

Mathématiques pour physiciens : Tutorat n°3

**Fonctions analytiques et variables complexes**

Guilhem SEMERJIAN & Francesco ZAMPONI

1. Calculer la série de Taylor de centre  $z_0 \neq 2$  de  $f(z) = 1/(z - 2)$  et son rayon de convergence  $R(z_0)$ . Discuter le résultat.
2. Calculer l'intégrale  $I_\gamma = \int_\gamma \bar{z} dz$  où  $\gamma$  est un chemin fermé arbitraire orienté dans le sens anti-horaire (idée : utiliser la formule de Green-Riemann).
3. Calculer les intégrales suivantes (toutes les courbes sont orientées dans le sens anti-horaire) :
  - a)  $\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z - 1} dz$  ;  $\gamma$  est le cercle de centre  $z = 1$  et rayon  $R = 1$ .
  - b)  $\int_\gamma \frac{1}{2z - i - 1} dz$  ;  $\gamma$  est le carré de sommets  $[0, 1, 1 + i, i]$ .
  - c)  $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$  ;  $\gamma$  est l'ellipse de foyers  $z = 1$  et  $z = -1$  et d'axe principale 3.
4. Calculer les intégrales

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{3 - \cos(\theta)}, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2}{3 - \cos(\theta)},$$

en posant  $z = e^{i\theta}$ .