylor-Green Vortex* (prépublication, M.I.T., 1982).
- [7] S. A. ORSZAG, *Les Houches*, 1973, R. BALIAN et J. L. PEUBE, éd., Gordon and Breach, 1977, p. 235.
- [8] A. N. KOLMOGOROV, *J. Fluid. Mech.*, 13, 1962, p. 82 (voir également *Colloque C.N.R.S.*, n° 108, de Mécanique de la Turbulence, Marseille, août 1961, publié aux éditions du C.N.R.S., 1962).
- [9] B. MANDELBROT, *Turbulence and Navier-Stokes Equation*, R. TEMAM, éd. (*Lecture Notes in Math.*, Springer, 565, 1976, p. 121).

Observatoire de Nice, B.P. n° 252, 06007 Nice Cedex  
et Appl. Math. Dept., M.I.T., Cambridge, États-Unis.