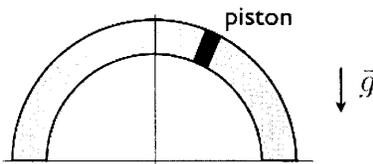


Oscillations d'un piston dans un tube hemi-circulaire

On considère un tube de section circulaire s , coudé en demi cercle de rayon a ($a \gg \sqrt{s}$), rempli d'un gaz parfait. Le tube est fermé aux deux extrémités. Un piston de masse m et d'épaisseur négligeable devant a peut coulisser sans frottement à l'intérieur du tube. La température du gaz est maintenue constante à T . De chaque côté du piston on a la même quantité n de gaz.



- En fonction des différentes données, déterminer la ou les positions d'équilibre du piston. En particulier, on identifiera un régime de basse température et un régime de haute température et on étudiera plus en détail la transition entre les deux régimes.
- Déterminer la fréquence des petites oscillations autour de ces positions d'équilibre. Discuter la validité de l'hypothèse d'une température constante. Par quoi peut elle être remplacée et comment cela changerait les fréquences d'oscillation?

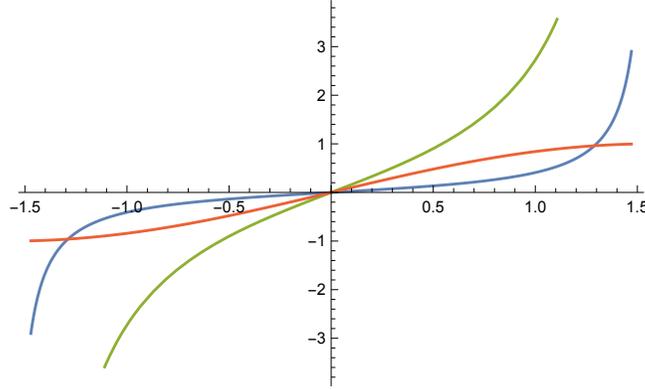
On repère la position du piston par l'angle ϕ compté depuis le haut du tube ($\phi = 0$ est le point symétrique). Les pressions de chaque côté du piston sont alors $p_g = \frac{nRT}{V_g} = \frac{nRT}{as(\frac{\pi}{2}+\phi)}$ et $p_d = \frac{nRT}{V_d} = \frac{nRT}{as(\frac{\pi}{2}-\phi)}$. Le PFD du piston s'écrit alors

$$ma\ddot{\phi} = mg \sin \phi + \frac{nRT}{a} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \phi} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \phi} \right). \quad (1)$$

a) Les positions d'équilibre sont données par $\ddot{\phi} = 0$, soit

$$\sin \phi = C \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \phi} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \phi} \right) \equiv f(\phi) \quad , \quad C = \frac{nRT}{mga} \quad (2)$$

On peut essayer une résolution graphique. La courbe orange est $\sin \phi$, la verte est $f(\phi)$ pour $C = 2$ et la bleue est $f(\phi)$ pour $C = 0.3$. On voit que pour C grand (haute température) il n'y



a qu'une solution $\phi = \phi_0 = 0$, mais que pour C petit (basse température) on a deux solutions $\phi = \pm\phi_1$ avec $f_1 \neq 0$. Plus précisément, tant que $C > C_*$ il n'y aura que la solution $\phi_0 = 0$, mais pour $C < C_*$ on aura en plus les deux solutions $\pm f_1$ avec f_1 qui augmente au fur et à mesure que $C_* - C$ diminue. La transition de une à trois solutions a lieu lorsque la dérivée en $\phi = 0$ de $f(\phi)$ est égale à la dérivée de $\sin \phi$, c'est à dire égal à 1. On a

$$f'(0) = \frac{8C}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad C_* = \frac{\pi^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad T_* = \frac{\pi^2 m g a}{8 n R}. \quad (3)$$

Physiquement, dans la phase haute température $T > T_*$, les pressions sont plus importantes que le poids et le piston est maintenu en haut. Dans la phase basse température $T < T_*$, le poids l'emporte et le piston se stabilisera à droite ou à gauche quand le gaz sera suffisamment comprimé pour que la pression égale de nouveau le poids. C'est donc ϕ_0 qui devient instable et les solutions $\pm\phi_1$ stables.

Clairement, pour $C \rightarrow 0$ on a $\phi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Pour C légèrement inférieure à C_* on est dans la région de la "transition de phase" où ϕ_1 est petit et on peut développer $f(\phi)$ autour de $\phi = 0$. Comme $\sin \phi$, cette fonction est impaire et il faut pousser le DL jusqu'à l'ordre 3:

$f(\phi) = C\left(\frac{8}{\pi^2}\phi + \frac{32}{\pi^4}\phi^3\right) + \mathcal{O}(\phi^5) = \frac{C}{C_*}\phi + \frac{C}{2C_*^2}\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^5)$. L'équation (2) s'écrit alors ($\sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{6} + \mathcal{O}(\phi^5)$)

$$\phi\left[(C_* - C) - \left(\frac{C_*}{6} + \frac{C}{2C_*}\right)\phi^2\right] + \mathcal{O}(\phi^5) = 0 . \quad (4)$$

On voit de nouveau que pour $C > C_*$, seul $\phi = 0$ est solution, alors que pour $C < C_*$ on a 3 solutions. Dans ce dernier cas, les solutions stables seront données par

$$\pm\phi_1 = \pm\sqrt{\frac{6C_*(C_* - C)}{C_*^2 + 3C}} \simeq \pm\sqrt{\frac{3}{2C_*}}(C_* - C)^{1/2} \simeq \pm\sqrt{\frac{3}{2T_*}}(T_* - T)^{1/2} . \quad (5)$$

(Remarque : On retrouve l'exposant critique 1/2 caractéristique d'une transition de phase avec brisure spontanée d'une symétrie \mathbf{Z}_2 .)

b) Le PDF (1) peut être réécrit comme

$$\frac{a}{g}\ddot{\phi} = \sin \phi - f(\phi) . \quad (6)$$

Dans la phase de haute température il convient de développer autour de la solution stable $\phi = \phi_0 = 0$ et on trouve

$$\frac{a}{g}\ddot{\phi} = \phi - \frac{C}{C_*}\phi = \frac{C_* - C}{C_*}\phi = \frac{T_* - T}{T_*}\phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 , \quad \omega^2 = \frac{g}{a}\frac{T - T_*}{T_*} . \quad (7)$$

Pour $T \rightarrow T_*$ on a $\omega^2 \rightarrow 0$ et lorsqu'on passe dans la phase basse température on aurait $\omega^2 < 0$ ce qui est le signe que $\phi = 0$ est devenu instable.

Dans la phase de basse température il faut développer autour de ϕ_1 (ou $-\phi_1$). Soit $\phi = \phi_1 + \delta\phi$ et rappelons que $\sin \phi_1 - f(\phi_1) = 0$. On trouve alors ($\cos \delta\phi \simeq 1$ et $\sin \delta\phi \simeq \delta\phi$)

$$\frac{a}{g}\ddot{\delta\phi} = [\cos \phi_1 - f'(\phi_1)]\delta\phi \Rightarrow \ddot{\delta\phi} + \omega^2\delta\phi = 0 , \quad \omega^2 = \frac{g}{a}[\cos \phi_1 - f'(\phi_1)] . \quad (8)$$

Pour T proche de T_* , mais toujours inférieur à T_* , on sait que ϕ_1 est petit (cf eq (5)) et on peut approximer

$$\omega^2 \simeq \frac{g}{a}(1 - f'(0)) = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{C}{C_*}\right) = \frac{g}{a}\frac{T_* - T}{T_*} . \quad (9)$$

Proche de la température critique T_* la fréquence des oscillations est donc faible et l'hypothèse d'une température maintenue constante est réaliste. Par contre lorsque la fréquence est plus élevée (amplitude fois fréquence n'est plus petit devant la vitesse du son dans le gaz) une hypothèse adiabatique paraît plus raisonnable et il faudrait alors remplacer $pV = nRT$ par $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$. Le PFD deviendrait alors

$$ma\ddot{\phi} = mg \sin \phi + p_0s\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)^\gamma}\right) . \quad (10)$$

ou

$$\frac{a}{g}\ddot{\phi} = \sin \phi - \tilde{f}(\phi) \quad , \quad \tilde{f}(\phi) = \frac{p_0s}{mg}\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)^\gamma}\right) . \quad (11)$$

Le reste de l'analyse est similaire avec \tilde{f} à la place de f .