

Distributions

Guilhem SEMERJIAN & Francesco ZAMPONI

1 Dérivées de distributions

On note $H(x)$ la fonction de Heaviside. Calculer au sens des distributions les dérivées suivantes :

1.
$$T = \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) H(x)e^{\lambda x} \quad (1)$$

2.
$$U = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) H(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} \quad (2)$$

3.
$$V = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \left(H(x)x^{n-1} \right) \quad (3)$$

2 Translation

La translatée de a d'une fonction f est définie par

$$\tau_a f(x) = f(x - a).$$

La translatée de a d'une distribution S est définie par

$$\langle \tau_a S, \phi \rangle = \langle S, \tau_{-a} \phi \rangle.$$

Une suite S_n de distributions converge vers une distribution S si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, \phi \rangle = \langle S, \phi \rangle \quad (4)$$

pour toute fonction test ϕ .

Montrer que l'on peut définir la dérivée au sens des distributions d'une distribution S par

$$S' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{-h} S - S}{h}. \quad (5)$$

3 Distribution delta

1. Montrer que la distribution δ' peut s'écrire :

$$\delta'(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\delta \left(x + \frac{k}{2} \right) - \delta \left(x - \frac{k}{2} \right) \right] \quad (6)$$

2. Montrer que la dilatée de cette distribution s'écrit :

$$\delta'(ax) = \frac{1}{|a|a} \delta'(x) \quad (7)$$

3. Montrer la relation $x\delta' = -\delta$. Calculer de même $x\delta''$. Calculer $f(x)\delta'$, où f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , localement intégrable.