Le paysage dirigé

d'après D. Dauvergne, J. Ortmann et B. Virág

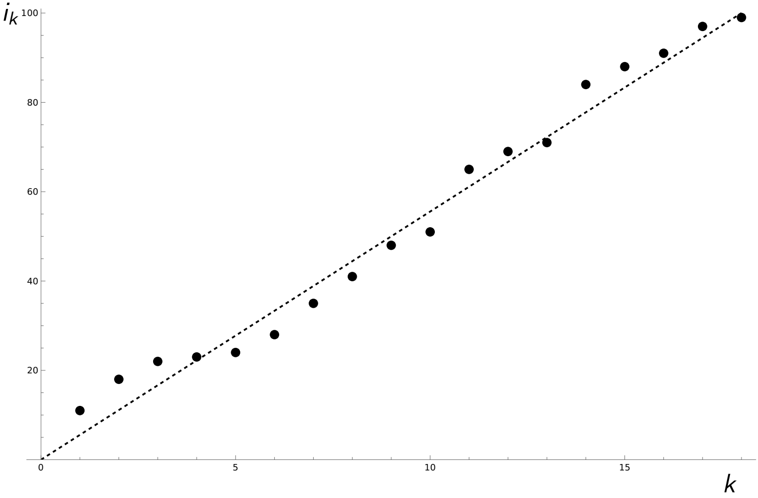
Séminaire Bourbaki

23 novembre 2024

Plus longue sous-suite croissante, $n = 100$

On tire une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ au hasard, et on considère les indices $i_1, \ldots, i_L$ de la plus longue sous-suite croissante :

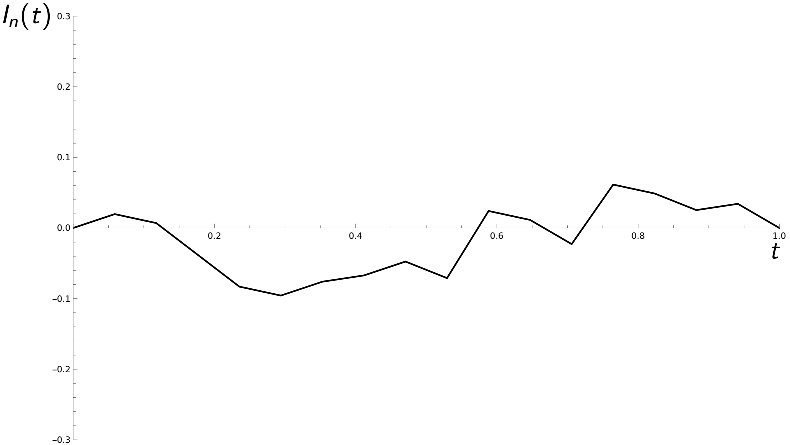
$$11, 18, 22, 23, 24, 28, 35, 41, 48, 51, 65, 69, 71, 84, 88, 91, 97, 99$$



Plus longue sous-suite croissante, $n = 100$

Pour étudier les fluctuations, on relie les points, et on considère la fonction

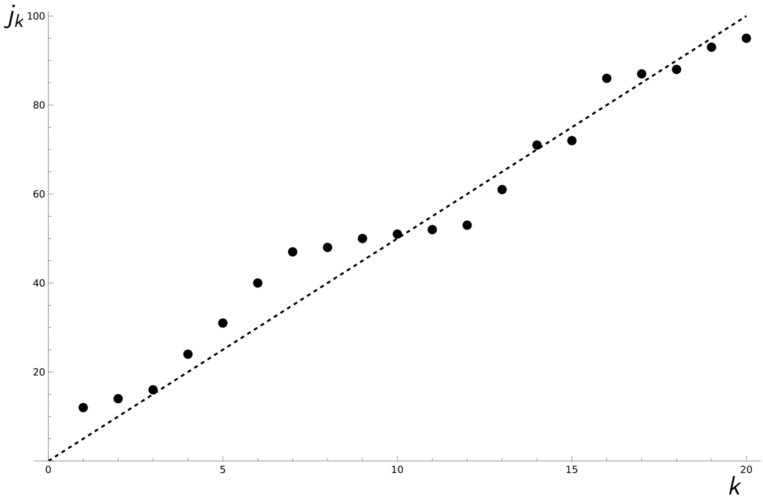
$$I_n(t) = \frac{i_{\lfloor 2t\sqrt{n} \rfloor} - tn}{n^?}, \quad t \in [0,1].$$



Comparaison avec des entiers tirés au hasard

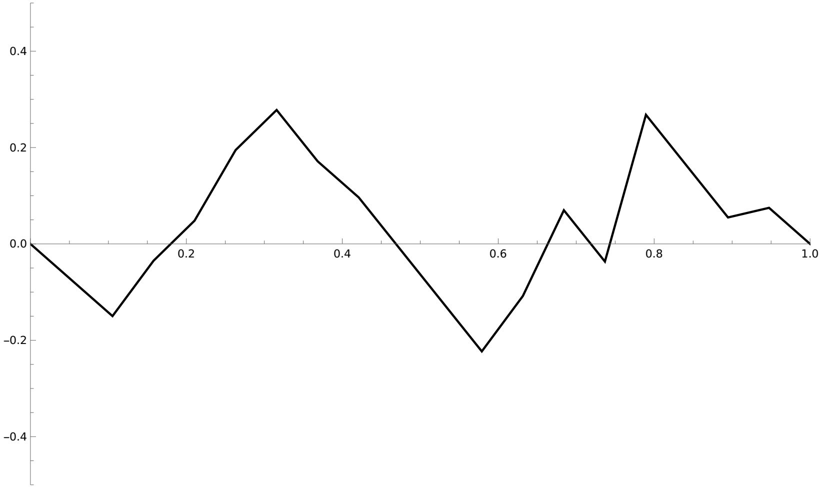
On tire un L-uplet d'entiers $j_1 < \cdots < j_L$ entre 1 et n au hasard, avec $L = 2\sqrt{n}$:

$$12, 14, 16, 24, 31, 40, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 61, 71, 72, 86, 87, 88, 93, 95$$

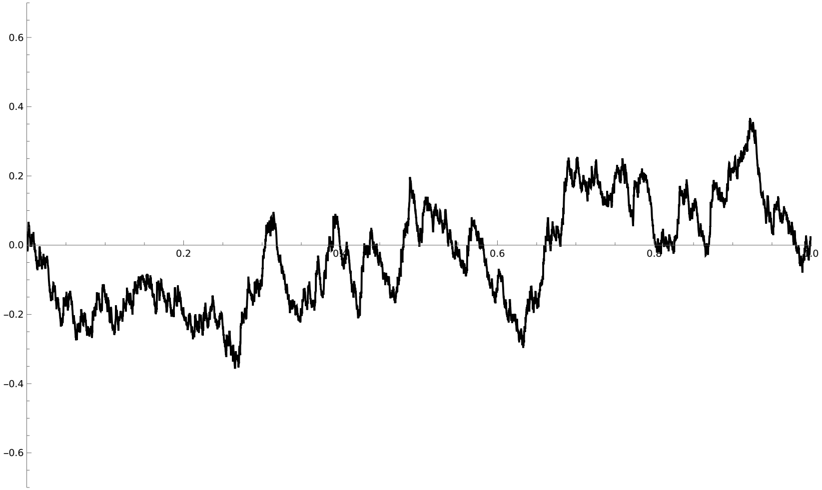


Entiers tirés au hasard, $n = 100$

$$J_n(t) = \frac{j_{\lfloor 2t\sqrt{n} \rfloor} - tn}{n^{3/4}}$$



Entiers tirés au hasard, $n = 10^7$

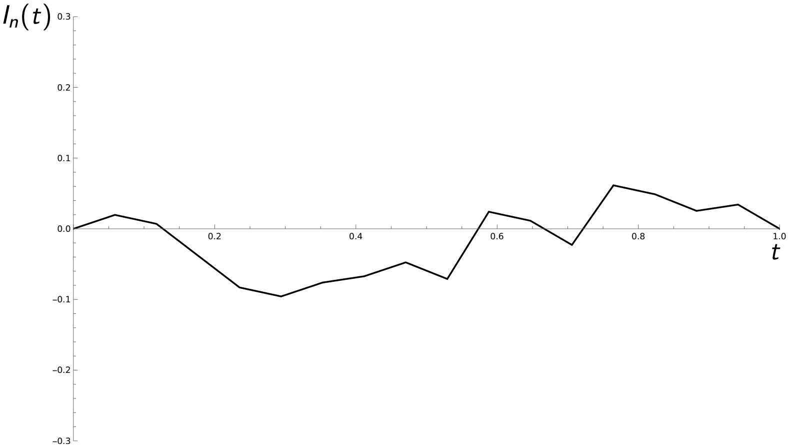


Par un théorème de Donsker (1952), on obtient un pont brownien.

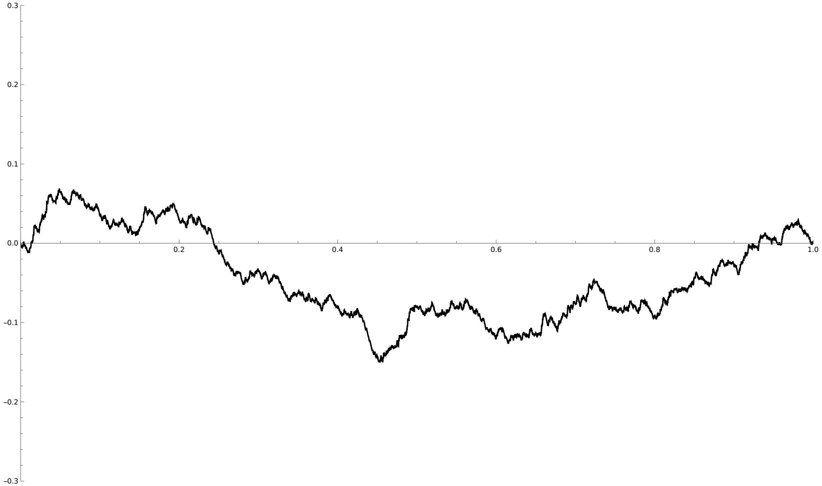
Plus longue sous-suite croissante, $n = 100$

Dans le cas de la plus longue sous-suite croissante, l'exposant est différent:

$$I_n(t) = \frac{i_{\lfloor 2t\sqrt{n} \rfloor} - tn}{\mathbf{n^{5/6}}}, t \in [0,1].$$

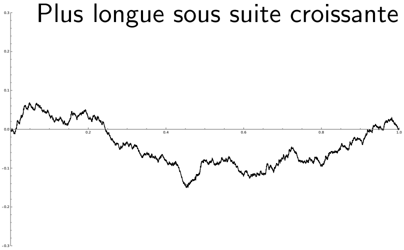


Plus longue sous-suite croissante, $n = 10^7$



Est-ce un processus stochastique connu ?

Comparaison



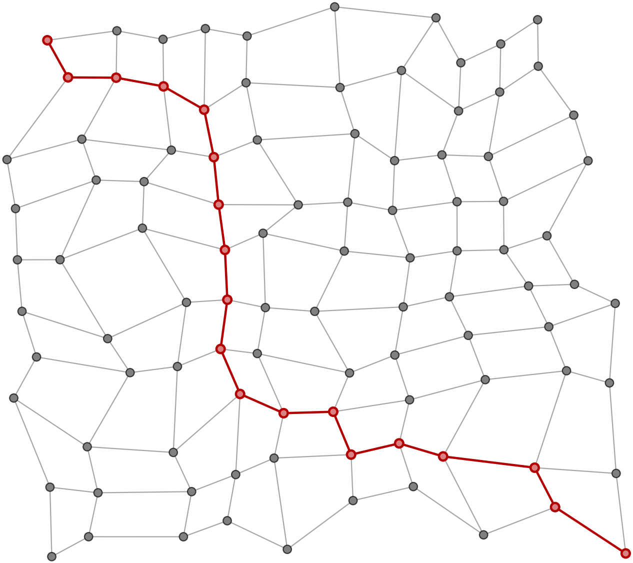
Remarque

A gauche, la trajectoire est plus régulière (moins erratique) que le pont brownien à droite.

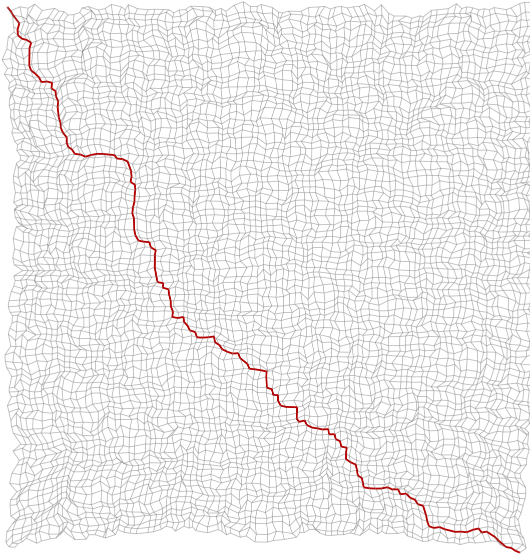
Dauvergne-Virág (2021) démontrent que la courbe de gauche est une géodésique du paysage dirigé.

Géodésique aléatoire dans le plan

Déformons le réseau $\mathbb{Z}^2$ de sorte que les arêtes aient des longueurs aléatoires et indépendantes.



À plus grande échelle



Encore une géodesique du paysage dirigé !