

Singularités et intégration des fonctions analytiques

Guilhem SEMERJIAN & Francesco ZAMPONI

1 Singularités, points de branchement, coupures

1. Déterminer les points de branchement et un choix possible de coupure des fonctions

a) $f(z) = (z + a)^{1/2}$ où $a \in \mathbb{C}$

b) $f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$

c) $f(z) = z^{1/3}$

d) $f(z) = (z^4 - 81)^{1/2}$

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$\sin z = i.$$

3. Déterminer, en tant que fonction multivaluée, la réciproque de la fonction

$$f(z) = \cos z$$

et étudier ses singularités.

4. La fonction multivaluée $f(z) = \log z$ est définie comme réciproque de l'exponentielle.

a) Montrer que toute détermination du logarithme a pour dérivée $\frac{1}{z}$.

b) On considère maintenant la *détermination principale* du logarithme : $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$

$$\text{Log}(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$$

où $z = |z|e^{i\theta}$ et $\arg(z) = \theta$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, montrer que Log est holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$.

2 Quelques intégrales sur \mathbb{C}

1. En notant γ l'arc de cercle joignant 3 à $i\sqrt{3}$ et d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 4$, orienté dans le sens trigonométrique, calculer

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}.$$

2. Considérons, dans \mathbb{C} , les segments $\gamma_1 = [-i, 5i]$, $\gamma_2 = [-i, 2 + 5i]$, $\gamma_3 = [2 + 5i, 5i]$ (où le sens de parcours va du premier point du segment vers le second). Définissons maintenant la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(x + iy) = x^2 - 2iy$. Calculer

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \text{ et } \int_{\gamma_2 \cup \gamma_3} f(z) dz.$$

Discuter le résultat.

3. Calculer les intégrales suivantes :
 - a) $I_a = \int_{\gamma} (z+1)^2 dz$; γ est le triangle de sommets $[-1, 1, i]$ orienté dans le sens anti-horaire (trigonométrique).
 - b) $I_b = \int_{\gamma} z \bar{z} dz$; γ est le cercle de centre $z = 0$ et rayon $R = 5$, orienté dans le sens horaire.
 - c) $I_c = \int_{\gamma} e^{\bar{z}} dz$; γ est le carré de sommets $[0, 1, 1+i, i]$ orienté dans le sens anti-horaire.
 - d) $I_d = \int_{\gamma} (1 + 2\bar{z})^2 dz$; γ est le cercle de centre $z = 0$ et rayon $R = 1$, orienté dans le sens anti-horaire.

3 Exercices maison

1. Calculer les intégrales suivantes (les courbes sont orientées dans le sens anti-horaire sauf pour (a)) :
 - a) $\int_{\gamma} \frac{1}{|z|^2} dz$; γ est défini par $z(t) = \cosh t + i \sinh t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Dessiner γ .
 - b) $\int_{\gamma} z \bar{z} dz$; γ est le triangle de sommets $[0, 1, i]$.
 - c) $\int_{\gamma} (z-1)^2 dz$; γ est l'union du demi-cercle $|z-1| = 1/2$, $\text{Im} z > 0$ et du segment d'axe réel qui joint ses extrémités.
 - d) $\int_{\gamma} (z + \bar{z}) dz$; γ est le carré de sommets $[0, 1, i+1, i]$.
2. Déterminer les solutions de l'équation

$$e^{z^{-2}} = \alpha$$

pour $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|\alpha| \neq 0$ le nombre de solutions qui appartiennent au disque $|z| \leq \varepsilon$ est infini pour tout ε . Ceci est un exemple du fait qu'autour d'une singularité essentielle une fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs possibles en \mathbb{C} (sauf éventuellement une).

3. Déterminer les singularités (y compris en $z = \infty$) des fonctions suivantes :

$$(a) (z-2)^{-1} \quad (b) (1+z^3)/z^2 \quad (c) \sinh(1/z) \quad (d) e^z/z^3 \quad (e) z^{1/2}/(1+z^2)^{1/2}.$$