

Asymptotique de l'énergie libre du polymère log-gamma

Guillaume Barraquand

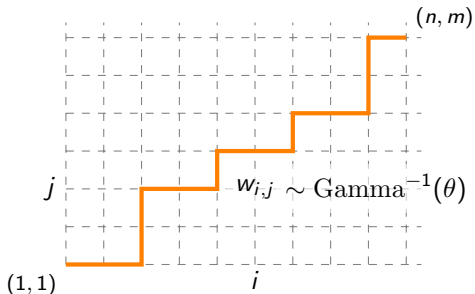
CNRS – ENS

Basé sur des travaux avec **Ivan Corwin** et **Evgeni Dimitrov** (maths) et
avec **Pierre Le Doussal** et **Alberto Rosso** (physique).

Le polymère dirigé log-gamma

Soient $w_{i,j}$ des variables i.i.d de loi inverse-Gamma de paramètre θ , i.e. avec densité

$$\frac{\mathbb{1}_{w \geq 0}}{\Gamma(\theta)} w^{-\theta-1} e^{-1/w}.$$



On définit la fonction de partition

$$Z(n, m) = \sum_{\pi: (1,1) \rightarrow (n,m)} \prod_{(i,j) \in \pi} w_{i,j},$$

où la somme porte sur tous les chemins de $(1, 1)$ à (n, m) en utilisant les pas $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Le modèle a été introduit par [Seppäläinen (2012)].

Théorème limite pour l'énergie libre

Théorème ([Borodin-Corwin-Remenik (2013),
Krishnan-Quastel (2018), B.-Corwin-Dimitrov (2020)])

Fixons $\theta > 0$ et $\delta \in (0, 1)$. Supposons qu'on laisse n, m tendre vers l'infini de telle sorte que $p_n = m/n \in (\delta, 1/\delta)$. Alors il existe des fonctions ϕ et σ telles que, pour

$$\mathcal{F}(n, m) = \frac{\log Z(n, m) - n \phi(p_n)}{\sigma(p_n) n^{1/3}},$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}(n, m) \leq y) = F_{\text{GUE}}(y),$$

où $F_{\text{GUE}}(y)$ est la fonction de répartition de la loi de Tracy-Widom.

Classe d'universalité et équation KPZ

- ▶ Le polymère log-gamma est un modèle de la classe d'universalité KPZ : un (vaste) ensemble de modèles dont le comportement à grande échelle est universel, décrit par les mêmes scalings et les mêmes lois limites [Kardar-Parisi-Zhang (1986)].
- ▶ Lorsque $\theta = \sqrt{2n}$ tend vers l'infini, et qu'on définit

$$\mathcal{Z}_n(t, x) = Z(tn + x\sqrt{n}, tn - x\sqrt{n}),$$

$\mathcal{Z}_n(t, x)$ converge [Alberts-Khanin-Quastel (2010)] vers la solution de l'EDP stochastique

$$\partial_t \mathcal{Z}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta \mathcal{Z}(t, x) + \mathcal{Z}(t, x) \xi(t, x),$$

où $\xi(t, x)$ est un bruit blanc espace temps et $\mathcal{Z}(0, x) = \delta_0(x)$. On dit alors que $h = \log \mathcal{Z}$ résoud l'équation KPZ

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \Delta h + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 + \xi.$$

Plan de l'exposé

- 1 Généralités sur la classe KPZ. Comment sont définies *en général* les fonctions non-universelles ϕ et σ ?
- 2 Intégrabilité du modèle log-gamma et idée de preuve du théorème limite pour l'énergie libre.
- 3 Que se passe-t-il si le paramètre θ des poids $w_{i,j}$ dépend de (i, j) ?
Transition BBP.
- 4 Conjectures physiques : En faisant varier le paramètre θ du polymère log gamma en fonction de t, x , on obtient des variantes de l'équation KPZ à coefficients non constants

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \Delta h + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 + \sqrt{c(t)} \xi + V(t, x).$$

KPZ scaling theory

- Pour tout modèle dans la classe KPZ décrit par une fonction de hauteur $H(T, X)$, on s'attend à ce qu'il existe des fonctions ϕ, σ, κ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$T = tn, \quad X = ptn + x\kappa(p)n^{2/3} \quad (\text{de sorte que } X/T \approx p),$$

le processus

$$(t, x) \mapsto \frac{H(T, X) - T\phi\left(\frac{X}{T}\right)}{\sigma(p)n^{1/3}}$$

converge quand n tend vers l'infini vers un processus espace-temps universel $h(t, x)$ appelé le point fixe KPZ.

- Les physiciens [Krug-Meakin-Halpin-Healy (1992)] ont une théorie générale prédisant l'expression des fonctions ϕ, σ, κ .
- L'ingrédient essentiel de la théorie sont des mesures stationnaires du gradient $\nabla_x H$ invariante par translation.

Lemme de Seppäläinen

$$Z(n, m) = w_{n,m} (Z(n-1, m) + Z(n, m-1))$$

Lemme ([Seppäläinen (2012)])

Soient $U \sim \text{Gamma}^{-1}(\theta - \alpha)$, $V \sim \text{Gamma}^{-1}(\alpha)$, $w \sim \text{Gamma}^{-1}(\theta)$
des variables indépendantes, alors

$$U' = w \left(1 + \frac{U}{V}\right), \quad V' = w \left(1 + \frac{V}{U}\right), \quad w' = \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)^{-1},$$

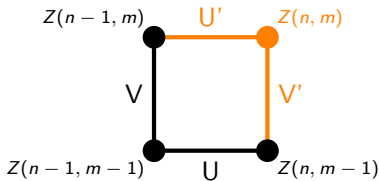
ont la même loi que (U, V, w) .

Les équations ci dessus décrivent
l'évolution de

$$U(n, m) = \frac{Z(n, m)}{Z(n-1, m)}$$

et

$$V(n, m) = \frac{Z(n, m)}{Z(n, m-1)}$$



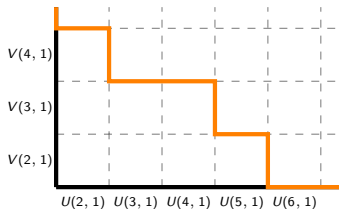
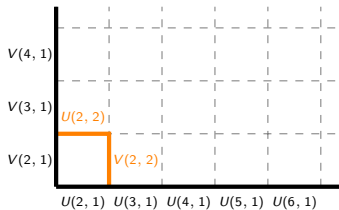
Supposons que sur la bordure noire,

- ▶ tous les ratios U sont i.i.d. de loi $\text{Gamma}^{-1}(\theta - \alpha)$
- ▶ et tous les ratios V sont i.i.d de loi $\text{Gamma}^{-1}(\alpha)$.

En itérant le Lemme de Seppäläinen, tous les ratios auront la même distribution et seront indépendants le long de n'importe quel chemin orange.

En particulier, sur chaque arête du réseau,

$$U \sim \text{Gamma}^{-1}(\theta - \alpha), V \sim \text{Gamma}^{-1}(\alpha).$$



Mesures stationnaires du Gradient

- ▶ En général les mesures stationnaires sont paramétrées par une densité ϱ définie comme $\mathbb{E}[\nabla_x H]$ sous la mesure stationnaire.
- ▶ Pour le log-gamma, la fonction de hauteur est

$$H(n, m) = \log Z(n, m),$$

où n joue le rôle du temps et m joue le rôle de l'espace. L'analogie du gradient $\nabla_x H$ est

$$\log V(n, m) = H(n, m) - H(n, m - 1).$$

Les mesures stationnaires sont paramétrées par un réel $\alpha \in (0, \theta)$ et telles que $\mathbb{E}[\log V(n, m)] = -\Psi(\alpha)$ où Ψ est la fonction digamma $\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$.

- ▶ Le paramètre de densité ϱ est relié à α par

$$\varrho = -\Psi(\alpha).$$

Loi des grand nombres ϕ

- ▶ On définit le flux $j(\varrho)$ décrivant l'incrément moyen de H par unité de temps, sous la mesure stationnaire à densité ϱ . Pour le modèle log-gamma, il s'agit de $\log U$, et donc

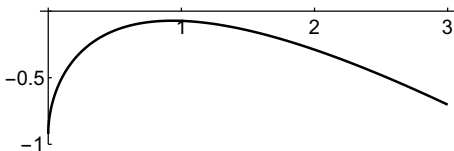
$$j(\varrho) = -\Psi(\theta - \alpha).$$

- ▶ La loi des grands nombres est alors donnée en général par une transformée de Legendre (solution d'une EDP de conservation)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(n, pn)}{n} = \inf_{\varrho} \{p\varrho + j(\varrho)\} = \inf_{\alpha} \{-p\Psi(\alpha) - \Psi(\theta - \alpha)\}.$$

Le minimum est atteint quand $p = g(\alpha) = \frac{\Psi'(\theta - \alpha)}{\Psi'(\alpha)}$. On définit

$$\phi(p) = -p\Psi(g^{-1}(p)) - \Psi(\theta - g^{-1}(p)).$$



Théorème limite pour l'énergie libre

Théorème ([Borodin-Corwin-Remenik (2013),
Krishnan-Quastel (2018), B.-Corwin-Dimitrov (2020)])

Fixons $\theta > 0$ et $\delta \in (0, 1)$. Supposons qu'on laisse n, m tendre vers l'infini de telle sorte que $p_n = m/n \in (\delta, 1/\delta)$. Alors il existe des fonctions ϕ et σ telles que, pour

$$\mathcal{F}(n, m) = \frac{\log Z(n, m) - n \phi(p_n)}{\sigma(p_n) n^{1/3}},$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}(n, m) \leq y) = F_{\text{GUE}}(y),$$

où $F_{\text{GUE}}(y)$ est la fonction de répartition de la loi de Tracy-Widom.

Coefficients κ et σ

En général, les coefficients σ (taille des fluctuations) et κ (échelle spatiale), dépendent de coefficients $\lambda(\varrho)$ et $A(\varrho)$ et tels que

$$\sigma = \left(\frac{1}{2} \lambda(\varrho) A(\varrho)^2 \right)^{1/3}, \quad \kappa = (2\lambda(\varrho)^2 A(\varrho))^{2/3}$$

- ▶ $\lambda(\varrho) = j''(\varrho)$, supposé non nul.
- ▶ $A(\varrho) = \sum_y \text{Cov}(\nabla_x H(y, 0), \nabla_x H(0, 0))$ covariance intégrée du gradient.

Pour le modèle log-gamma, il est plus pratique de tout paramétrer par l'angle p , et on a

- ▶ $\lambda(p) = 1/\phi''(p)$. (Par transformée de Legendre)
 - ▶ $A(p) = \Psi'(g^{-1}(p))$. (La variance d'une variable $\log \Gamma(\alpha)$ est $\Psi'(\alpha)$)
- d'où l'on déduit des expressions pour $\kappa(p)$ et $\sigma(p)$.

Une remarque

Pour le modèle log gamma, on peut prouver [B.-Corwin-Dimitrov (2021)] que la suite de fonctions

$$x \mapsto \frac{H(n, pn + x\kappa(p)n^{2/3}) - n\phi(p + x\kappa(p)n^{-1/3})}{\sigma(p)n^{1/3}}$$

est tendue dans $C([-T, T])$, et toute limite le long d'une sous suite, notée $\mathcal{A}(x)$, est telle que

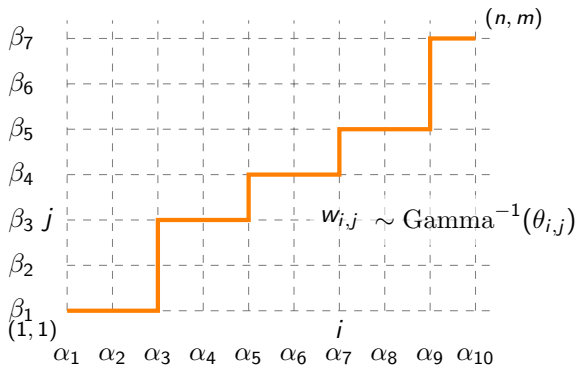
- ▶ $\mathcal{A}(x)$ a la loi de Tracy-Widom en tout point.
- ▶ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}(x) - x^2)$ est absolument continue par rapport au pont Brownien.

On s'attend à ce que ces deux propriétés caractérisent uniquement le processus Airy_2 (basé sur des conjectures de [Corwin-Hammond 2011]).

Le polymère dirigé log-gamma inhomogène

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, et β_1, β_2, \dots , des paramètres réels tels que

$$\theta_{i,j} = \alpha_i + \beta_j > 0.$$



$$Z(n, m) = \sum_{\pi} \prod_{(i,j) \in \pi} w_{i,j},$$

Fonctions de Whittaker associées à $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit une fonction symétrique en les paramètres complexes a_1, \dots, a_n par

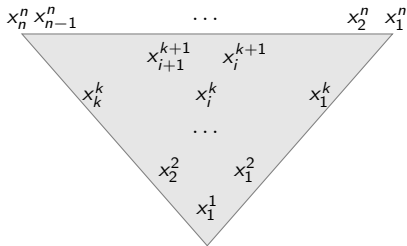
$$\psi_a(x) = \int_{\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^n e^{ia_k(|x^k| - |x^{k-1}|)} \underbrace{\prod_{1 \leq i < k \leq n} g(x_i^{k+1} - x_i^k) g(x_{i+1}^{k+1} - x_i^k)}_{\approx \text{contrainte d'entrelacement}} dx_i^k.$$

où $x^n = x \in \mathbb{R}^n$, les x_i^k forment un tableau triangulaire de variables d'intégration,

$$g(x) = e^{-e^{-x}} \approx \mathbb{1}_{x>0},$$

et

$$|x| = \sum_i x_i,$$



- ▶ Les fonctions de Whittaker $\psi_a(x)$ sont semblables aux polynômes symétriques de Schur.
- ▶ Pour $n = 1$, $\psi_a(x) = e^{iax}$.

Transformée de Laplace

Théorème ([Corwin-O'Connell-Seppäläinen-Zygouras (2014)])

Pour le polymère log-gamma avec paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β_1, \dots, β_m , pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{E} \left[e^{-uZ(n,m)} \right] = \frac{1}{\Pi(\alpha, \beta)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ue^{x_1}} \underbrace{\psi_{i\alpha}(x) \psi_{i\beta}(x) e^{-e^{-x_n}}}_{\text{Mesure de Whittaker}} dx,$$

où

$$\Pi(\alpha, \beta) = \prod_{i,j} \Gamma(\alpha_i + \beta_j).$$

En particulier, la loi de $Z(n, m)$ est symétrique en les α_i et en les β_j .

Preuve basée sur l'algorithme RSK géométrique, qui transforme les $w_{i,j}$ de loi inverse Gamma en les x_i à densité

$$\psi_{i\alpha}(x) \psi_{i\beta}(x) e^{-e^{-x_n}} dx,$$

appelée mesure de Whittaker.

Parenthèse

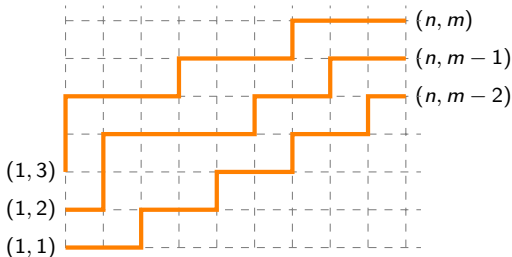
Plus généralement, Si $x \in \mathbb{R}^n$ suit la mesure de Whittaker

$$\psi_{i\alpha}(x)\psi_{i\beta}(x)e^{-e^{-x_n}} dx,$$

alors pour tout $1 \leq k \leq n$, La variable aléatoire $e^{x_1+\dots+x_k}$ a la même loi que

$$Z_k(n, m) = \sum_{\pi_1 \sqcup \dots \sqcup \pi_k} \prod_{\ell=1}^k \prod_{i,j \in \pi_\ell} w_{i,j}$$

où la somme est prise sur des chemins non intersectants π_1, \dots, π_k .



Transformée de “Fourier”

- ▶ Les fonctions de Whittaker $\psi_a(x)$ forment une base bi-orthogonale de fonctions propres de

$$-\Delta + 2 \sum e^{x_{i+1}-x_i}.$$

- ▶ La transformée de Whittaker

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi_\xi(x) dx,$$

réalise un isomorphisme de

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n, dx) &\rightarrow \mathbb{L}_{\text{sym}}^2(\mathbb{R}^n, s_n(d\xi)) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

où la mesure de Sklyanin $s_n(d\xi) = \frac{d\xi}{(2i\pi)^n n!} \prod_{i \neq j} \frac{1}{\Gamma(i\xi_i - i\xi_j)}$.

- ▶ Par ailleurs, pour $f(x) = \psi_{i\beta}(x) e^{-e^{-x_n}}$, on sait calculer [Bump (1989), Stade (2001)]

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{i,j} \Gamma(i\xi_i + \beta_j).$$

En appliquant le théorème de Plancherel $(\int f \bar{g} = \int \hat{f} \widehat{\bar{g}})$ à

$$\mathbb{E} \left[e^{-uZ(n,m)} \right] = \frac{1}{\Pi(\alpha, \beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-ue^{x_1}} \psi_{i\alpha}(x)}_{f(x)} \underbrace{\psi_{i\beta}(x) e^{-e^{-x_n}}}_{g(x)} dx,$$

on obtient :

Théorème ([Corwin-O'Connell-Seppäläinen-Zygouras (2014)])

Pour $u > 0$,

$$\mathbb{E} \left[e^{-uZ(n,m)} \right] = \frac{1}{\Pi(\alpha, \beta)} \int_{\mathbb{R}^n} u^{\sum \alpha_i - i\xi_i} \prod_{1 \leq i, j \leq n} \Gamma(i\xi_i - \alpha_j) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \Gamma(i\xi_i + \beta_j) s_n(d\xi)$$

- + La formule ne fait intervenir que des fonctions Gamma, dont l'asymptotique est bien connue.
- Il y a n variables d'intégration et on veut faire tendre $n \rightarrow \infty$.

La formule précédente se réécrit comme une série d'intégrales :

Théorème ([Borodin-Corwin-Remenik 2013, Borodin-Corwin-Ferrari-Vető 2015, B.-Corwin-Dimitrov 2020])

$$\mathbb{E} \left[e^{-uZ(n,m)} \right] = \sum_{\ell=0}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{dv_1}{2i\pi} \cdots \int_{\mathcal{C}} \frac{dv_\ell}{2i\pi} \det (K(v_i, v_j))_{i,j=1}^{\ell}$$

où

$$K(v, v') = \int_{\mathcal{D}} \frac{dw}{2i\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi(v-w))} \frac{F(w)}{F(v)} \frac{1}{w-v'}$$

et

$$F(w) = u^{-w} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(w - \alpha_i)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta_j - w)},$$

et les contours d'intégrations \mathcal{C} et \mathcal{D} peuvent être choisis de différentes façons plus ou moins pratiques.

Cette écriture a été d'abord devinée, à l'aide de formules similaires intervenant dans l'étude des mesures de Macdonald [Borodin-Corwin 2011].

Analyse asymptotique

Lorsque $u = e^{n\phi(\rho) + n^{1/3}\sigma(\rho)y}$,

$$\mathbb{E} \left[e^{-uZ(n,m)} \right] \sim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}(n, m) \leq y).$$

D'autre part, l'analyse asymptotique de cette série d'intégrales par méthode de Laplace mène à

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \int_y^{\infty} dx_1 \dots \int_y^{\infty} dx_{\ell} \det (K_{Ai}(x_i, x_j))_{i,j=1}^{\ell} \\ = \det(I - K_{Ai})_{\mathbb{L}^2(y, \infty)} = F_{\text{GUE}}(y) \end{aligned}$$

où

$$K_{Ai}(x, y) = \int_0^{+\infty} Ai(x+r)Ai(y+r)dr.$$

Transition BBP

Supposons que

$$\alpha_1 < \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \theta, \quad \beta \equiv 0.$$

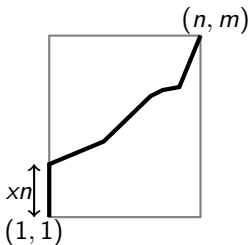
Sur la première colonne, les poids sont plus grands, de sorte que les chemins qui contribuent significativement à la fonction de partition restent typiquement plus longtemps sur la première colonne.

La contribution à l'énergie libre des chemins qui quittent la première colonne autour de la position $(1, xn)$ est

$$-x\Psi(\alpha_1) - \phi(p - x),$$

de sorte qu'on s'attend à ce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Z(n, pn)}{n} = \max_{x \in (0, p)} \{-x\Psi(\alpha_1) - \phi(p - x)\}.$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Z(n, pn)}{n} = \max_{x \in (0, p)} \{-x\Psi(\alpha_1) - \phi(p - x)\}.$$

- ▶ Pour $\alpha_1 > g^{-1}(\theta)$ le maximum est atteint pour $x = 0$, c'est à dire que les chemins ne vont typiquement pas passer plus de temps le long de la première colonne.
- ▶ Pour $\alpha_1 < g^{-1}(\theta)$ le maximum est atteint pour $x > 0$, les fluctuations de $\log Z(n, m)$ vont être déterminées par les poids de la première colonne, et Gaussiennes.

Théorème ([B.-Corwin-Dimitrov 2020])

Pour $\alpha_1 = g^{-1}(\theta) + x_1 \sigma(p)^{-1} n^{-1/3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}(n, m) < s) = F_{\text{BBP}, x_1, \emptyset}(s)$$

Plus généralement, on peut perturber les r_1 premières colonnes et les r_2 premières rangées dépendant de paramètres x_1, \dots, x_{r_1} et y_1, \dots, y_{r_2} , et on obtient à la limite une perturbation de la loi de Tracy-Widom $F_{\text{BBP}, \vec{x}, \vec{y}}(s)$ [Baik-Ben Arous-Péché 2005] et [Borodin-Péché, 2008] dans un contexte de matrices aléatoires.

Motivation : convergence vers le point fixe KPZ

Il existe deux définitions équivalentes du point fixe KPZ

- 1 $h(t, x)$ est un processus de Markov sur les fonctions semi-continues supérieurement ayant des transition explicites [Quastel-Matetski-Remenik 2018].
- 2 A l'aide d'un problème variationnel [Corwin-Quastel-Remenik 2015] utilisant le drap d'Airy $\mathcal{A}(x, y)$, construit rigoureusement par [Dauvergne-Ortmann-Virág 2018].

Le drap d'Airy est un processus tel que $\mathcal{A}(x, y)$ a la loi de Tracy-Widom pour tout x, y , et décrit l'asymptotique de l'énergie libre de polymères dirigés lorsqu'on fait varier simultanément les points de départ et d'arrivée.

La construction du drap d'Airy est compliquée, et on ne sait pas décrire explicitement la loi jointe de

$$\mathcal{A}(x_1, y_1), \dots, \mathcal{A}(x_n, y_n)$$

sauf dans des cas particuliers [Borodin-Gorin-Wheeler 2019].

Transition BBP et le drap d'Airy...

- ▶ Lorsqu'on perturbe un nombre fini de rangées/colonnes dans le polymère log-gamma, la loi limite de $\mathcal{F}(n, m)$ doit être la même que

$$\max_{x,y} \{f(x) - x^2 + \mathcal{A}(x, y) + g(y) - y^2\},$$

où $\mathcal{A}(x, y)$ est le drap d'Airy, et f et g sont des fonctions aléatoires dépendant de r_1, r_2, \vec{x} et \vec{y} .

- ▶ D'après une récente caractérisation du drap d'Airy [Virág 2020], les fonctions f et g correspondant aux transitions de type BBP sont en fait *suffisantes* pour caractériser la loi du drap d'Airy.
- ▶ Conclusion : La convergence vers $F_{\text{BBP}, \vec{x}, \vec{y}}(s)$ permettrait de prouver la convergence vers le drap d'Airy, et le point fixe KPZ, pour le polymère log-gamma.

Equation KPZ à coefficients variables

Revenons au polymère log gamma avec poids $w_{i,j} \sim \text{Gamma}^{-1}(\alpha_i + \beta_j)$.

Conjecture ([B.-Le Doussal-Rosso 2019])

Soit $c(t)$ une fonction bornée, strictement positive, et supposons que

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{n}}{c(i/n)}, \quad \beta_j = \frac{\sqrt{n}}{c(j/n)}.$$

Alors,

$$\mathcal{Z}_n(t, x) = \text{cst}_n Z(tn + x\sqrt{n}, tn - x\sqrt{n})$$

converge vers la solution de

$$\partial_t \mathcal{Z} = \frac{1}{2} \Delta \mathcal{Z}(t, x) + \left(\sqrt{c(t)} \xi(t, x) + V(t, x) \right) \mathcal{Z}(t, x),$$

où ξ est un bruit blanc espace temps, et $V(t, x) = \frac{x^2}{2} \frac{c(t)c''(t) - 2c'(t)^2}{2c(t)^2}$.

Remarque : Pour $c(t) = \frac{t_0}{t+t_0}$, $V(t, x) = 0$.

Par changement de variable $y = c(t)x$, $\tau = \int_0^t c^2(s)ds$, on se ramène à

$$\partial_\tau \mathcal{Z}(\tau, y) = \frac{1}{2} \partial_{yy} \mathcal{Z}(\tau, y) + \eta(\tau, y) \mathcal{Z}(\tau, y),$$

où η est un bruit blanc espace-temps.

Conjecture ([B.-Le Doussal-Rosso 2019])

Posons $c(t) = \left(\frac{t_0}{t+t_0}\right)^a$ et $V(t, x) = 0$, i.e. on considère

$$\partial_t \mathcal{Z} = \frac{1}{2} \partial_{xx} \mathcal{Z}(t, x) + \sqrt{c(t)} \xi(t, x) \mathcal{Z}(t, x).$$

- ▶ Pour $a < 1/2$, la loi en temps long de $\log \mathcal{Z}(t, x)$ est distribuée selon la loi de Tracy-Widom.
- ▶ Pour $a > 1/2$, la loi en temps long de $\log \mathcal{Z}(t, x)$ est non universelle.

Certaines transition en fonction de la décroissance du bruit est aussi observée en percolation de dernier passage [Johansson 2008] et peut être montré pour le polymère log-gamma [B.-Le Doussal-Rosso 2019].

Quelques perspectives

Variantes du modèle log-gamma

Le modèle log-gamma dans une moitié de quadrant (relié à KPZ sur \mathbb{R}_+) est aussi exactement soluble [O'Connell-Seppäläinen-Zygouras (2012), B.-Borodin-Corwin (2018)] ainsi que d'autres variantes [Bisi-Zygouras (2017), Bisi-O'Connell-Zygouras (2020)]. On connaît des formules intégrales mais on ne sait pas en étudier l'asymptotique.

Suite du travail avec Ivan Corwin et Evgeni Dimitrov

Le but est d'étudier

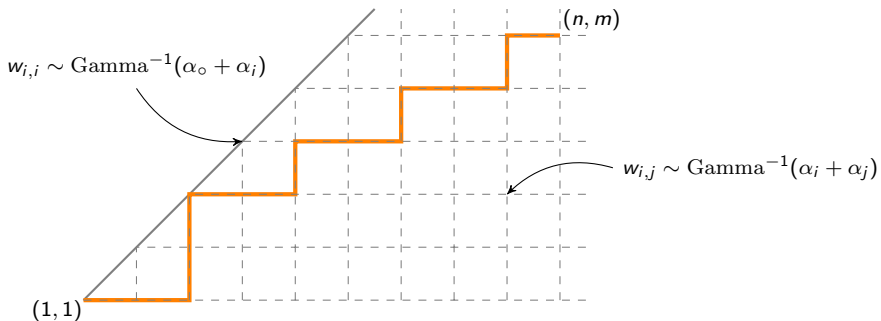
$$\max_{S, T} Z_{S \rightarrow T}$$

où S et T sont les points de départ des chemins dans une boîte de taille $n \times n$, et $Z_{S \rightarrow T}$ la fonction de partition associée à ces chemins. Cette quantité est reliée par [Kotowski-Virág (2019)] à un opérateur de Schrödinger aléatoire.

Merci

Half-space log-gamma polymer

Let $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ and α_o be positive parameters.



The partition function of the half-quadrant inverse-gamma polymer is

$$Z(n, m) = \sum_{\pi: (1,1) \rightarrow (n,m)} \prod_{(i,j) \in \pi} w_{i,j}$$

where π is restricted to the lower half of the quadrant.

Laplace transform formula

- ▶ Using geometric RSK, [O'Connell-Seppäläinen-Zygouras, 2012] related the distribution of the partition function to Whittaker functions. A formal application of the Plancherel theorem for Whittaker functions yields integral formulas.
- ▶ Using (half-space) Macdonald processes [B-Borodin-Corwin 2018], these formulas can be proved and generalized.

Theorem ([B-Borodin-Corwin (2018)])

For $m \geq n$ and any $u > 0$, we have

$$\mathbb{E} \left[e^{-uZ(m,n)} \right] = \frac{1}{n!} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{dz_1}{2i\pi} \cdots \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{dz_n}{2i\pi} \prod_{i \neq j} \frac{1}{\Gamma(z_i - z_j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\Gamma(z_i + z_j)}{\Gamma(\alpha_i + \alpha_j)} \prod_{i,j=1}^n \Gamma(z_i - \alpha_j) \prod_{i=1}^n \left(u^{\alpha_i - z_i} \frac{\Gamma(\alpha_o + z_i)}{\Gamma(\alpha_o + \alpha_i)} \prod_{j=n+1}^m \frac{\Gamma(\alpha_j + z_i)}{\Gamma(\alpha_j + \alpha_i)} \right)$$

where r is such that $r + \alpha_o > 0$ and $r > \alpha_i$ for all $1 \leq i \leq n$.