

Mécanique et relativité restreinte

Éric Brunet ^{*1}, Michel Fioc ^{*2}, Jules Grucker ^{*3}

De grandes parties de ce cours ont été recopiées d'autres polys écrits entre autres par
Mathieu Bertin, Alice Sinatra et Paul Windey

Équipe enseignante 2025-2026 :

Romain Bernard ^{*4} (TD Maj3), Dalil Brouri ^{*5} (TD Mono1), Éric Brunet ^{*1} (Cours Mono et CMI, TD CMI), Arnaud Cassan ^{*6} (TD Maj1), Michel Fioc ^{*2} (Cours Maj 1^e partie, TD Maj2), Jules Grucker ^{*3} (Cours Maj 2^e partie), Jesper Jacobsen ^{*7} (TD Mono2), François Mallet ^{*8} (TD Mono3).

30 novembre 2025

Ouvrages de références pour la mécanique avancée :

- Bertin Faroux Renault, *Mécanique 1*.
- Herbert Goldstein, *Mécanique classique*.
- Pour aller plus loin : Jean-Marcel Rax, *Mécanique analytique*.
- Et encore plus loin : Lev Landau & Evgeny Lifchitz, *Physique théorique — Mécanique*,
- Des exercices : Murray R. Spiegel, *Théorie et applications de la mécanique générale*.

Ouvrages de références pour la relativité :

- *Berkley Physics Course 1, Mechanics*, chapitres 10–13. (Il existe une version française.)
- *The Feynman lectures on Physics*, chapitres 15–17. (Il existe une version française. La version anglaise est accessible en ligne : <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>)

Les articles originaux d'Einstein (ils se lisent bien!) :

- *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, 891-921 (1905). La naissance de relativité restreinte! Un des articles scientifiques les plus célèbres jamais écrits. On trouve des traductions anglaises et françaises (et dans de nombreuses autres langues).
- *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* Annalen der Physik **18**, 639-641 (1905) où pour la première fois a été écrit $E = mc^2$ même si les notations n'étaient pas exactement celles-ci. On trouve facilement la traduction anglaise.

Livre de “vulgarisation” (même s'il n'y a rien de vulgaire dedans, bien au contraire) d'Einstein :

- *La Relativité* édition Payot. Einstein était un excellent pédagogue et on apprend énormément sur les concepts de la théorie en lisant ce bijou.

1. email : eric.brunet@sorbonne-universite.fr
2. email : michel.fioc@sorbonne-universite.fr
3. email : jules.grucker@sorbonne-universite.fr
4. email : romain.bernard@sorbonne-universite.fr
5. email : dalil.brouri@sorbonne-universite.fr
6. email : arnaud.cassan@sorbonne-universite.fr
7. email : jesper.jacobsen@sorbonne-universite.fr
8. email : francois.mallet@sorbonne-universite.fr

Table des matières

Introduction	vii
I Mécanique	1
1 Rappels du L1	3
1.1 Position et mouvement d'un point	3
1.1.1 Référentiels	3
1.1.2 Bases de vecteurs et repères	3
1.1.3 Systèmes de coordonnées	4
1.1.4 Repères fixes, repères mobiles et référentiels	5
1.1.5 Dérivée d'une fonction vectorielle	6
1.1.6 Vitesse et accélération : définitions	7
1.1.7 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques	8
1.2 Dynamique du point matériel	9
1.2.1 Les lois de Newton	9
1.2.2 Théorèmes énergétiques	10
1.2.3 Théorème du moment cinétique	13
2 Changements de référentiels	15
2.1 Cinématique du point	16
2.1.1 Dérivation dans un référentiel	16
2.1.2 Vecteur vitesse angulaire de rotation	17
2.1.3 Composition des vitesses	19
2.1.4 Composition des accélérations	20
2.1.5 Cas particulier : référentiels en translation	21
2.1.6 Axe instantané de rotation	21
2.2 Dynamique dans un référentiel non galiléen	22
2.2.1 Forces d'inertie	22
2.2.2 Application au référentiel terrestre	23
3 Systèmes de points matériels	29
3.1 Définitions et notations	29
3.2 Théorème du centre de masse	30
3.2.1 Impulsion du système	30
3.2.2 Le centre de masse et la relation fondamentale de la dynamique	31
3.2.3 Décomposition du système en parties	32
3.2.4 Systèmes ouverts	33
3.3 Théorème du moment cinétique	35
3.3.1 Moment cinétique et moment des forces	35
3.3.2 Propriétés du moment cinétique	36
3.4 Théorèmes de l'énergie	37

3.4.1	Théorème de l'énergie cinétique	37
3.4.2	Travail des forces intérieures	37
3.4.3	Interactions conservatives	38
3.4.4	Théorème de l'énergie mécanique	40
3.4.5	Énergie mécanique macroscopique et énergie totale	41
3.5	Action de la pesanteur sur un système	42
3.6	Référentiel barycentrique et théorèmes de König	43
3.6.1	Définition	43
3.6.2	Les théorèmes de König	44
3.6.3	Les théorèmes de la mécanique dans le référentiel barycentrique	45
3.7	Chocs, collisions et lois de conservation	45
3.7.1	Chocs entre le système et l'extérieur	46
3.7.2	Chocs internes au système	46
3.7.3	Chocs élastiques et inélastiques	47
4	Mouvement d'un solide	51
4.1	Généralités et premier exemple	51
4.1.1	Définition d'un corps solide	51
4.1.2	Sommes et intégrales	52
4.1.3	Exemple : le pendule rigide	53
4.2	Résultats principaux	55
4.2.1	Par rapport à un point de vitesse nulle	56
4.2.2	Par rapport au centre de masse	57
4.2.3	Exemple : cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné	58
4.2.4	Rotation autour d'un axe fixe	60
4.3	Axes principaux du solide	60
4.3.1	Définition et propriétés	61
4.3.2	Exemple d'une rotation qui n'est pas autour d'un axe principal	62
4.4	L'effet gyroscopique	64
4.5	Actions sur un solide	65
4.5.1	Représentation d'un ensemble de forces par une résultante et un couple	65
4.5.2	Application aux théorèmes énergétiques	67
4.5.3	La liaison pivot	68
5	Problème à deux corps	71
5.1	Réduction du problème à deux corps	71
5.2	Mouvement d'un corps soumis à une force centrale	73
5.2.1	Potentiel	73
5.2.2	Conservation du moment cinétique et loi des aires	74
5.2.3	Potentiel effectif	75
5.2.4	Étude qualitative des trajectoires	76
5.2.5	Solution générale	76
5.3	Problème de Kepler	77
5.3.1	Équation de la trajectoire	77
5.3.2	Premières propriétés des trajectoires keplériennes	79
5.3.3	Propriétés des ellipses	80
5.3.4	Trajectoires elliptiques	81
5.3.5	Trajectoires hyperboliques	83
5.3.6	Potentiel répulsif en $1/r$ et diffusion de Rutherford	84

II	Relativité restreinte	89
6	Postulats et transformations de Lorentz	91
6.1	Relativité galiléenne — rappels	91
6.1.1	Mécanique newtonienne et transformations de Galilée	91
6.1.2	Signification du postulat de relativité	93
6.2	La propagation de la lumière en mécanique classique	94
6.2.1	Nature ondulatoire de la lumière	94
6.2.2	Hypothèse de l'éther	94
6.2.3	L'expérience de Michelson-Morley	95
6.3	Postulats de la relativité restreinte	98
6.3.1	Postulats d'Einstein	98
6.3.2	Transformations de Lorentz	98
7	Conséquences des transformations de Lorentz	105
7.1	Relativité du temps et de la simultanéité	105
7.1.1	Définition de la simultanéité	105
7.1.2	Relativité de la simultanéité et donc du temps	106
7.2	Dilatation des durées et contraction des longueurs	107
7.2.1	Premier exemple	107
7.2.2	Résultats	108
7.3	Intervalle d'espace-temps Δs	110
7.3.1	Invariant relativiste Δs^2	110
7.3.2	Signe de Δs^2 et causalité	111
7.3.3	Cônes de lumière	113
8	Transformation des vitesses et effet Doppler	115
8.1	Composition des vitesses	115
8.2	Aberrations — Transformations des angles	117
8.2.1	Formule générale	117
8.2.2	Aberrations optiques	117
8.3	Effet Doppler	118
8.3.1	Effet Doppler sonore	118
8.3.2	Effet Doppler optique	120
8.3.3	Une application de l'effet Doppler optique : le <i>redshift</i> en astrophysique	121
9	Énergie et quantité de mouvement	125
9.1	De nouvelles expressions pour E et $\vec{p}$	125
9.2	Lois de conservation et principe de relativité	126
9.2.1	Énoncé du problème	126
9.2.2	Quadrivecteurs	127
9.2.3	Quadrivitesse	129
9.2.4	Quadri-impulsion	130
9.2.5	Étude d'une collision simple	131
9.2.6	Conservation de la quadri-impulsion	132
9.3	Énergie en relativité restreinte	133
9.3.1	Énergie interne et énergie cinétique	133
9.3.2	Chocs inélastiques	134
9.3.3	Quadri-impulsion, énergie et quantité de mouvement	135
9.3.4	Énergie et quantité de mouvement du photon	135
9.4	Principe fondamental de la dynamique	136
9.5	Quelques conséquences et applications	136

9.5.1	Équivalence masse-énergie, ordres de grandeur	136
9.5.2	Un exemple de réaction nucléaire : fission de l'uranium-235	137
9.5.3	Création de paire	138
Appendice		141
A Compléments mathématiques		143
A.1	Produit vectoriel et produit mixte	143
A.1.1	Définition et calcul du produit vectoriel	143
A.1.2	Double produit vectoriel	144
A.1.3	Produit mixte	145
B Compléments de physique		147
B.1	Repère de Frenet	147
B.2	Compléments sur l'axe instantané de rotation	148
B.2.1	Position de l'axe	148
B.2.2	Identité des axes instantanés de rotation réciproques	149
B.3	Compléments sur les solides	149
B.3.1	Évolution du vecteur rotation	149
B.3.2	Mise en équation de la toupie	150
B.3.3	Tenseur d'inertie	152
B.4	Calcul de l'intégrale dans le problème de Kepler	155

Introduction

Dans la première partie de ce cours, nous continuons l'étude de la mécanique classique newtonienne commencée en L1. Après un rappel des lois de Newton pour un point matériel (chapitre 1), nous allons étudier les changements de référentiels (chapitre 2), les systèmes de points (chapitre 3), la mécanique du solide (chapitre 4) et le problème à deux corps (chapitre 5).

La deuxième partie est consacrée à une introduction de la mécanique classique relativiste telle qu'énoncée par Einstein au début du vingtième siècle.

Dans les deux parties, une notion fondamentale est celle de **référentiel** (dont on rappellera la définition précise dans le chapitre 1). On sait que la notion de mouvement n'a de sens que dans un référentiel donné : le voyageur endormi dans le train est immobile par rapport au train, et en mouvement par rapport au sol. Des quantités telles que la vitesse, l'accélération, l'énergie cinétique dépendent du référentiel choisi. On dit que ce sont des **quantités relatives**. À l'inverse, il existe des **quantités absolues**, qui sont indépendantes du référentiel choisi ; par exemple la masse et la charge électrique.

En mécanique classique newtonienne, on admet que le temps et l'espace sont également des quantités absolues : une durée mesurée par un observateur ne dépend pas du référentiel dans lequel cette mesure est faite. La distance entre deux points à un instant donnée ne dépend pas non plus du référentiel dans lequel cette distance est mesurée.

Ces hypothèses ont été faites (implicitement) par Isaac Newton au 17^e siècle lorsqu'il a énoncé les lois de la mécanique dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*. Newton pensait naturellement que le temps et l'espace étaient absolus.

La première loi de Newton postule l'existence de référentiels, dits « galiléens », dans lesquels les lois de la mécanique prennent une forme simple. Si un référentiel (par exemple, le référentiel lié au train) est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen (par exemple, le référentiel lié au sol), alors il est lui-même galiléen. Les lois de la mécanique et, en fait, toutes les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens. Newton avait d'ailleurs compris que, d'après ses propres lois, aucune expérience ne pouvait permettre d'identifier un référentiel absolu, privilégié : tous les référentiels galiléens sont équivalents, et les lois de la physique s'y expriment toujours de la même manière. C'est ce qu'on appelle le **principe de relativité**.

Au 19^e siècle, la théorie de l'électromagnétisme et les équations de Maxwell ont remis en cause le principe de relativité. La théorie de l'électromagnétisme prédit que la lumière se propage dans le vide avec une vitesse bien définie, $c = 299\,792\,458$ m/s. Mais les lois de la mécanique classique newtonienne impliquent que la vitesse de la lumière doit dépendre du référentiel dans lequel on la mesure. Cette contradiction a amené à l'époque à renoncer au principe de relativité et à ressusciter le concept d'un référentiel spécial, privilégié : la lumière se propagerait dans un milieu appelé « éther », et les lois de l'électromagnétisme ne seraient valables que dans l'unique référentiel dans lequel l'éther est immobile. Ce référentiel serait alors, en un sens « meilleur » que les autres.

Cette hypothèse de l'éther a dû être abandonnée lorsque diverses expériences censées démontrer son existence, telle celle de Michelson & Morley, ont montré que la vitesse de la lumière était indépendante du référentiel. À la fin du 19^e siècle, les lois de la physique étaient donc contradictoires : d'un côté, les lois de la mécanique newtonienne impliquent que la vitesse de la lumière

dépend du référentiel ; de l'autre, les lois de l'électromagnétisme et des mesures expérimentales impliquent qu'elle n'en dépend pas.

C'est Albert Einstein en 1905 qui a résolu le paradoxe en remettant en cause le caractère absolu du temps et de l'espace. Il a montré que l'on pouvait formuler de nouvelles lois de la mécanique respectant le principe de relativité et gardant la vitesse de la lumière constante. Cependant, dans cette « mécanique classique relativiste », le temps qui s'écoule entre deux événements ou la longueur d'un objet dépendent du référentiel dans lequel on se place ; le temps et l'espace deviennent des quantités relatives. Comme on le verra dans la deuxième partie, on peut néanmoins construire une quantité absolue (indépendante du référentiel) mélangeant espace et temps : le concept pertinent est donc celui d'espace-temps.

D'autres révolutions ont eu lieu au début du 20^e siècle :

- La mécanique quantique (de Broglie, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, ... ; années 1920/1930) a remis en cause l'idée de trajectoire : on ne peut plus décrire un point matériel en donnant sa position et sa vitesse ; en fait, on ne peut même plus définir position et vitesse simultanément au-delà d'une certaine précision.
- La théorie de la relativité générale (Einstein, 1914) a montré que le phénomène de gravitation doit être interprété comme une courbure de l'espace-temps par la matière : l'espace n'est donc plus euclidien, et, par exemple, la somme des angles d'un triangle ne fait pas forcément 180°.

Le caractère macroscopique des corps que nous étudierons nous permet de négliger les effets quantiques et d'utiliser la notion de trajectoire. La faiblesse des champs de gravitation nous permettra d'ignorer la courbure de l'espace-temps, de considérer l'espace comme euclidien et de traiter la gravitation comme une force newtonienne. Dans la première partie, nous supposons toutes les vitesses suffisamment faibles pour négliger les effets relativistes ; nous adopterons les hypothèses de la mécanique classique newtonienne, et en particulier nous supposons le temps et l'espace absolus. Dans la deuxième partie, nous remettrons en cause le temps et l'espace absolus et aborderons les bases de la mécanique classique relativiste.

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Rappels du L1

1.1 Position et mouvement d'un point

1.1.1 Référentiels

Rappelons d'abord la définition des référentiels vue en L1.

Encadré 1.1

Un référentiel est un cadre par rapport auquel on décrit les positions et les mouvements de tous les objets. En particulier, décrire un référentiel revient à faire la liste de tous les objets fixes ; tout mouvement dans ce référentiel est alors décrit par rapport à ces points fixes.

Remarque : En pratique, pour caractériser un référentiel, il suffit de donner trois points non-alignés fixes les uns par rapport aux autres, et le référentiel est alors l'ensemble de tous les points fixes par rapport à ces trois là. On peut aussi caractériser un référentiel en fixant un point et deux directions, ou en fixant un solide indéformable.

On rappelle la définition des référentiels les plus importants ^{*1}.

Le référentiel terrestre ou **référentiel du laboratoire** dans lequel le sol est immobile.

Le référentiel géocentrique dans lequel le centre de la Terre est immobile, ainsi que la direction des étoiles autres que le Soleil.

Le référentiel héliocentrique dans lequel le centre du Soleil est immobile, ainsi que la direction des étoiles autres que le Soleil.

Le référentiel de Copernic dans lequel le centre de masse du système solaire est immobile, ainsi que la direction des étoiles autres que le Soleil.

On utilise également le référentiel lié à un véhicule (train, voiture, ascenseur, wagon de montagne russe), à un plateau tournant, etc.

1.1.2 Bases de vecteurs et repères

Une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de vecteurs de l'espace est la donnée de trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ non coplanaires. On peut alors **décomposer suivant la base** n'importe quel vecteur $\vec{g}$ **de manière unique** : il existe un unique choix de trois nombres g_1 , g_2 , g_3 appelés « coordonnées, ou composantes, du vecteur $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ » tels que

$$\vec{g} = g_1 \vec{u}_1 + g_2 \vec{u}_2 + g_3 \vec{u}_3. \quad (1.1)$$

En particulier, deux vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{h}$ sont égaux si et seulement si leurs coordonnées dans une base donnée sont égales deux à deux : $\vec{g} = \vec{h} \iff \{g_1 = h_1 \text{ et } g_2 = h_2 \text{ et } g_3 = h_3\}$.

1. Ces définitions ne sont pas très précises, mais elles nous suffiront. En particulier, les étoiles autres que le Soleil bougent lentement les uns par rapport aux autres sur la voûte céleste. Pour être plus précis, il faudrait choisir quelques astres (étoiles lointaines ou, mieux, galaxies, voire quasars) ayant des mouvements apparents relatifs quasi nuls et définir les référentiels en disant que les directions vers ces astres-là sont fixes.

Un vecteur est dit **unitaire** s'il est de norme 1. Une base est dite **normée** si ses trois vecteurs sont unitaires. Une base est dite **orthogonale** si les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux. Une base est dite **orthonormée** si elle est à la fois orthogonale et normée :

$$\begin{aligned} \text{base normée :} & \quad \|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1, \\ \text{base orthogonale :} & \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0, \\ \text{base orthonormée :} & \quad \text{base normée + orthogonale.} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Encadré 1.2

Soit $\vec{g} = g_1 \vec{u}_1 + g_2 \vec{u}_2 + g_3 \vec{u}_3$ un vecteur de coordonnées (g_1, g_2, g_3) dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. On a :

$$\vec{g} \cdot \vec{u}_i = g_i \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad \text{et donc} \quad \vec{g} = (\vec{g} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{g} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + (\vec{g} \cdot \vec{u}_3) \vec{u}_3. \quad (1.3)$$

Une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est dite **directe** si $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$, et **indirecte** si $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. Autrement dit, pour une base directe, on peut avec la main *droite* mettre le pouce dans la direction de $\vec{u}_1$, l'index dans la direction de $\vec{u}_2$ et le majeur dans la direction de $\vec{u}_3$.

Lorsqu'on travaille dans le plan, une base n'est constitué que de deux vecteurs non colinéaires. Une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ du plan est dite directe si l'angle orienté entre $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ vaut $+\pi/2$, et indirecte si cet angle vaut $-\pi/2$.

Dans ce cours, nous ne travaillerons que dans des bases orthonormées directes.

Un **repère** de l'espace $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est la donnée d'un point, souvent noté O , appelé **l'origine du repère** et d'une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de l'espace. On dit qu'un repère est normé/orthogonal/orthonormé/direct/indirect si la base correspondante est normée/orthogonale/orthonormée/directe/indirecte.

1.1.3 Systèmes de coordonnées

Un système de coordonnées permet de repérer la position d'un point M . À chaque système de coordonnées est associé un repère. Les trois suivants sont essentiels :

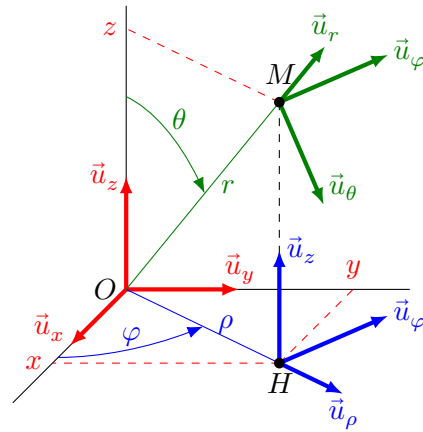
Les coordonnées cartésiennes

On choisit un repère orthonormé, de préférence direct, souvent noté $^{*2} (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Les coordonnées (x, y, z) du point M (que l'on appelle, respectivement, **abscisse**, **ordonnée**, et **cote**) sont les nombres tels que le **vecteur position** $\vec{OM}$ vaut $\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$.

On considère le déplacement infinitésimal du point M tel que ses coordonnées cartésiennes changent de dx, dy, dz . En notant M_0 la position initiale (de coordonnées (x, y, z)) et M_1 la position après déplacement (de coordonnées $(x+dx, y+dy, z+dz)$), alors le **déplacement infinitésimal** du point M est par définition le vecteur $\vec{M_0M_1} = \vec{OM_1} - \vec{OM_0}$. Selon l'usage des différentielles en physique, on devrait noter ce vecteur $d\vec{OM}$, mais comme il ne dépend pas du choix de l'origine O , on le note plutôt $d\vec{M}$. En coordonnées cartésiennes, et seulement en coordonnées cartésiennes, on a très simplement

$$d\vec{M} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z. \quad (1.4)$$

Le **volume élémentaire** correspond au volume occupé par tous les points dont les trois coordonnées cartésiennes sont respectivement dans les intervalles $[x, x+dx], [y, y+dy]$ et



2. On rencontre également les notations $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

$[z, z + dz]$). En coordonnées cartésiennes, et seulement en coordonnées cartésiennes, on a très simplement

$$dV = dx dy dz. \quad (1.5)$$

Les coordonnées cylindriques

On part d'un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et on note H le projeté orthogonal de M sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{OH} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$ et $\overrightarrow{HM} = z \vec{u}_z$. Dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, on note ρ la distance OH et $\varphi \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre $\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OH}$. Les coordonnées du point M sont alors (ρ, φ, z) . À ces coordonnées, on associe une base orthonormée directe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$, où le vecteur $\vec{u}_z$ est celui du repère cartésien et où $\vec{u}_\rho$ est dirigé selon $\overrightarrow{OH}$, de sorte que $\overrightarrow{OH} = \rho \vec{u}_\rho$ et $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$. Le troisième vecteur, $\vec{u}_\varphi$, est tel que le repère soit orthonormé direct : $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$. En deux dimensions, on ne garde que les coordonnées (ρ, φ) et on parle de **coordonnées polaires**. Dans certains livres, les coordonnées cylindriques peuvent s'appeler (r, θ, z) , ou (r, φ, z) .

Lorsque les coordonnées cylindriques du point M changent de $d\rho, d\varphi, dz$, le déplacement infinitésimal du point M est

$$\overrightarrow{dM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{u}_z. \quad (1.6)$$

Attention à la présence du ρ devant le $d\varphi$! Le volume élémentaire (correspondant au volume occupé par tous les points dont les trois coordonnées cylindriques sont respectivement dans les intervalles $[\rho, \rho + d\rho], [\varphi, \varphi + d\varphi]$ et $[z, z + dz]$) est donc

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (1.7)$$

Les coordonnées sphériques

On part d'un repère cylindrique $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$. On note $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre $\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM}$. Les coordonnées sphériques du point M sont alors (r, θ, φ) . À ces coordonnées, on associe la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, où le vecteur $\vec{u}_r$ est tel que $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ et le vecteur $\vec{u}_\varphi$ est celui des coordonnées cylindriques. Le troisième vecteur, $\vec{u}_\theta$, est tel que le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ soit orthonormé direct : $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$.

Lorsque les coordonnées sphériques du point M changent de $dr, d\theta, d\varphi$, le déplacement infinitésimal du point M est

$$\overrightarrow{dM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi. \quad (1.8)$$

Le volume élémentaire (correspondant au volume occupé par tous les points dont les trois coordonnées sphériques sont respectivement dans les intervalles $[r, r + dr], [\theta, \theta + d\theta]$ et $[\varphi, \varphi + d\varphi]$) est donc

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (1.9)$$

Les coordonnées sphériques sont en particulier utiles pour repérer un point d'une sphère, comme la Terre. Dans ce cas, φ est la longitude, et $\frac{\pi}{2} - \theta$ est la latitude. On appelle aussi θ la **colatitude**.

1.1.4 Repères fixes, repères mobiles et référentiels

Un repère $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est dit fixe si le point O est immobile et si les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont indépendants du temps. La notion de « repère fixe » est manifestement relative : elle dépend du référentiel choisi. Par exemple, on peut définir un repère lié à une voiture, avec O le centre de masse de la voiture et les trois vecteurs qui pointent respectivement vers l'avant, vers la gauche et vers le haut de la voiture. Ce repère est fixe dans le référentiel de la voiture, mais n'est pas fixe dans le référentiel terrestre : le point O se déplace quand la voiture avance, et les vecteurs tournent quand la voiture tourne ou monte une pente.

Souvent, lorsqu'on choisit de travailler dans un référentiel donné, on se donne au moins un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ qui est fixe dans ce référentiel. Inversement, pour n'importe quel repère de l'espace $(A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on peut définir le référentiel « tel que le repère $(A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est fixe ». Par abus de langage commode, on parlera parfois du « référentiel $(A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ » pour désigner le référentiel dans lequel ce repère est fixe, mais n'importe quel repère fixe par rapport au premier conviendrait aussi bien. De la même manière, on parle du référentiel d'un solide (rigide) pour désigner le référentiel dans lequel ce solide est immobile ; ou encore du référentiel d'un milieu de propagation d'ondes pour désigner le référentiel dans lequel ce milieu est immobile lorsqu'il est au repos, c'est-à-dire non perturbé par ces ondes.

Dans un référentiel où le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est fixe, les repères cylindriques et sphériques associés ne sont en général pas fixes puisqu'ils suivent le point M .

1.1.5 Dérivée d'une fonction vectorielle

Définition et propriétés

Dans un référentiel donné, si $t \mapsto \vec{g}(t)$ est une fonction qui à chaque réel t associe un vecteur $\vec{g}(t)$, on définit la dérivée de $\vec{g}(t)$ de la manière habituelle :

$$\frac{d\vec{g}}{dt}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{g}(t + \varepsilon) - \vec{g}(t)}{\varepsilon}. \quad (1.10)$$

On a appelé t la variable parce que, très souvent, on dérive par rapport au temps, mais on peut évidemment être amené à dériver par rapport à d'autres variables.

Encadré 1.3

La dérivée d'une fonction vectorielle vérifie toutes les lois habituelles de la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'une fonction composée :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{g} + \vec{h}) &= \frac{d\vec{g}}{dt} + \frac{d\vec{h}}{dt}, & \frac{d}{dt}(\lambda \vec{g}) &= \frac{d\lambda}{dt} \vec{g} + \lambda \frac{d\vec{g}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\vec{g} \cdot \vec{h}) &= \frac{d\vec{g}}{dt} \cdot \vec{h} + \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{dt}, & \frac{d}{dt}(\vec{g} \wedge \vec{h}) &= \frac{d\vec{g}}{dt} \wedge \vec{h} + \vec{g} \wedge \frac{d\vec{h}}{dt}, \\ & & \frac{d}{dt}\vec{g}(\lambda(t)) &= \lambda'(t) \frac{d\vec{g}}{d\lambda}(\lambda(t)). \end{aligned} \quad (1.11)$$

(On a omis, comme c'est l'usage, d'écrire explicitement la dépendance en la variable t , sauf pour la dernière égalité. On rappelle que le produit $\lambda \vec{g}$ qui prend un scalaire et un vecteur pour donner un vecteur est le *produit externe*, que le produit $\vec{g} \cdot \vec{h}$ qui prend deux vecteurs pour donner un scalaire est le *produit scalaire*, et que le produit $\vec{g} \wedge \vec{h}$ qui prend deux vecteurs pour donner un vecteur est le *produit vectoriel*.)

Notation « point »

On rappelle la convention suivante :

Encadré 1.4

Pour une quantité *scalaire* ou *vectorielle* dépendant du temps, on note la dérivée par rapport au temps avec un point au-dessus de la quantité. La dérivée seconde est notée avec deux points :

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}, \quad \ddot{\lambda} = \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \quad \dot{\vec{g}} = \frac{d\vec{g}}{dt}, \quad \ddot{\vec{g}} = \frac{d^2\vec{g}}{dt^2}. \quad (1.12)$$

Un exemple important

Soit $\vec{g}$ un vecteur, et $g = \|\vec{g}\|$ sa norme. Comme $g^2 = \vec{g} \cdot \vec{g}$, on peut écrire la dérivée de g^2 de deux manières différentes :

$$\frac{d}{dt}(g^2) = 2g \frac{dg}{dt} = 2g\dot{g} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}(g^2) = \frac{d}{dt}(\vec{g} \cdot \vec{g}) = 2\vec{g} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} = 2\vec{g} \cdot \dot{\vec{g}}. \quad (1.13)$$

Les deux expressions sont correctes ; selon les cas il faut choisir la plus pratique. Par exemple, si $\vec{g}$ est le vecteur vitesse $\vec{v}$, on a $\frac{d}{dt}(v^2) = 2v\dot{v} = 2\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$. Dans la deuxième expression, $\dot{\vec{v}}$ est le vecteur accélération. Dans la première expression, $\dot{v}$ est la dérivée de la norme de la vitesse, qui est *évidemment* une quantité différente de $\|\dot{\vec{v}}\|$, la norme de l'accélération...

Une conséquence immédiate de (1.13) est la suivante :

Encadré 1.5

Si $\vec{g}$ est un vecteur de norme constante, alors $\vec{g}$ et $\dot{\vec{g}}$ sont orthogonaux.

Ainsi, dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, la dérivée de $\vec{u}_2$ (par exemple) par rapport au temps est un vecteur orthogonal à $\vec{u}_2$. Cette dérivée s'exprime donc nécessairement comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$.

Dérivation dans une base

Souvent, pour faciliter les calculs, on décompose un vecteur selon une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Le calcul de la dérivée suit alors les règles habituelles :

$$\vec{g} = g_1 \vec{u}_1 + g_2 \vec{u}_2 + g_3 \vec{u}_3 \implies \frac{d\vec{g}}{dt} = [\dot{g}_1 \vec{u}_1 + \dot{g}_2 \vec{u}_2 + \dot{g}_3 \vec{u}_3] + [g_1 \dot{\vec{u}}_1 + g_2 \dot{\vec{u}}_2 + g_3 \dot{\vec{u}}_3]. \quad (1.14)$$

Lorsque la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est fixe, les trois derniers termes sont nuls et la dérivée du vecteur se fait composante par composante.

Insistons sur le fait que la dérivée d'une fonction vectorielle est une opération qui dépend du référentiel choisi. Par exemple, si $\vec{g}$ est le vecteur allant du phare arrière droit au phare avant droit d'une voiture, alors ce vecteur est fixe dans le référentiel de la voiture et sa dérivée temporelle est nulle, mais, dans le référentiel terrestre, ce vecteur tourne lorsque la voiture tourne et sa dérivée n'est pas nulle. Pour anticiper un peu sur le chapitre suivant, lorsqu'il y a une ambiguïté possible sur le référentiel dans lequel on dérive, on pourra noter explicitement la dérivée comme ceci :

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{g}}{dt} = (\text{dérivée temporelle de } \vec{g} \text{ dans le référentiel } \mathcal{R}). \quad (1.15)$$

1.1.6 Vitesse et accélération : définitions

Le **vecteur vitesse instantanée** ^{*3} $\vec{v}$ et le **vecteur accélération instantanée** $\vec{a}$ d'un point M dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ à un instant t sont définis à partir du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par les expressions suivantes :

Encadré 1.6

Soit O un point quelconque fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}. \quad (1.16)$$

3. Le terme « vitesse » désigne *a priori* le vecteur vitesse instantanée. Il peut aussi signifier la norme de ce vecteur. C'est en général clair selon le contexte. De même pour le terme « accélération ».

Remarque 1 : Dans ces définitions, O est un point fixe dans $\mathcal{R}$ mais est sinon arbitraire. En effet, si A est un autre point fixe dans $\mathcal{R}$, alors

$$\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1.17)$$

puisque $d\overrightarrow{AO}/dt = \vec{0}$. La vitesse et l'accélération dans $\mathcal{R}$ sont donc indépendantes du point choisi pour exprimer le vecteur position de M tant que ce point est fixe dans $\mathcal{R}$.

Remarque 2 : Les vecteurs vitesse et accélération *dépendent du référentiel choisi*. Si l'on travaille simultanément dans deux référentiels différents, par exemple $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, il faut faire attention aux notations. Par exemple, on peut décider que $\vec{v}$ est la vitesse dans $\mathcal{R}$ et $\vec{v}'$ la vitesse dans $\mathcal{R}'$. Ou alors, on peut utiliser $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$.

1.1.7 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques

Considérons un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe dans le référentiel d'étude. Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ du point M , la vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, et l'accélération $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ s'écrivent

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z. \quad (1.18)$$

On suppose maintenant que l'on souhaite travailler dans le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ associé au repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, comme expliqué dans la section 1.1.3. Dans ce système, les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\varphi$ ne sont pas fixes ; on montre que

$$\vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y. \quad (1.19)$$

On constate que ces deux vecteurs dépendent de la coordonnée φ , mais pas de ρ ou de z . En dérivant par rapport à φ , on obtient

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y = \vec{u}_\varphi, \quad \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = -\cos \varphi \vec{u}_x - \sin \varphi \vec{u}_y = -\vec{u}_\rho. \quad (1.20)$$

Les dérivées par rapport à t s'obtiennent comme des dérivées de fonctions composées. On retiendra donc :

Encadré 1.7

Dans un système de coordonnées cylindriques associé à un repère cartésien fixe, on a

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = \vec{u}_\varphi, \quad \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{u}_\rho, \quad \text{et donc} \quad \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi, \quad \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{u}_\rho. \quad (1.21)$$

À partir de ce résultat important, on peut retrouver rapidement les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z, \quad \vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + \dot{z} \vec{u}_z, \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi + \ddot{z} \vec{u}_z. \quad (1.22)$$

Exemple 1.1 : Si le mobile a un mouvement circulaire autour de O dans le plan $z = 0$, c'est-à-dire avec ρ constant, la vitesse et l'accélération valent

$$\vec{v} = \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi, \quad \vec{a} = -\rho \dot{\varphi}^2 \vec{u}_\rho + \rho \ddot{\varphi} \vec{u}_\varphi \quad (\text{cas d'un mouvement circulaire}). \quad (1.23)$$

La vitesse (pour le mouvement circulaire qu'on considère) est dirigée selon $\vec{u}_\varphi$ et vaut $\vec{v} = v \vec{u}_\varphi$ avec $v = \rho \dot{\varphi}$. (Attention, v n'est pas nécessairement $\|\vec{v}\|$, la norme de $\vec{v}$, puisque v peut être positive ou négative selon le signe de $\dot{\varphi}$ alors que $\|\vec{v}\| \geq 0$. En revanche, $\|\vec{v}\| = |v|$.) On a alors, pour ce mouvement circulaire,

$$\vec{v} = v \vec{u}_\varphi, \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{\rho} \vec{u}_\rho + \dot{v} \vec{u}_\varphi \quad (\text{cas d'un mouvement circulaire}). \quad (1.24)$$

Le terme $-(v^2/\rho) \vec{u}_\rho$ s'appelle l'**accélération normale** (sous entendu : à la trajectoire) ou **centripète**. Dans le cas présent d'un mouvement circulaire, cette accélération est radiale et orientée vers le centre O (à cause du signe $-$). Le terme $\dot{v} \vec{u}_\varphi$ est l'**accélération tangentielle**. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, $\dot{\varphi}$ et v sont constants, et l'accélération est purement radiale. Les notions d'accélération radiale et tangentielle peuvent être généralisées à des mouvements non circulaires ; voir la section B.1 de l'annexe.

On pourrait faire un travail similaire en coordonnées sphériques. On trouverait que les trois vecteurs de la base sont des fonctions des deux angles θ et φ , dont les dérivées partielles sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} &= \vec{u}_\theta, & \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{u}_r, & \frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} &= \sin \theta \vec{u}_\varphi, & \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \vec{u}_\varphi, & \frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_\theta. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ceci permettrait d'obtenir

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi, \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi, \quad \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\theta. \quad (1.26)$$

(Il ne sera pas demandé en examen de cette UE de connaître les relations (1.25) ou (1.26).)

1.2 Dynamique du point matériel

On considère un point matériel de masse m . On rappelle qu'un point matériel est un modèle de système infiniment petit, sans structure interne et de masse constante. On note M la position du point matériel et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ son vecteur position, où O est un point fixe que l'on se donne dans le référentiel d'étude. La vitesse et l'accélération du point matériel sont alors $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$. On note $\vec{p}$ l'**impulsion** ou **quantité de mouvement** (ces termes sont synonymes) du point matériel :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}, \quad \vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.27)$$

On note également $\vec{F}$ la résultante (c'est-à-dire la somme) des forces agissant sur ce point.

1.2.1 Les lois de Newton

On rappelle les lois de Newton pour un point matériel :

Encadré 1.8 : Lois de Newton

N1 : principe d'inertie Il existe des référentiels, dits *inertiels* ou *galiléens*, dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne et uniforme.

N2 : principe fondamental Dans un référentiel galiléen, on a

$$\dot{\vec{p}} = m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.28)$$

N3 : principe des actions réciproques Si un point matériel α (de vecteur position $\vec{r}_\alpha = \overrightarrow{OM}_\alpha$) exerce une force $\vec{F}_{\alpha\beta}$ sur un point matériel β (de vecteur position $\vec{r}_\beta = \overrightarrow{OM}_\beta$), alors le point matériel β exerce sur le point α une force $\vec{F}_{\beta\alpha}$ opposée à $\vec{F}_{\alpha\beta}$. De plus, ces forces sont dirigées selon l'axe reliant les deux points matériels :

$$\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}, \quad \text{ces forces étant colinéaires à } \vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha = \overrightarrow{M_\alpha M_\beta}. \quad (1.29)$$

On rappelle qu'un point matériel est **isolé** s'il n'est soumis à aucune force, et **pseudo-isolé** s'il est soumis à plusieurs forces qui se compensent ; dans les deux cas, $\vec{F} = \vec{0}$. La troisième loi a pendant longtemps été appelée « principe d'action-réaction » mais, avec ce nom, on pouvait avoir l'impression qu'un point matériel initiait une action, et que juste après, en réponse, l'autre point matériel avait une réaction. En fait, les deux forces sont présentes de manière simultanée et symétrique, et le nom d'« actions réciproques », qui préserve cette symétrie, est meilleur.

1.2.2 Théorèmes énergétiques

Encadré 1.9

L'*énergie cinétique* d'un point matériel est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.30)$$

avec $v = \|\vec{v}\|$ la norme de la vitesse.

Le *travail infinitésimal* d'une force $\vec{F}$ s'appliquant sur le point matériel lorsque celui-ci se déplace de $d\vec{r}$ est

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.31)$$

Si le travail est positif, on dit que la force est *motrice*. Si le travail est négatif, on dit que la force est *résistante*. On rappelle que des notations du type dX ou δY représentent des *quantités infinitésimales*. La distinction entre ces deux notations est la suivante :

- dX correspond à l'accroissement d'une certaine quantité X lors du déplacement infinitésimal, c'est-à-dire que dX est une *différence* : on peut écrire $dX = X(\text{après}) - X(\text{avant})$ pour une certaine quantité X qui dépend de la position du point M .
- δY ne correspond pas (en général) à une différence.

Exemple 1.2 : Ainsi, en coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement infinitésimal $d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ correspond à la différence du vecteur position « après le déplacement » $(x + dx)\vec{u}_x + (y + dy)\vec{u}_y + (z + dz)\vec{u}_z$ et « avant le déplacement » $x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Un exemple de quantité infinitésimale qui n'est pas une différence est la distance parcourue $\delta\ell$ lors du déplacement ; celle-ci est donnée, d'après Pythagore, par $\delta\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, mais cette expression ne peut pas s'écrire comme la différence $F(x + dx, y + dy, z + dz) - F(x, y, z)$ d'une certaine fonction F de l'espace.

Lorsque le point matériel se déplace de A à B en suivant une certaine trajectoire $\mathcal{C}$, le travail de la force le long de la trajectoire est noté

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{\mathcal{C}} \delta W(\vec{F}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.32)$$

Souvent, pour alléger, on écrira le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$, ou même $W(\vec{F})$. L'intégrale, elle, est souvent notée $\int_A^B \delta W(\vec{F})$. Mais il ne faut jamais oublier que, en général, le travail de la force *dépend de toute la trajectoire* $\mathcal{C}$, et pas seulement du point de départ A et du point d'arrivée B .

Théorème de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique est égale au travail de la résultante des forces appliquées. On l'écrit en version infinitésimale et en version intégrée :

Encadré 1.10

$$dE_c = \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}), \quad (1.33)$$

où $E_c(A)$ et $E_c(B)$ sont, respectivement, l'énergie cinétique du point matériel au début de la trajectoire (en A) et à la fin (en B).

Pour écrire la version intégrée, on utilise la relation générale $\int dX = \Delta X$ qui est vraie pour toute quantité X et toute trajectoire $\mathcal{C}$.

Le théorème de l'énergie cinétique se démontre en dérivant l'énergie cinétique par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}E_c = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = m\vec{a} \cdot \vec{v}, \quad (1.34)$$

où l'on a utilisé les lois (1.11) de la dérivation d'un produit. En utilisant le principe fondamental de la dynamique (1.28), on obtient

$$\frac{d}{dt}E_c = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.35)$$

Cette expression s'appelle le **théorème de la puissance**, et le membre de droite est la **puissance** fournie par la force $\vec{F}$. Il suffit alors d'écrire $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ et de tout multiplier par dt pour retrouver le théorème de l'énergie cinétique (1.33).

Forces conservatives

En général, lorsque le point matériel se déplace de A à B selon une trajectoire $\mathcal{C}$, le travail des forces s'appliquant sur ce point dépend de toute la trajectoire $\mathcal{C}$. Cependant, pour beaucoup de forces, il se trouve que le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée A et B . Lorsqu'une force $\vec{f}$ vérifie cette propriété, on dit qu'elle est *conservative*, et il existe alors une *énergie potentielle* $E_p(M)$, fonction de l'espace, associée à cette force :

Encadré 1.11

$$\vec{f} \text{ est conservative s'il existe } E_p(M) \text{ telle que } W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = E_p(A) - E_p(B). \quad (1.36)$$

Sous forme infinitésimale :

$$\vec{f} \text{ est conservative s'il existe } E_p(M) \text{ telle que } \delta W(\vec{f}) = -dE_p. \quad (1.37)$$

L'énergie potentielle E_p est définie à une constante près, et dépend de la force considérée. Rappelons l'expression de l'énergie potentielle de quelques forces importantes :

poids	$\vec{f} = m\vec{g}$	$E_{pp}(M) = mgz,$	
force de rappel d'un ressort	$\vec{f} = -K(r - \ell_0) \vec{u}$	$E_{pr}(M) = \frac{1}{2}K(r - \ell_0)^2,$	
force gravitationnelle	$\vec{f} = -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}$	$E_{pg}(M) = -\frac{Gmm'}{r},$	(1.38)
force de Coulomb	$\vec{f} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$	$E_{pc}(M) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r},$	
force électrostatique	$\vec{f} = q\vec{E}(M),$	$E_{pé}(M) = q\Phi(M).$	

On a utilisé les notations suivantes. Pour le poids : $\vec{g}$ est l'**accélération de la pesanteur**, et $g = \|\vec{g}\|$; l'expression de E_{pp} suppose que $\vec{u}_z$ est dirigé vers le haut, c'est-à-dire que $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Pour le ressort, la gravitation et Coulomb, appelons P le point *supposé fixe* qui exerce la force sur le système M (dans le cas du ressort, P et M sont donc les deux extrémités du ressort) ; alors r est la distance PM et $\vec{u}$ le vecteur unitaire allant de P à M , de sorte que $\overrightarrow{PM} = r\vec{u}$. Pour le ressort, K est la **constante de raideur** et ℓ_0 la **longueur à vide**. Pour la gravitation, G est la **constante de gravitation universelle** et m' la masse de la particule en P à l'origine de la force. Pour Coulomb, ϵ_0 est la **permittivité du vide**, q la charge du point matériel et q' la charge de la particule en P à l'origine de la force. Pour l'électrostatique, $\vec{E}(M)$ est le **champ électrique**, $\Phi(M)$ est le **potentiel électrostatique** (en volts) et q est la charge du point matériel.

La différence entre poids et force gravitationnelle sera rappelée et précisée au chapitre 2. Rappelons que l'on ne peut utiliser le poids que lorsque $\vec{g}$ est uniforme : dès que l'on lance une fusée, il faut plutôt réfléchir en terme de force gravitationnelle. La force de Coulomb et la force électrostatique sont deux formulations de la même force, comme vous le verrez en cours d'électromagnétisme.

Selon les livres, on rencontre également la définition suivante d'une force conservative :

Encadré 1.12

$\vec{f}$ est conservative s'il existe une fonction $M \mapsto E_p(M)$ de la position seulement telle que

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p. \quad (1.39)$$

Les définitions (1.36) et (1.39) sont presque équivalentes : on peut démontrer que si une force $\vec{f}$ vérifie (1.36), *et que de plus cette force ne dépend que de la position M du point matériel*, alors elle vérifie aussi (1.39). Par ailleurs, si une force vérifie (1.39), alors elle vérifie également (1.36) ^{*4}.

Il existe cependant des forces dont le travail est toujours nul, parce que ces forces sont toujours perpendiculaires au mouvement. En particulier, la réaction normale à un support *fixe dans le référentiel d'étude* et la force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ vérifient cette propriété. ($\vec{B}$ est le champ magnétique et q la charge du point matériel). Pour ces forces, la propriété (1.36) est manifestement vraie en prenant $E_p(M) = 0$. Cependant, ces forces ne vérifient pas (1.39).

Les forces de frottement sont des forces non conservatives; elles ne vérifient ni (1.36), ni (1.39), et le travail dépend effectivement de la trajectoire $\mathcal{C}$ suivie. Pour ces forces, le travail est toujours négatif ou nul.

Théorème de l'énergie mécanique

On rappelle que l'on a noté $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces s'appliquant sur le point matériel que l'on étudie. On suppose maintenant que certaines de ces forces sont conservatives, et que d'autres ne le sont pas. Écrivons

$$\vec{F} = \vec{f}^c + \vec{f}^{\text{nc}}, \quad (1.40)$$

avec $\vec{f}^c$ la résultante de toutes les forces conservatives, et $\vec{f}^{\text{nc}}$ la résultante de toutes les forces non conservatives.

Il existe donc une énergie potentielle E_p telle que

$$\delta W(\vec{f}^c) = -dE_p, \quad W_{A \rightarrow B}(\vec{f}^c) = E_p(A) - E_p(B). \quad (1.41)$$

(Si $\vec{f}^c$ est la somme de plusieurs forces conservatives, alors E_p est la somme des énergies potentielles associées). Dans le théorème de l'énergie cinétique, cela donne

$$dE_c = -dE_p + \delta W(\vec{f}^{\text{nc}}), \quad E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}^{\text{nc}}). \quad (1.42)$$

Encadré 1.13

On définit l'**énergie mécanique** E_m du point matériel par

$$E_m = E_c + E_p. \quad (1.43)$$

On obtient alors le **théorème de l'énergie mécanique** :

$$dE_m = \delta W(\vec{f}^{\text{nc}}), \quad \Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}^{\text{nc}}), \quad (1.44)$$

où $E_m(A)$ et $E_m(B)$ sont, respectivement, l'énergie mécanique du point matériel au début de la trajectoire (en A) et à la fin (en B).

En particulier, s'il n'y a pas de forces non conservatives, l'énergie mécanique est constante.

4. C'est une simple conséquence de la propriété fondamentale du gradient : pour n'importe quel champ scalaire φ , on a $d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot d\vec{r}$. Appliquée à l'énergie potentielle, et en supposant (1.39), on obtient $dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{r} = -\vec{f} \cdot d\vec{r} = -\delta W(\vec{f})$ qui est (1.37).

1.2.3 Théorème du moment cinétique

Encadré 1.14

Pour un point A quelconque, on définit le **moment cinétique** $\vec{L}_A$ par rapport à A du point matériel M et le **moment des forces** $\vec{\mathcal{M}}_A$ par rapport à A des forces $\vec{F}$ exercées sur M par

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}, \quad \vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}. \quad (1.45)$$

On a alors le **théorème du moment cinétique** :

$$\text{Si le point } A \text{ est fixe, alors } \frac{d}{dt} \vec{L}_A = \vec{\mathcal{M}}_A. \quad (1.46)$$

En effet, comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \overrightarrow{OA}$ et que A et O sont fixes, on a

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} = \vec{v}. \quad (1.47)$$

(Si A n'était pas fixe, on aurait $\frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} = \vec{v} - \vec{v}_A$ avec $\vec{v}_A$ la vitesse du point A .) On alors

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_A = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} \right) \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{a}. \quad (1.48)$$

Mais $\vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$ et $m\vec{a} = \vec{F}$, et on obtient le résultat recherché.

Chapitre 2

Changements de référentiels

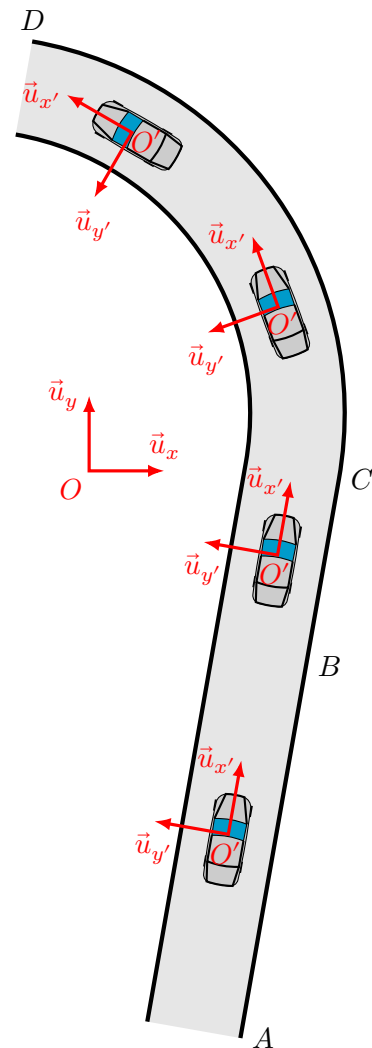
Dans ce chapitre, nous allons voir comment faire de la mécanique dans un référentiel quelconque. Commençons par prendre un exemple afin de fixer les notations. On considère une voiture sur une route, représentée à différents instants sur la figure ci-contre. Le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen. Le repère $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la voiture. (Pour alléger, on ne représente pas les vecteurs $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_{z'}$.) Le point O' est donc fixe dans $\mathcal{R}'$, mais mobile dans $\mathcal{R}$.

- De A à B , la voiture se déplace en ligne droite à vitesse constante. Les vecteurs $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ sont fixes dans $\mathcal{R}$ et la vitesse de O' est constante. On dit que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **translation uniforme** par rapport à $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est galiléen, $\mathcal{R}'$ est également galiléen.
- De B à C , la voiture ralentit pour aborder le virage. Les vecteurs $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ sont toujours fixes dans $\mathcal{R}$, mais la vitesse de O' diminue. On dit que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **translation (non uniforme)** par rapport à $\mathcal{R}$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est *pas* galiléen.
- De C à D , la voiture est dans le virage. Les vecteurs $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ tournent dans $\mathcal{R}$. On dit que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **rotation** par rapport à $\mathcal{R}$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est *pas* galiléen.

Le but de ce chapitre est d'apprendre à écrire les équations du mouvement d'un point matériel en se plaçant dans le référentiel $\mathcal{R}'$, même lorsque celui-ci n'est pas galiléen. La démarche s'articule en deux étapes ; une étape **cinématique** et une étape **dynamique**.

L'objet de la cinématique, section 2.1, est de décrire le mouvement d'un corps indépendamment des actions qui s'exercent sur lui, c'est-à-dire d'écrire les vecteurs vitesse et accélération ; on sait que le mouvement n'a de sens que par rapport à un référentiel. Connaissant vitesse et accélération d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}'$, nous allons voir comment écrire vitesse et accélération du même point dans un autre référentiel $\mathcal{R}$; ce sont les lois de composition, voir section 2.1.3. Par exemple, si deux enfants à l'arrière de la voiture se lancent une balle, et qu'on observe la trajectoire de la balle dans $\mathcal{R}'$, on veut pouvoir écrire vitesse et accélération de la balle dans $\mathcal{R}$.

L'objet de la dynamique, section 2.2, est de déterminer le mouvement des corps connaissant les actions exercées sur eux. Les lois fondamentales de la mécanique sont énoncées dans les réfé-



rentiels galiléens, mais il est parfois plus naturel d'étudier les mouvements dans des référentiels non galiléens. En utilisant les résultats de la cinématique, nous verrons qu'il est possible d'écrire les lois de la mécanique dans un référentiel non galiléen. En plus des forces d'interactions, il est alors nécessaire d'introduire des forces additionnelles, les **forces d'inertie**, voir section 2.2.1.

Il est important dans ce qui suit de bien distinguer les concepts de référentiel et de repère. Pour illustrer ces notions, on peut prendre l'image bidimensionnelle suivante :

Exemple 2.1 : On considère un mobile roulant sur deux feuilles de papier superposées, dont celle du dessus est transparente. Un faisceau laser placé sous le mobile s'allume brièvement à intervalles de temps réguliers. Les deux feuilles sont photosensibles et le laser imprime alors un point sur chaque feuille. Si la feuille du dessous glisse par rapport à la feuille transparente, la courbe reliant les points sur chaque feuille est différente.

Chacune des feuilles constitue un référentiel et la trajectoire du mobile est relative au référentiel.

Chacune des feuilles peut également porter un ou plusieurs quadrillages. Chaque quadrillage constitue un repère fixe dans le référentiel de la feuille et permet de noter la position du mobile dans ce repère, mais la position elle-même est indépendante du quadrillage : le mouvement dépend du référentiel mais pas du repère.

Dans tout le chapitre, nous garderons les mêmes conventions :

- $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un repère orthonormé direct qui est *fixe* dans le référentiel $\mathcal{R}$.
- $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ est un repère orthonormé direct qui est *fixe* dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Dans la partie « Cinématique » de ce chapitre, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont quelconques. Dans la partie « Dynamique », $\mathcal{R}$ sera galiléen ; en revanche, si O' a un mouvement accéléré dans $\mathcal{R}$ ou si la base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ tourne dans $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}'$ ne sera pas galiléen.

2.1 Cinématique du point

2.1.1 Dérivation dans un référentiel

On s'intéresse dans ce qui suit à des quantités vectorielles $\vec{w}$ dépendant du temps. On a

$$\vec{w} = w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z, \quad (2.1)$$

où les composantes (w_x, w_y, w_z) de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dépendent en général du temps. La première remarque importante est que l'écriture (2.1) est *indépendante du référentiel choisi*, et les fonctions du temps w_x, w_y, w_z sont les mêmes dans tous les référentiels : si, par exemple, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut $(3t + 1)\vec{u}_x + 2\vec{u}_y$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, ce même vecteur vaut également $(3t + 1)\vec{u}_x + 2\vec{u}_y$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Encadré 2.1

Un vecteur donné se décompose dans une base donnée de la même manière dans tous les référentiels. En particulier, les composantes de ce vecteur ont la même dérivée dans tous les référentiels.

Ce qui change entre les deux référentiels, ce sont les vecteurs de la base. Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont fixes dans $\mathcal{R}$, mais peuvent être mobiles dans $\mathcal{R}'$. Dès que l'on travaille dans plusieurs référentiels, **il est donc nécessaire de bien préciser dans quel référentiel on dérive**. On notera dans ce qui suit

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{w}}{dt} \quad (2.2)$$

la dérivée de la fonction vectorielle $t \mapsto \vec{w}(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Cette quantité vaut

$$\begin{aligned} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{w}}{dt} &= \left(\dot{w}_x \vec{u}_x + w_x \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_x}{dt} \right) + \left(\dot{w}_y \vec{u}_y + w_y \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_y}{dt} \right) + \left(\dot{w}_z \vec{u}_z + w_z \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_z}{dt} \right) \\ &= \dot{w}_x \vec{u}_x + \dot{w}_y \vec{u}_y + \dot{w}_z \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.3)$$

puisque les dérivées de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont nulles dans $\mathcal{R}$. Remarquons que, pour les composantes w_x , etc. du vecteur, il est inutile de préciser le référentiel dans lequel on dérive, voir encadré 2.1, et on peut se permettre d'utiliser la notation « point », alors que l'on ne pourrait pas écrire $\dot{\vec{u}}_x$ sans ambiguïté.

De même, dans la base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ fixe dans $\mathcal{R}'$,

$$\vec{w} = w_{x'} \vec{u}_{x'} + w_{y'} \vec{u}_{y'} + w_{z'} \vec{u}_{z'} \quad (2.4)$$

et

$$\frac{d_{\mathcal{R}'} \vec{w}}{dt} = \dot{w}_{x'} \vec{u}_{x'} + \dot{w}_{y'} \vec{u}_{y'} + \dot{w}_{z'} \vec{u}_{z'}. \quad (2.5)$$

On peut également obtenir la dérivée de $\vec{w}$ dans $\mathcal{R}$ à partir des composantes de $\vec{w}$ dans $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{w}}{dt} &= \left(\dot{w}_{x'} \vec{u}_{x'} + w_{x'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} \right) + \left(\dot{w}_{y'} \vec{u}_{y'} + w_{y'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} \right) + \left(\dot{w}_{z'} \vec{u}_{z'} + w_{z'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt} \right). \\ &= \frac{d_{\mathcal{R}'} \vec{w}}{dt} + \left(w_{x'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} + w_{y'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} + w_{z'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les termes $w_{x'} d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}/dt$, etc. ne sont nuls que si les vecteurs $\vec{u}_{x'}$, etc. sont fixes dans le référentiel $\mathcal{R}$ quand t varie, et donc, en général, $d_{\mathcal{R}'} \vec{w}/dt \neq d_{\mathcal{R}} \vec{w}/dt$.

Le vecteur position dans $\mathcal{R}$ est $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, et le vecteur position dans $\mathcal{R}'$ est $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$. Si $O = O'$, alors évidemment $\vec{r} = \vec{r}'$. Pour obtenir la vitesse dans $\mathcal{R}$, on écrit $\vec{v} = d_{\mathcal{R}} \vec{r}/dt$, et dans $\mathcal{R}'$ on écrit $\vec{v}' = d_{\mathcal{R}'} \vec{r}'/dt$. Même si $O = O'$ et $\vec{r} = \vec{r}'$, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont différents : leurs composantes dans une base donnée ne sont pas identiques deux à deux.

2.1.2 Vecteur vitesse angulaire de rotation

Le vecteur $\vec{u}_{x'}$ étant de norme constante, et ce dans tout référentiel, $d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}/dt$ est perpendiculaire à $\vec{u}_{x'}$. Il existe donc des réels $c_{1,2}(t)$ et $c_{1,3}(t)$ tels que

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} = c_{1,2} \vec{u}_{y'} + c_{1,3} \vec{u}_{z'}. \quad (2.7)$$

Pour la même raison, il existe des nombres $c_{2,1}(t)$, $c_{2,3}(t)$, $c_{3,1}(t)$ et $c_{3,2}(t)$ tels que

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} = c_{2,1} \vec{u}_{x'} + c_{2,3} \vec{u}_{z'}, \quad \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt} = c_{3,1} \vec{u}_{x'} + c_{3,2} \vec{u}_{y'}. \quad (2.8)$$

En dérivant la relation $\vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_{y'} = 0$ par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ et en utilisant (2.7) et (2.8), on obtient

$$0 = \frac{d_{\mathcal{R}}}{dt} (\vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_{y'}) = \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} \cdot \vec{u}_{y'} + \vec{u}_{x'} \cdot \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} = c_{1,2} + c_{2,1}. \quad (2.9)$$

De même, $c_{1,3} + c_{3,1} = 0$ et $c_{2,3} + c_{3,2} = 0$.

Posons $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = c_{2,3} \vec{u}_{x'} + c_{3,1} \vec{u}_{y'} + c_{1,2} \vec{u}_{z'}$. On constate que

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{x'} &= -c_{3,1} \vec{u}_{z'} + c_{1,2} \vec{u}_{y'} = \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt}, \\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{y'} &= c_{2,3} \vec{u}_{z'} - c_{1,2} \vec{u}_{x'} = \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt}, \\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{z'} &= -c_{2,3} \vec{u}_{y'} + c_{3,1} \vec{u}_{x'} = \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On en déduit que pour un vecteur $\vec{w} = w_{x'} \vec{u}_{x'} + w_{y'} \vec{u}_{y'} + w_{z'} \vec{u}_{z'}$, on a

$$\begin{aligned} w_{x'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} + w_{y'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} + w_{z'} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt} &= w_{x'} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{x'} + w_{y'} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{y'} + w_{z'} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{z'} \\ &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (w_{x'} \vec{u}_{x'} + w_{y'} \vec{u}_{y'} + w_{z'} \vec{u}_{z'}) \\ &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{w}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En reportant (2.11) dans (2.6), on en déduit le résultat fondamental suivant :

Encadré 2.2 : Formule de Bour

Pour un vecteur $\vec{w}$ quelconque, on a

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{w}}{dt} = \frac{d_{\mathcal{R}'} \vec{w}}{dt} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{w}, \quad (2.12)$$

où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le *vecteur vitesse angulaire instantanée de rotation* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Nous l'appellerons plus simplement « [vecteur] vitesse angulaire » ou « [vecteur] vitesse de rotation » ci-après. En général, ce vecteur dépend du temps.

On peut aisément retrouver les composantes de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ en appliquant la relation (2.12) aux vecteurs de $\mathcal{R}'$. En effet,

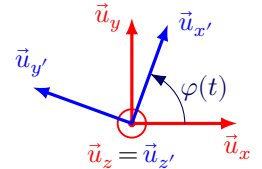
$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} = \underbrace{\frac{d_{\mathcal{R}'} \vec{u}_{x'}}{dt}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{x'}. \quad (2.13)$$

En faisant le produit scalaire avec $\vec{u}_{y'}$ et en utilisant la propriété d'invariance par permutation circulaire du produit mixte, voir la formule (A.11) dans les annexes, on obtient

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} \cdot \vec{u}_{y'} = (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{x'}) \cdot \vec{u}_{y'} = (\vec{u}_{x'} \wedge \vec{u}_{y'}) \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{u}_{z'} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \quad (2.14)$$

c'est-à-dire la composante de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ selon $\vec{u}_{z'}$. De même pour les autres composantes de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Exemple 2.2 : Pour clarifier la signification du vecteur vitesse angulaire, considérons le cas simple où $\mathcal{R}'$ tourne par rapport à $\mathcal{R}$ autour d'un axe de direction fixe — disons $\vec{u}_z$. On peut choisir le vecteur $\vec{u}_{z'}$ de telle sorte que $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$ à tout instant. Alors, $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ sont, respectivement, les images de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ par une rotation d'angle $\varphi(t)$ et d'axe $\vec{u}_z$. On a donc



$$\vec{u}_{x'} = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y, \quad \vec{u}_{y'} = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y, \quad \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z, \quad (2.15)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} &= -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{u}_x + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{u}_y = \dot{\varphi} \vec{u}_{y'}, \\ \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} &= -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{u}_x - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{u}_y = -\dot{\varphi} \vec{u}_{x'}, \\ \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Par identification avec (2.7) et (2.8), on obtient que $\omega_{1,2} = \dot{\varphi}$ et que $\omega_{2,3} = \omega_{3,1} = 0$, donc que

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \dot{\varphi}(t) \vec{u}_{z'}. \quad (2.17)$$

On vérifie sans difficulté que

$$\frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{u}_{x'}, \quad \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{u}_{y'}, \quad \frac{d_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{u}_{z'}. \quad (2.18)$$

On a bien retrouvé le résultat (2.10) dans ce cas particulier.

De manière générale, si $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ est non nul,

- la **direction** de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ est la direction de l'axe autour duquel $\mathcal{R}'$ tourne par rapport à $\mathcal{R}$ à l'instant t ;
- le **sens** de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ indique, selon la règle du tire-bouchon, dans quel sens cette rotation a lieu ;
- la **norme** de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$, habituellement exprimée en rad/s ou en tour/min, correspond à la notion usuelle de vitesse de rotation (ou vitesse angulaire) d'un objet.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, l'axe de rotation est parallèle à $\vec{u}_z$, la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique si $\dot{\varphi} > 0$ (vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ orienté selon $+\vec{u}_z$) et horaire (anti-trigonométrique) si $\dot{\varphi} < 0$ (vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ orienté selon $-\vec{u}_z$), et la norme de la vitesse angulaire est $|\dot{\varphi}|$.

Exemple 2.3 : Un disque vynile « 33 tours » est en train d'être joué sur une platine posée sur une table. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre, et $\mathcal{R}'$ le référentiel lié au disque. Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est vertical, comme l'axe de rotation. Un disque vynile tourne dans le sens anti-trigonométrique, le vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est donc dirigé vers le bas. Comme son nom l'indique, le disque fait 33 tours en une minute ; la norme de la vitesse angulaire vaut donc $|\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}| = 33 \text{ tour/min} = 33 \times 2\pi/60 \text{ rad/s}$.

La vitesse angulaire possède les propriétés suivantes, à démontrer en exercice

Encadré 2.3

Si $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ sont des référentiels,

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}, \quad \frac{d_{\mathcal{R}'}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}. \quad (2.19)$$

On obtient la dernière relation en appliquant (2.12) à $\vec{w} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et en remarquant que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

Exemple 2.4 : Vérifions à l'aide de (2.12) qu'il est inutile de préciser par rapport à quel référentiel on dérive le produit scalaire entre deux fonctions vectorielles de t :

$$\begin{aligned} \frac{d_{\mathcal{R}}(\vec{w} \cdot \vec{h})}{dt} &= \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{w}}{dt} \cdot \vec{h} + \vec{w} \cdot \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{h}}{dt} \\ &= \left(\frac{d_{\mathcal{R}'}\vec{w}}{dt} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{w} \right) \cdot \vec{h} + \vec{w} \cdot \left(\frac{d_{\mathcal{R}'}\vec{h}}{dt} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{h} \right) \\ &= \frac{d_{\mathcal{R}'}\vec{w}}{dt} \cdot \vec{h} + \vec{w} \cdot \frac{d_{\mathcal{R}'}\vec{h}}{dt} + (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{h} + \vec{w} \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{h}) \\ &= \frac{d_{\mathcal{R}'}(\vec{w} \cdot \vec{h})}{dt} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{h} + \vec{h} \wedge \vec{w})}_{=\vec{0}} = \frac{d_{\mathcal{R}'}(\vec{w} \cdot \vec{h})}{dt}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le résultat était évident, puisque $\vec{w} \cdot \vec{h} = w_x h_x + w_y h_y + w_z h_z$ et que les composantes d'un vecteur ont la même dérivée dans tout référentiel.

2.1.3 Composition des vitesses

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels. Exprimons la vitesse $\vec{v}$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de sa vitesse $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. Dans ce qui suit, O et O' désignent des points fixes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement ; $\vec{v}_{O'}$ est la vitesse de O' dans $\mathcal{R}$; $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est la vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

On a

$$\vec{v} = \frac{d_{\mathcal{R}}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d_{\mathcal{R}}\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d_{\mathcal{R}}\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d_{\mathcal{R}}\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d_{\mathcal{R}'}\overrightarrow{O'M}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}. \quad (2.21)$$

On obtient donc ceci :

Encadré 2.4 : Loi de composition des vitesses

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e, \quad (2.22)$$

où

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad (2.23)$$

est la **vitesse d'entraînement** du point M .

Les termes $\vec{v}_{O'}$ et $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ sont dus respectivement à la translation et à la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Cette vitesse d'entraînement est la vitesse dans $\mathcal{R}$ du **point coïncidant** avec M , c'est-à-dire du point fixe dans $\mathcal{R}'$ dont la position coïncide avec celle de M à l'instant considéré.

Remarque : Soit A un point qui, à un instant donné, a une vitesse nulle dans $\mathcal{R}'$. La loi de composition des vitesses donne, à cet instant,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A} \quad (2.24)$$

En faisant la différence entre cette équation et l'expression (2.23) de la vitesse d'entraînement du point M , on arrive à

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}. \quad (2.25)$$

Autrement dit, dans l'expression de $\vec{v}_e$, on peut remplacer O' par *n'importe quel point A dont la vitesse dans $\mathcal{R}'$ est nulle à l'instant considéré.*

2.1.4 Composition des accélérations

Exprimons maintenant l'accélération $\vec{a}$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de son accélération $\vec{a}'$ dans $\mathcal{R}'$. Notons $\vec{a}_{O'}$ l'accélération de O' dans $\mathcal{R}$. Nous aurons également besoin de l'**accélération angulaire**, c'est-à-dire de la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire ; rappelons que $d_{\mathcal{R}}\vec{\Omega}/dt = d_{\mathcal{R}'}\vec{\Omega}/dt$, voir (2.19) ; nous noterons $\dot{\vec{\Omega}}$ cette quantité dans ce qui suit.

On a

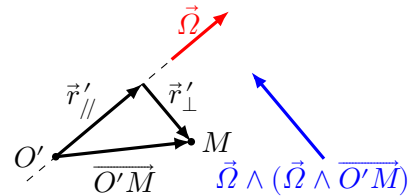
$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{v}}{dt} = \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{v}'}{dt} + \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d_{\mathcal{R}}\overrightarrow{O'M}}{dt}, \\ &= \frac{d_{\mathcal{R}'}\vec{v}'}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' + \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d_{\mathcal{R}'}\overrightarrow{O'M}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right), \\ &= \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' + \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}), \\ &= \vec{a}' + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}' + \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le terme $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ peut être réécrit en distinguant dans $\overrightarrow{O'M}$ la composante $\vec{r}'_{\parallel}$ parallèle à $\vec{\Omega}$ de la composante $\vec{r}'_{\perp}$ perpendiculaire à ce vecteur. Comme $\overrightarrow{O'M} = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$, on a

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) &= \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge [\vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}]) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}'_{\perp}), \\ &= \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'_{\perp}) - \vec{r}'_{\perp} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}) = -\vec{\Omega}^2 \vec{r}'_{\perp}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

où l'on a utilisé le développement (A.5) du double produit vectoriel. Le terme $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ de l'accélération est donc perpendiculaire à l'axe $(O', \vec{\Omega})$ et dirigé vers cet axe. On l'appelle **accélération centripète**, c'est-à-dire « tournée vers le centre » (vers l'axe, plus exactement). Celle-ci est en outre proportionnelle à la distance $\|\vec{r}'_{\perp}\|$ à l'axe.

En regroupant et réordonnant les termes, on a donc la relation suivante :



Encadré 2.5 : Loi de composition des accélérations

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (2.28)$$

où

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad (2.29)$$

est l'**accélération d'entraînement** de M et

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' \quad (2.30)$$

est son **accélération de Coriolis** (ou **accélération complémentaire**).

Par ailleurs, dans le terme $\vec{a}_e$, on a l'égalité suivante :

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = -\vec{\Omega}^2 \vec{r}'_{\perp}, \quad (2.31)$$

où $\vec{r}'_{\perp}$ est la composante perpendiculaire à $\vec{\Omega}$ de $\overrightarrow{O'M}$.

Remarque 1 : Comme pour la vitesse d'entraînement, on peut remplacer O' par n'importe quel point fixe de $\mathcal{R}'$ dans l'expression de $\vec{a}_e$.

Remarque 2 : L'accélération d'entraînement est l'accélération dans $\mathcal{R}$ du point coïncident (voir définition plus haut).

2.1.5 Cas particulier : référentiels en translation

Si $\vec{\Omega} = \vec{0}$, le référentiel $\mathcal{R}'$ est dit **en translation** par rapport à $\mathcal{R}$. Dans ce cas, on a pour un vecteur $\vec{w}$ quelconque $d_{\mathcal{R}}\vec{w}/dt = d_{\mathcal{R}'}\vec{w}/dt$ (et on pourrait écrire, sans ambiguïté, $\dot{\vec{w}}$), et les lois de composition des vitesses et accélérations se réduisent aux lois d'additions suivantes :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}, \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'}. \quad (2.32)$$

Si, en outre, $\vec{v}_{O'}$ est une constante (vectorielle), alors $\mathcal{R}'$ est dit **en translation rectiligne uniforme** par rapport à $\mathcal{R}$. On a alors $\vec{a} = \vec{a}'$.

2.1.6 Axe instantané de rotation

Pour un objet tel qu'un disque tournant sur un tourne-disque, la notion d'axe de rotation est claire ; cette notion peut être généralisée dans le cas d'un changement de référentiel tournant (tel que $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$), et on parlera de l'axe de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Cependant, dans le cas général, l'axe de rotation n'est pas simple à définir, et il peut varier en fonction du temps. On parlera donc d'axe *instantané* de rotation. On peut démontrer le résultat suivant :

Encadré 2.6 : Axe instantané de rotation

Lorsque $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$, il existe à chaque instant une droite (Δ) , appelée **axe instantané de rotation** de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ tel que, pour tout point A de cette droite

- La vitesse de A dans $\mathcal{R}'$ est nulle,
- La vitesse de A dans $\mathcal{R}$ est colinéaire à $\vec{\Omega}$.

Tous les points de (Δ) ont la même vitesse dans $\mathcal{R}$.

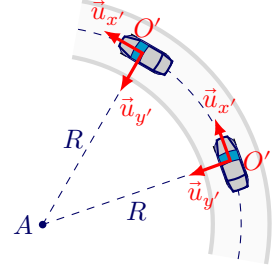
Remarque 1 : Les axes instantanés de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ ou de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ sont confondus.

Remarque 2 : En particulier, si un point A a une vitesse nulle à la fois dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, il est sur l'axe instantané de rotation.

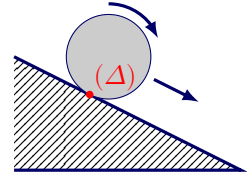
Si on considère un point M fixe dans $\mathcal{R}'$, sa vitesse dans $\mathcal{R}$ s'écrit $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$ pour n'importe quel autre point A fixe dans $\mathcal{R}'$. Si on choisit A sur l'axe instantané de rotation (Δ) ,

on voit que le premier terme, colinéaire à $\vec{\Omega}$, est un terme de translation selon (Δ) , alors que le deuxième terme, perpendiculaire à $\vec{\Omega}$, représente la rotation de M autour de l'axe (Δ) . En particulier, si M est égale sur l'axe (Δ) , on voit bien que $\vec{v}_M = \vec{v}_A$.

Exemple 2.5 : Considérons une voiture qui prend un virage, comme sur la première page de ce chapitre, et supposons que la trajectoire de la voiture soit un arc de cercle parfait de rayon R . Alors, avec les notations de la figure, le point A défini par $\overrightarrow{O'A} = R\vec{u}_{y'}$ est fixe à la fois dans $\mathcal{R}$ (référentiel terrestre) et $\mathcal{R}'$ (référentiel de la voiture) ; ce point appartient donc à l'axe de rotation. Plus précisément, l'axe de rotation est la droite $(A, \vec{u}_z)$ et, pour tout point M , on a $\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$. Dans ce cas particulier, l'axe de rotation est fixe, mais si la voiture n'avait pas une trajectoire parfaitement circulaire, ce ne serait pas le cas.



Exemple 2.6 : On considère un cylindre qui roule sans glisser sur un plan incliné. À chaque instant, les points du cylindre en contact avec le plan sont immobiles à la fois dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au plan, et dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au cylindre. On en déduit que cette ligne de contact constitue l'axe instantané de rotation ; en particulier, cet axe n'est fixe ni dans $\mathcal{R}$, ni dans $\mathcal{R}'$.



2.2 Dynamique dans un référentiel non galiléen

2.2.1 Forces d'inertie

Soient $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'$ un référentiel non galiléen. D'après (2.28),

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (2.33)$$

où $\vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$ sont les accélérations d'entraînement et de Coriolis.

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces de résultante $\vec{F}$, on a, d'après la deuxième loi de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.34)$$

On obtient ainsi le résultat suivant :

Encadré 2.7 : RFD dans un référentiel non galiléen

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e + \vec{f}_c, \quad \text{avec} \quad \vec{f}_e = -m\vec{a}_e \quad \text{et} \quad \vec{f}_c = -m\vec{a}_c, \quad (2.35)$$

où $\vec{f}_e$ est la **force d'inertie d'entraînement** et $\vec{f}_c$ est la **force d'inertie complémentaire** ou **force d'inertie de Coriolis**.

Remarque : les forces d'inerties sont parfois appelées **pseudo-forces** parce qu'elles ne correspondent pas à des interactions entre corps. Autrement dit, une force d'interaction $\vec{F}$ est exercée sur le système par *quelque chose*, alors qu'aucun objet n'est à l'origine des forces inertielles.

Exemple 2.7 : On reprend l'exemple 2.5 d'une voiture parcourant un virage circulaire à vitesse de norme constante. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la voiture, la force inertielle d'entraînement $\vec{f}_e$ agissant sur un point M de masse m s'écrit

$$\vec{f}_e = -m[\vec{a}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M}]. \quad (2.36)$$

Comme $\vec{\Omega}$ est constant, le dernier terme est nul. Par ailleurs, on peut remplacer O' dans cette expression par n'importe quel point fixe dans $\mathcal{R}'$; on décide de remplacer O' par le point A qui est à l'intersection du sol et de l'axe de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\vec{f}_e = -m[\vec{a}_A + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM})]. \quad (2.37)$$

Le point A est fixe non seulement dans $\mathcal{R}'$, mais aussi dans $\mathcal{R}$. Le premier terme est donc nul. Le dernier terme s'écrit aussi $-\Omega^2 \overrightarrow{AM}_\perp$, où $\overrightarrow{AM}_\perp$ est la partie de $\overrightarrow{AM}$ qui est perpendiculaire à $\vec{\Omega}$, mais ici on a

tout simplement $\overrightarrow{AM}_\perp = \overrightarrow{AM}$. Finalement, on obtient

$$\vec{f}_e = m\Omega^2 \overrightarrow{AM}. \quad (2.38)$$

Dans ce cas particulier, cette force, dirigée de manière radiale vers l'extérieur du cercle, s'appelle la **force centrifuge**.

Tous les théorèmes énoncés pour des référentiels galiléens sont valables pour des référentiels non galiléens à condition d'ajouter les forces d'inertie $\vec{f}_e$ et $\vec{f}_c$ aux forces dues à des interactions ($\vec{F}$).

Par exemple, si A est un point fixe dans $\mathcal{R}'$, le théorème du moment cinétique pour un point matériel M s'énonce

$$\frac{d_{\mathcal{R}'} \vec{L}'_A}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{F} + \vec{f}_e + \vec{f}_c), \quad (2.39)$$

où $\vec{L}'_A = m \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}'$.

Il est inutile de tenir compte de la force d'inertie de Coriolis dans le théorème de l'énergie cinétique car

$$\delta_{\mathcal{R}'} W(\vec{f}_c) = \vec{f}_c \cdot \vec{v}' dt = -2m \underbrace{(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}') \cdot \vec{v}'}_{=0} dt = 0. \quad (2.40)$$

Par contre, en général, la force d'inertie d'entraînement travaille.

2.2.2 Application au référentiel terrestre

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen, par exemple le référentiel de Copernic, associé à un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dont l'origine O est le centre d'inertie du système solaire.

Notons $\mathcal{R}'$ le référentiel terrestre associé à un repère $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ avec O' au centre de la Terre et $(O', \vec{u}_{z'})$ selon l'axe de rotation de la Terre.

La Terre tourne sur elle-même à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ de norme constante 1 tour/jour par rapport au référentiel géocentrique (dans lequel le repère $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est fixe).^{*1}

Dans le référentiel de Copernic, s'ajoute à ce mouvement de rotation le mouvement de révolution du centre O' de la Terre autour du centre d'inertie O du système solaire.

Soit M un point matériel de masse m proche de la surface terrestre. Notons (r, θ, φ) ses coordonnées sphériques : r est la distance de M au centre de la Terre, φ sa longitude et θ sa colatitude. Nous utiliserons également la distance ρ entre M et l'axe de rotation $(O', \vec{u}_{z'})$, comme en coordonnées cylindriques, et la latitude $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ du point M .

Le mouvement de ce point dans le référentiel terrestre est déterminé par

$$m \vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e + \vec{f}_c = \vec{F} - m \left(\vec{a}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}] \right) - m (2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}'), \quad (2.41)$$

où $\vec{F}$ représente les forces d'interaction sur ce point. On peut décomposer $\vec{F}$ en plusieurs termes :

- la force gravitationnelle exercée par la Terre (T) sur M , $\vec{F}_{T \rightarrow M}$;
- les forces gravitationnelles exercées par les autres corps, principalement le Soleil (S) et la Lune (L) : $\vec{F}_{S \rightarrow M}$ et $\vec{F}_{L \rightarrow M}$;
- toutes les autres forces, $\vec{F}_{\text{autres}}$.

La relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}'$ s'écrit alors de la manière suivante :

1. La direction de l'axe de rotation de la Terre tourne en fait autour de l'axe perpendiculaire à l'écliptique avec une période d'environ 26 000 ans (phénomène de **précession des équinoxes**) ; l'étoile Polaire (à $\approx 1^\circ$ du pôle Nord actuellement) ne méritera donc plus son nom dans quelques milliers d'années.

À plus longue échelle, la rotation de la Terre ralentit à cause des marées.

Encadré 2.8

$$\begin{aligned}
m \vec{a}' = & \vec{F}_{T \rightarrow M} - m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) & (\text{force de pesanteur}) \\
& - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' & (\text{force de Coriolis}) \\
& + \vec{F}_{S \rightarrow M} + \vec{F}_{L \rightarrow M} - m \vec{a}_{O'} & (\text{force de marée}) \\
& + \vec{F}_{\text{autres}}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Force de pesanteur

Intéressons-nous d'abord au terme de force de pesanteur, ou poids, $\vec{P}$. Supposons la Terre sphérique. Notons $\mathcal{M}_T$ sa masse et R son rayon. On a $r \approx R$ et

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = -\frac{G \mathcal{M}_T m}{R^2} \vec{u}_r = -m g_0 \vec{u}_r, \tag{2.43}$$

où

$$g_0 = \frac{G \mathcal{M}_T}{R^2} = 9,8 \text{ m/s}^2. \tag{2.44}$$

Cependant, la Terre n'est pas exactement sphérique^{*2} et g_0 varie entre 9,83 aux pôles et 9,81 m/s² à l'équateur.

Par ailleurs, on sait que

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = -\vec{\Omega}^2 \rho \vec{u}_\rho = -\vec{\Omega}^2 R \cos \lambda \vec{u}_\rho, \tag{2.45}$$

où $\vec{u}_\rho$ est le vecteur habituel des coordonnées cylindriques, voir l'encadré 2.5, et où on a utilisé $\rho = r \cos \lambda \simeq R \cos \lambda$. On obtient finalement que

$$\vec{P} = m \vec{g} \tag{2.46}$$

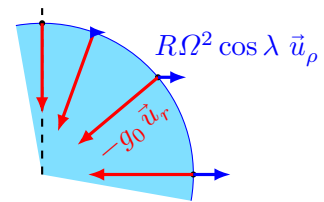
avec

$$\vec{g} = -g_0 \vec{u}_r + R \Omega^2 \cos \lambda \vec{u}_\rho. \tag{2.47}$$

Cette quantité est **l'accélération de la pesanteur**. Celle-ci comprend un terme dominant dû à l'attraction de la Terre, dirigé vers le centre de la Terre, et un terme correctif dû à la force centrifuge, perpendiculaire à l'axe des pôles et dirigé vers l'extérieur.

Le terme centrifuge est nul aux pôles ($\lambda = \pm\pi/2$) et est maximal à l'équateur ($\lambda = 0$). La verticale, c'est-à-dire la direction de $\vec{g}$, n'est rigoureusement dirigée vers le centre de la Terre qu'à l'équateur (on a alors $\vec{u}_\rho = \vec{u}_r$) et aux pôles (le terme centrifuge est alors nul).

Aux pôles, la norme $g(\lambda)$ de $\vec{g}$ vaut $g(\pm\pi/2) = g_0 \simeq 9,83 \text{ m/s}^2$. À l'équateur, $g(0) = g_0 - R \Omega^2 \simeq 9,78 \text{ m/s}^2$.

**Force de Coriolis et déviation vers l'est**

Si M n'est pas immobile dans $\mathcal{R}'$, on doit tenir compte de la force de Coriolis. Étudions le cas où M a un mouvement vertical vers le bas ($\dot{r} < 0$, $\dot{\varphi} \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$). On a alors

$$\vec{v}' \approx \dot{r} \vec{u}_r \tag{2.48}$$

2. C'est un ellipsoïde aplati aux pôles. Cet aplatissement résulte d'ailleurs de l'effet sur la Terre, lorsqu'elle se formait et n'était pas encore rigide, de la force centrifuge due à sa rotation. La distance des pôles au centre de la Terre est inférieure d'environ 1/300 à celle de l'équateur au centre de la Terre.

et

$$\vec{f}_c = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = -2m \Omega \vec{u}_{z'} \wedge \dot{r} \vec{u}_r. \quad (2.49)$$

Or

$$\vec{u}_{z'} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta, \quad (2.50)$$

d'où

$$\vec{f}_c = -2m \Omega \dot{r} (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) \wedge \vec{u}_r = -2m \Omega \dot{r} \cos \theta \vec{u}_\varphi. \quad (2.51)$$

Comme $\dot{r} < 0$, la force de Coriolis est dirigée selon $\vec{u}_\varphi$: M est donc dévié vers l'est.

Force et phénomène de marée

Nous tenons ici compte de l'attraction exercée par le Soleil et la Lune. On a

$$\vec{F}_{S \rightarrow M} = G \mathcal{M}_S m \frac{\overrightarrow{MS}}{MS^3} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{L \rightarrow M} = G \mathcal{M}_L m \frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3}, \quad (2.52)$$

où $\mathcal{M}_S$ et $\mathcal{M}_L$ sont, respectivement, la masse du Soleil et celle de la Lune.

Nous verrons au chapitre suivant (équation 3.17) que le mouvement du centre de masse de la Terre, O' , est le même que celui qu'aurait un point matériel situé en O' et concentrant toute la masse $\mathcal{M}_T$ de la Terre. On a donc

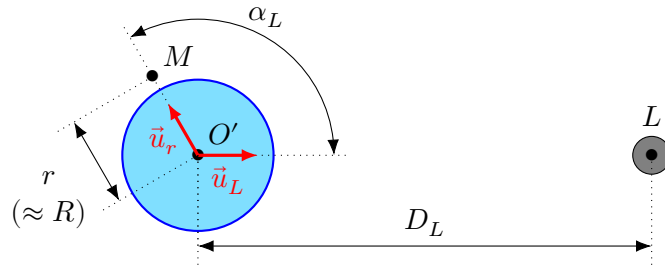
$$\mathcal{M}_T \vec{a}_{O'} = \vec{F}_{S \rightarrow T} + \vec{F}_{L \rightarrow T} = G \mathcal{M}_S \mathcal{M}_T \frac{\overrightarrow{O'S}}{O'S^3} + G \mathcal{M}_L \mathcal{M}_T \frac{\overrightarrow{O'L}}{O'L^3}, \quad (2.53)$$

d'où

$$\vec{F}_{S \rightarrow M} + \vec{F}_{L \rightarrow M} - m \vec{a}_{O'} = G \mathcal{M}_S m \left(\frac{\overrightarrow{MS}}{MS^3} - \frac{\overrightarrow{O'S}}{O'S^3} \right) + G \mathcal{M}_L m \left(\frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} - \frac{\overrightarrow{O'L}}{O'L^3} \right). \quad (2.54)$$

Le premier terme du membre de droite est la force de marée $\vec{F}_S^{\text{marée}}$ due au Soleil ; le second est la force de marée $\vec{F}_L^{\text{marée}}$ due à la Lune.

Notons D_L (resp. D_S) la distance entre le centre de la Terre et la Lune (resp. le Soleil), $\vec{u}_L$ (resp. $\vec{u}_S$) le vecteur unitaire orienté du centre de la Terre vers la Lune (resp. le Soleil) et α_L (resp. α_S) l'angle $(\vec{u}_L, \vec{u}_r)$ (resp. $(\vec{u}_S, \vec{u}_r)$). Ces notations sont illustrées ci-dessous dans le cas de la Lune.



On a

$$\overrightarrow{O'L} = D_L \vec{u}_L \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'L} = -R \vec{u}_r + D_L \vec{u}_L, \quad (2.55)$$

d'où

$$\left(\frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} - \frac{\overrightarrow{O'L}}{O'L^3} \right) = -\frac{R}{ML^3} \vec{u}_r + D_L \left(\frac{1}{ML^3} - \frac{1}{D_L^3} \right) \vec{u}_L. \quad (2.56)$$

Comme

$$ML = (\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{ML})^{1/2} = (R^2 - 2RD_L \vec{u}_r \cdot \vec{u}_L + D_L^2)^{1/2} = D_L \left(1 - 2 \frac{R}{D_L} \cos \alpha_L + \frac{R^2}{D_L^2} \right)^{1/2}, \quad (2.57)$$

on obtient avec le développement limité $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$ pour x au voisinage de 0 que

$$\frac{1}{ML^3} = \frac{1}{D_L^3} \left(1 - 2 \frac{R}{D_L} \cos \alpha_L + \frac{R^2}{D_L^2} \right)^{-3/2} = \frac{1}{D_L^3} \left(1 + 3 \frac{R}{D_L} \cos \alpha_L + \mathcal{O} \left[\frac{R^2}{D_L^2} \right] \right). \quad (2.58)$$

On reporte dans (2.56), et on ne garde que les termes d'ordre R/D_L^3 , en négligeant les termes plus petits. :

$$\left(\frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} - \frac{\overrightarrow{O'L}}{O'L^3} \right) \approx \frac{R}{D_L^3} (-\vec{u}_r + 3 \cos \alpha_L \vec{u}_L). \quad (2.59)$$

De même en remplaçant L par S , donc

$$\begin{aligned} \vec{F}_L^{\text{marée}} &\approx G \mathcal{M}_L m \frac{R}{D_L^3} (-\vec{u}_r + 3 \cos \alpha_L \vec{u}_L), \\ \vec{F}_S^{\text{marée}} &\approx G \mathcal{M}_S m \frac{R}{D_S^3} (-\vec{u}_r + 3 \cos \alpha_S \vec{u}_S). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Les forces de marée sont en R/D^3 , et donc très faibles comparativement aux forces d'attraction en $1/D^2$. Une application numérique donne

$$G \mathcal{M}_L \frac{R}{D_L^3} \simeq 5,7 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2, \quad G \mathcal{M}_S \frac{R}{D_S^3} \simeq 2,5 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2, \quad (2.61)$$

à comparer à l'accélération de la pesanteur $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$. Comme $D_L \ll D_S$, la force de marée due à la lune est supérieure à la force de marée d'origine solaire, alors que l'attraction due au Soleil est bien supérieure à celle de la Lune.

Intéressons-nous à la force de marée exercée par la Lune. Lorsque $\alpha_L = 0$ (la Lune est alors au zénith du point M de la surface terrestre), $\vec{u}_L = \vec{u}_r$ et $\cos \alpha_L = 1$. De même, lorsque $\alpha_L = \pi$ (la Lune est alors au nadir de M), $\vec{u}_L = -\vec{u}_r$ et $\cos \alpha_L = -1$. Dans les deux cas, la Lune, le centre de la Terre et le point M sont alignés et l'on a

$$\vec{F}_L^{\text{marée}} = G \mathcal{M}_L m \frac{2R}{D_L^3} \vec{u}_r. \quad (2.62)$$

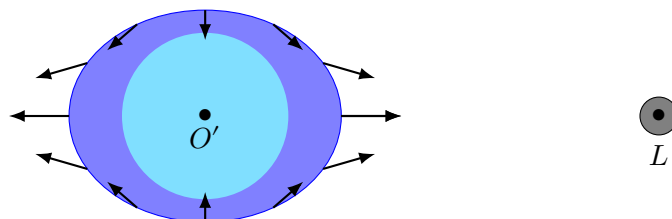
La force de marée tend donc dans cette configuration à éloigner M du centre de la Terre.

En revanche, quand $\alpha_L = \pi/2$, c.-à-d. quand M appartient au grand cercle de centre O' perpendiculaire à $\vec{u}_L$, on a $\cos \alpha_L = 0$, donc

$$\vec{F}_L^{\text{marée}} = -G \mathcal{M}_L m \frac{R}{D_L^3} \vec{u}_r. \quad (2.63)$$

La force de marée tend alors à rapprocher M du centre de la Terre.

La force de marée a peu d'effet sur les points de la croûte terrestre. N'étant pas rigides, les océans sont bien plus sensibles aux marées que les continents. Vu ce qui précède, on comprend qu'ils tendent à prendre la forme d'un ellipsoïde dont le grand axe est aligné avec la Lune : les points à $\alpha_L = 0$ ou π sont à marée haute (pleine mer) ; ceux à $\alpha_L = \pi/2$ sont à marée basse (basse mer). Le phénomène est illustré sur la figure ci-dessous, où les flèches représentent les forces de marée exercées par la Lune sur les océans terrestres (en bleu foncé). (Échelles non respectées !)



À cause de la rotation de la Terre, chaque point d'un océan subit deux pleines mers et deux basses mers par jour ^{*3}.

Si la Terre, la Lune et le Soleil sont alignés, l'effet du Soleil s'ajoute à celui de la Lune : on parle alors de marées de vives eaux (coefficient de marée maximal) ; les marées hautes sont particulièrement hautes, les marées basses particulièrement basses. À l'inverse, quand la Terre, la Lune et le Soleil sont en quadrature ($(\vec{u}_L, \vec{u}_S) = \pm\pi/2$), l'effet du Soleil s'oppose à celui de la Lune : on parle alors de marées de mortes eaux (coefficient de marée minimal) ; l'amplitude des marées est alors faible. En raison de la révolution de la Lune autour de la Terre, il y a typiquement deux périodes de vives eaux (à la pleine Lune et à la nouvelle Lune) et deux périodes de mortes eaux (aux premier et dernier quartiers lunaires) par mois.

3. En fait, à cause de la révolution de la Lune autour de la Terre, la période du phénomène est en moyenne de 24 h 52 min. En outre, les océans mettant un certain temps à réagir, la marée haute se produit généralement après le passage de la Lune au méridien ou à l'antiméridien. Enfin, ce modèle ne décrit pas correctement la réalité près des côtes ou dans les mers fermées et les baies ; il décrit l'excitation (la force de marée) imposée aux océans, pas la réponse de ceux-ci à cette excitation (la hauteur de l'eau).

Chapitre 3

Systèmes de points matériels

Dans ce chapitre on considère en toute généralité un système composé de N points matériels. Le système peut par exemple être un solide ou un fluide, et les N points matériels sont alors tous les atomes du système; N est en ce cas très grand. Mais on peut aussi s'intéresser à quelques particules en interaction, avec N valant deux ou trois.

Nous allons introduire les notions de centre de masse, d'impulsion, d'énergie cinétique et de moment cinétique du système, puis établir en toute généralité les lois reliant ces quantités. En application, nous traiterons les chocs et les systèmes à masse variable.

3.1 Définitions et notations

On considère un système constitué de N points matériels, et on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} M_\alpha : & \text{ position du point } \alpha, & \vec{r}_\alpha = \overrightarrow{OM_\alpha} : & \text{ vecteur position du point } \alpha, \\ \vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha : & \text{ vitesse du point } \alpha, & \vec{a}_\alpha = \dot{\vec{v}}_\alpha : & \text{ accélération du point } \alpha, \\ m_\alpha : & \text{ masse du point } \alpha, & \vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha : & \text{ impulsion du point } \alpha, \\ \vec{F}_\alpha : & \text{ résultante des forces sur le point } \alpha, \end{aligned}$$

où $\alpha = 1, \dots, N$ et où O est l'origine d'un repère fixe dans le référentiel d'étude.

Pour référence, nous utiliserons les notations suivantes pour les quantités qui concernent le système dans son ensemble. (Toutes ces quantités sont définies plus tard dans le chapitre.)

$$\begin{aligned} C : & \text{ position du centre de masse, } \vec{r}_C = \overrightarrow{OC} : & \text{ vecteur position du centre de masse,} \\ \vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C : & \text{ vitesse du centre de masse, } & \vec{a}_C = \dot{\vec{v}}_C : & \text{ accélération du centre de masse,} \\ m : & \text{ masse totale du système, } & \vec{p} = m\vec{v}_C : & \text{ impulsion totale du système.} \end{aligned}$$

On va pouvoir écrire les propriétés du système comme des sommes sur les points matériels α . Par exemple, la masse totale du système est donnée par

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{\alpha} m_\alpha. \quad (3.1)$$

On décompose la résultante des forces s'appliquant sur un point α de la manière suivante :

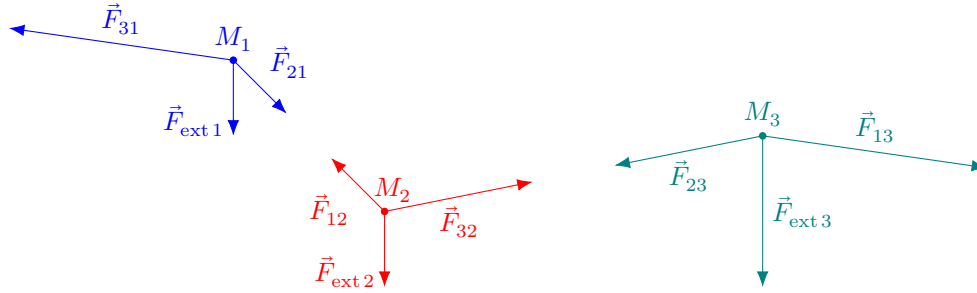
$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_{\text{ext } \alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\beta\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{F}_{\beta\alpha} & \text{ la force exercée par le point } \beta \text{ sur le point } \alpha, \\ \vec{F}_{\text{ext } \alpha} & \text{ la force exercée par l'extérieur sur le point } \alpha. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les forces d'un point du système sur un autre point du système ($\vec{F}_{\beta\alpha}$) sont les **forces intérieures** au système. Les autres forces ($\vec{F}_{\text{ext } \alpha}$) sont les **forces extérieures** s'appliquant sur le système.

On rappelle la troisième loi de Newton (1.29), que nous allons beaucoup utiliser :

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha} \quad \text{et} \quad \text{ces forces sont dirigées selon la droite } (M_\alpha M_\beta). \quad (3.3)$$

Exemple 3.1 : Considérons un système de $N = 3$ points et dessinons toutes les forces :



Dans cet exemple, les forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext } 1}$, $\vec{F}_{\text{ext } 2}$ et $\vec{F}_{\text{ext } 3}$ s'appliquant sur ces points sont leurs poids. (Le point 3 a une masse deux fois plus importante que les deux autres.) Les forces intérieures $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{23}$, $\vec{F}_{31}$ et $\vec{F}_{32}$ vérifient la troisième loi de Newton : entre deux points donnés, les forces sont opposées et dirigées selon la droite reliant les deux points. Les points 1 et 2 s'attirent, ainsi que les points 2 et 3, mais les points 1 et 3 se repoussent. On note

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{\text{ext } 1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}, \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{ext } 2} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}, \quad \vec{F}_3 = \vec{F}_{\text{ext } 3} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}. \quad (3.4)$$

Dans tout le chapitre, on se place dans un référentiel quelconque. Si le référentiel n'est pas galiléen, alors on suppose que les forces extérieures prennent en compte les forces d'inertie.

3.2 Théorème du centre de masse

3.2.1 Impulsion du système

On définit l'impulsion totale $\vec{p}$ du système comme étant la somme des impulsions des points matériels le constituant :

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}. \quad (3.5)$$

La dérivée de cette quantité s'écrit

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}, \quad (3.6)$$

où l'on a appliqué le principe fondamental de la dynamique à chacun des points matériels. On remplace maintenant $\vec{F}_{\alpha}$ par l'expression (3.2) et on remarque que **toutes les forces intérieures s'annulent**.

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\beta \alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.7)$$

En effet, le terme avec une double somme s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\beta \alpha} = & \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots \\ & + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots \\ & + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \dots \\ & + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \dots \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Mais, d'après le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton), on a $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$, $\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13} = \vec{0}$, etc. On voit que tous les termes de la double somme s'annulent deux à deux.

deux ^{*}1. On retiendra donc que la dérivée temporelle de l'impulsion totale est la somme des forces **extérieures** s'appliquant sur le système :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.9)$$

Exemple 3.2 : Considérons une voiture qui accélère sur une route horizontale. L'impulsion totale $\vec{p}$ est dans le sens de la marche et a une norme qui augmente, et donc sa dérivée $\frac{d}{dt}\vec{p}$ est dans le sens de la marche. Faisons le bilan des forces extérieures s'appliquant à la voiture : le poids $m\vec{g}$, la réaction normale $\vec{N}$ et la réaction tangentielle $\vec{T}$ (c'est-à-dire les frottements du sol sur la roue). On néglige la force de l'air sur la voiture. (Elle est effectivement négligeable à faible vitesse, et la conclusion ne change pas si on la rajoute.) On a alors

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}. \quad (3.10)$$

La seule force horizontale est $\vec{T}$. Par projection, on a donc $m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$ et $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{T}$. On voit donc que la force de frottement est dirigée dans le sens de la marche ; c'est cette force qui permet à la voiture d'avancer et si on la supprimait (en prenant des pneus lisses sur du verglas), la voiture n'avancerait pas. Dans cet exemple, ce serait une erreur de rajouter la « force du moteur » à l'équation (3.10) : cette force est en effet exercée par une partie du système sur une autre partie du système ; autrement dit, c'est une force intérieure.

3.2.2 Le centre de masse et la relation fondamentale de la dynamique

Réécrivons l'impulsion totale du système :

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{d}{dt} \vec{r}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{OM}_{\alpha} \right]. \quad (3.11)$$

On introduit le **centre de masse**, ou **centre de gravité**, ou **centre d'inertie** C du système par la relation

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{OM}_{\alpha} \quad (3.12)$$

(On rappelle que $m = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ est la masse totale du système.) Dans cette définition apparaît l'origine O du repère. On pourrait avoir l'impression que si on utilisait une origine O' différente, on obtiendrait un centre de masse C' différent de C par la relation $\overrightarrow{O'C'} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{O'M}_{\alpha}$. En fait, on a bien $C = C'$ (à démontrer en exercice). Autrement dit, la position du centre de masse ne dépend pas de l'origine choisie, mais est une propriété intrinsèque du système : la relation (3.12) reste valable si on remplace le point O par n'importe quel point. En particulier, en remplaçant O par C , on obtient

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{CM}_{\alpha} = \vec{0}. \quad (3.13)$$

Si le système est constitué de seulement deux points, alors cette relation devient $m_1 \overrightarrow{CM}_1 + m_2 \overrightarrow{CM}_2 = \vec{0}$, et l'on voit que C se trouve sur le segment $[M_1M_2]$, plus proche de la masse la plus lourde puisque le rapport des distances CM_1/CM_2 vaut m_2/m_1 .

En reportant (3.12) dans (3.11), on obtient

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} [m \vec{r}_C] = m \vec{v}_C, \quad (3.14)$$

où $\vec{v}_C$ est la vitesse du centre de masse. En combinant ce résultat avec (3.9), on arrive alors à

1. Formellement, on peut écrire $\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\beta\alpha} = \sum_{\beta} \sum_{\alpha \neq \beta} \vec{F}_{\beta\alpha} = - \sum_{\beta} \sum_{\alpha \neq \beta} \vec{F}_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\beta\alpha}$, où l'on a d'abord changé l'ordre des sommes, puis utilisé le troisième principe, puis inversé les variables muettes α et β . Le seul vecteur égal à son opposé est le vecteur nul, d'où le résultat.

Encadré 3.1 : théorème du centre de masse

- Le centre de masse C d'un système est le point tel que

$$m\overrightarrow{OC} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\overrightarrow{OM}_{\alpha}. \quad (3.15)$$

(On peut remplacer O par n'importe quel point.)

- L'impulsion totale d'un système de masse m est égale à l'impulsion qu'aurait un unique point matériel de masse m situé au centre de masse C de ce système :

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = m\vec{v}_C. \quad (3.16)$$

- Le mouvement du centre de masse est celui d'un point matériel de masse m soumis à la résultante (somme) des forces **extérieures** s'appliquant sur le système.

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = m\vec{a}_C = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) est connue sous les noms *théorème du centre de masse* (TCM), ou *théorème du centre d'inertie* (TCI), ou *théorème de la résultante cinétique* (TRC), ou *théorème de la quantité de mouvement* (TQM) ou *relation fondamentale de la dynamique* (RFD), ou *deuxième loi de Newton pour un système* (N2). La deuxième loi de Newton (1.28) qui est énoncée pour un point matériel est un postulat, un axiome, un principe, et est souvent appelé *principe fondamental de la dynamique*. La relation (3.17) a été démontrée et n'est donc pas un principe.

On peut énoncer les deux autres lois de Newton pour un système, à comparer avec l'encadré 1.8 :

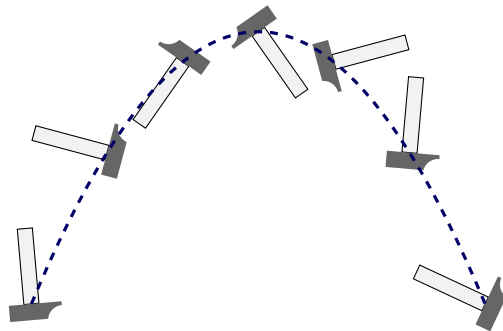
N1 : principe d'inertie Il existe des référentiels, dits *inertiels* ou *galiléens*, dans lesquels le mouvement du centre de masse d'un système isolé ou pseudo-isolé est rectiligne et uniforme.

N3 : principe des actions réciproques Si un système A exerce une force $\vec{F}_{AB}$ sur un système B , alors le système B exerce sur le système A une force $\vec{F}_{BA}$ opposée à $\vec{F}_{AB}$.

(Ici, $\vec{F}_{AB}$ est la résultante de toutes les forces microscopiques exercées par un point de A sur un point de B . La deuxième partie de ce principe pour les points matériels qui dit que ces forces sont portées par la droite reliant les deux points n'a aucun sens pour un système composé.)

Exemple 3.3 : On sait que la trajectoire d'un point matériel qui n'est soumis qu'à son propre poids est une parabole. Alors, la trajectoire du centre de masse d'un système dont la seule force extérieure est le poids doit être, également, une parabole.

On a représenté dans la figure ci-contre le mouvement d'un marteau dont le centre de masse se situe à l'intersection entre les parties en bois et en métal.



3.2.3 Décomposition du système en parties

Supposons maintenant que l'on décompose le système en deux parties disjointes A et B . On notera m_A et m_B les masses des parties, $\vec{p}_A$ et $\vec{p}_B$ leurs impulsions, C_A et C_B leurs centres de masse, etc. Toutes ces quantités sont définies pour chaque partie comme pour le système entier,

mais en ne prenant en compte que les points matériels de la partie. Par exemple

$$m_A = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha, \quad m_B = \sum_{\alpha \in B} m_\alpha, \quad \vec{p}_A = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha \vec{v}_\alpha, \quad \vec{p}_B = \sum_{\alpha \in B} m_\alpha \vec{v}_\alpha, \quad (3.18)$$

à comparer à (3.1) et (3.5). En particulier, on a évidemment

$$m = m_A + m_B, \quad \vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B. \quad (3.19)$$

Décomposons maintenant la somme de (3.12) qui définit le centre de masse selon les deux parties :

$$m \vec{OC} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{OM}_{\alpha} = \sum_{\alpha \in A} m_{\alpha} \vec{OM}_{\alpha} + \sum_{\alpha \in B} m_{\alpha} \vec{OM}_{\alpha}. \quad (3.20)$$

Mais, dans la dernière expression, la première somme est par définition $m_A \vec{OC}_A$, et la deuxième est $m_B \vec{OC}_B$. On a donc

$$m \vec{OC} = m_A \vec{OC}_A + m_B \vec{OC}_B. \quad (3.21)$$

Comme $m = m_A + m_B$, on voit donc que C est le centre de masse qu'auraient deux points matériels de masse m_A et m_B placés en C_A et C_B . Cette propriété se généralise facilement à une décomposition en un nombre arbitraire de parties :

Encadré 3.2

Considérons un système que l'on découpe en plusieurs parties. Alors

- L'impulsion totale du système est la somme des impulsions des parties.
- Le centre de masse du système est le même que le centre de masse obtenu en remplaçant chaque partie par un point matériel concentrant toute la masse de la partie en son centre de masse

Exemple 3.4 : On veut déterminer le centre de masse du système Terre-Lune. En supposant la Terre et la Lune à symétrie sphérique, le centre de masse de la Terre se trouve au centre de la Terre, et le centre de masse de la Lune se trouve au centre de la Lune. Pour calculer le centre de masse du système, on remplace la Terre et la Lune par des points matériels situés en leur centre et concentrant toute la masse de l'astre. Autrement dit, pour calculer le centre de masse de ce système (dessin à l'échelle) :



La Terre

La Lune •

on peut calculer le centre de masse du système où on a remplacé les astres par des points matériels :

$\times T$

$L \times$

Le centre de masse C du système est donc sur le segment $[TL]$. Comme la Terre a une masse 81,3 fois plus grande que celle de la Lune, on doit avoir $LC/TC = 81,3$. Comme par ailleurs $LC + TC = LT$, on obtient les expressions suivantes :

$$TC = \frac{1}{81,3 + 1} TL \quad \text{et} \quad LC = \frac{81,3}{81,3 + 1} TL.$$

La distance Terre-Lune TL varie entre 357×10^3 et 406×10^3 km ; on obtient que TC varie entre $4,3 \times 10^3$ et $4,9 \times 10^3$ km. On remarque que le centre de masse du système Terre-Lune se trouve à l'intérieur de la Terre.

3.2.4 Systèmes ouverts

Tous les résultats énoncés plus haut ne sont valables que pour des **systèmes fermés**, c'est-à-dire des systèmes qui ne gagnent ni ne perdent aucune particule au cours du temps. Pour un **système ouvert**, par exemple un système dont la masse varie, on ne peut pas directement appliquer la relation fondamentale de la dynamique.

Pour traiter un système ouvert, la seule solution est de se ramener à un système fermé. Nous allons voir sur l'exemple de la fusée comment procéder.

On considère une fusée dans l'espace qui accélère ^{§2} en éjectant par ses tuyères des gaz brûlés. La masse de la fusée, notée $m(t)$, diminue au cours du temps. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire pointé vers l'avant de la fusée et $\vec{v}(t)$ la vitesse de son centre de masse ^{§3}. On suppose que les tuyères sont parallèles à l'axe de la fusée et donc dirigées selon $-\vec{u}$. Notons que $\vec{v}(t)$ et $\vec{u}$ ne sont pas nécessairement colinéaires.

On ne peut écrire la relation fondamentale de la dynamique que pour un système fermé. Cependant, on peut changer de système à chaque instant. Soit un instant T et $\mathcal{S}$ le système *fermé* constitué de toutes les particules dans la fusée à l'instant T . Ce système a une masse (constante!) $m_{\mathcal{S}} = m(T)$. On considère ce système entre les instants T et $T + dt$.

La figure ci-contre représente la fusée aux instants T (en haut) et $T + dt$ (en bas). Le cadre en pointillés bleus symbolise le système $\mathcal{S}$. Pour $t = T$, le système $\mathcal{S}$ est par définition constitué de la fusée. Pour $t = T + dt$, le système $\mathcal{S}$ est constitué de la fusée *et de tous les gaz qui étaient encore dans la fusée à l'instant T* . Ces gaz ont une masse totale $m(T) - m(T + dt)$, égale à la masse $m_{\mathcal{S}} = m(T)$ du système moins la masse $m(T + dt)$ de la fusée à l'instant $T + dt$.

Écrivons maintenant l'impulsion totale du système $\mathcal{S}$; à l'instant T , on a simplement

$$\vec{p}(T) = m(T)\vec{v}(T). \quad (3.22)$$

À l'instant $T + dt$, c'est un peu plus compliqué. On sépare le système en deux parties : la fusée, de masse $m(T + dt)$ et de vitesse $\vec{v}(T + dt)$, et les gaz de masse $m(T) - m(T + dt)$. Supposons que les gaz soient éjectés à une vitesse U *par rapport à la fusée* : dans un référentiel lié à la fusée, les gaz ont une vitesse $-U\vec{u}$; dans le référentiel d'étude, leur vitesse est donc $\vec{v}(T) - U\vec{u}$, voir (2.22) ^{§4}. Comme l'impulsion totale d'un système est la somme des impulsions des parties,

$$\vec{p}(T + dt) = \underbrace{m(T + dt)\vec{v}(T + dt)}_{\text{impulsion de la fusée}} + \underbrace{[m(T) - m(T + dt)][\vec{v}(T) - U\vec{u}]}_{\text{impulsion des gaz}}. \quad (3.23)$$

On obtient alors

$$\frac{\vec{p}(T + dt) - \vec{p}(T)}{dt} = \frac{m(T + dt)\vec{v}(T + dt) - m(T)\vec{v}(T)}{dt} + \frac{m(T) - m(T + dt)}{dt}[\vec{v}(T) - U\vec{u}], \quad (3.24)$$

c'est-à-dire, en reconnaissant des dérivées :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \frac{dm}{dt}[\vec{v} - U\vec{u}] = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} U\vec{u}. \quad (3.25)$$

(Toutes les fonctions et dérivées sont implicitement prises au temps T .)

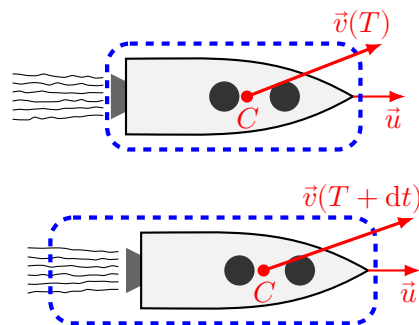
On peut maintenant appliquer le principe fondamental de la dynamique au système $\mathcal{S}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Longleftrightarrow \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dm}{dt} U\vec{u}, \quad (3.26)$$

2. En langage courant, « accélérer » signifie : « augmenter la norme de la vitesse », mais on rappelle qu'en physique cela signifie « changer le vecteur vitesse, en norme et/ou en direction. »

3. Remarque : le centre de masse bouge un peu par rapport à la fusée. Si les réservoirs de carburants sont près de l'arrière de la fusée, alors le centre de gravité se déplace vers l'avant de la fusée au fur et à mesure que les réservoirs se vident. Par conséquent, la vitesse du centre de masse n'est pas *exactement* égale à la vitesse de la pointe de la fusée.

4. Cette égalité n'est strictement exacte que si la fusée a un mouvement de translation, sans rotation, dans le référentiel d'étude. Si la fusée tournait, il faudrait encore ajouter la vitesse de la tuyère par rapport au centre de masse de la fusée. Ceci étant dit, comme l'ordre de grandeur de U est de quelques km/s, si cette vitesse supplémentaire due à la rotation de la fusée n'est pas négligeable, c'est que la fusée est en train d'exploser.



où $\vec{F}$ est la résultante des forces s'appliquant sur la fusée ; typiquement, il s'agit de forces gravitationnelles, et éventuellement de forces de frottement fluide (si la fusée est dans une atmosphère). Le terme $-\frac{dm}{dt}U\vec{u}$ est appelé **force de poussée**, mais ce n'est pas réellement une force.

On dit que la fusée exécute une manœuvre lorsque ses réacteurs sont allumés pendant un temps court afin de changer le vecteur vitesse. Supposons que l'on puisse négliger les forces extérieures $\vec{F}$ durant la manœuvre ; en divisant (3.26) par m et en intégrant, on obtient

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = \ln \frac{m_i}{m_f} U\vec{u}, \quad (3.27)$$

avec $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_f$ les vitesses initiale et finale (avant et après la manœuvre), et m_i et m_f les masses initiales et finales (c'est-à-dire que pour exécuter la manœuvre, il a fallu brûler une masse $m_i - m_f$ de carburant et comburant). Ce résultat est connu sous le nom « équation de Tsiolkovski » (« *rocket equation* » en anglais). Si une sonde spatiale a une masse « sèche » (c'est-à-dire avec des réservoirs vides) m_0 et une masse m_c de carburant, alors la sonde a la capacité d'effectuer des manœuvres pour un Δv total de $U \ln \frac{m_0 + m_c}{m_0}$, en une ou plusieurs fois. Cette mesure de Δv est la bonne manière d'indiquer le carburant disponible ; par exemple, le James Webb Telescope est parti avec un Δv de 150 m/s, en a dépensé 30 m/s pour se placer sur son orbite, et dépense environ 5 ou 6 m/s par an pour rester sur son orbite.

3.3 Théorème du moment cinétique

3.3.1 Moment cinétique et moment des forces

Le moment cinétique du point matériel α par rapport à un point géométrique A donné est $\overrightarrow{AM}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$ et le moment de la force $\vec{F}_\alpha$ s'appliquant sur le point matériel α par rapport au point A est $\overrightarrow{AM}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha$, voir (1.45). On a vu que *si le point A est fixe*, alors la dérivée temporelle du moment cinétique est égale au moment de la force, voir (1.46).

Pour un système, on définit le moment cinétique total par rapport au point A par

$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha, \quad (3.28)$$

et le moment total des forces par rapport au point A par

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha. \quad (3.29)$$

On a alors, par linéarité,

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_A = \vec{\mathcal{M}}_A \quad \text{si le point } A \text{ est fixe.} \quad (3.30)$$

Dans le calcul du moment des forces, on peut ignorer les forces intérieures. En effet, en utilisant la décomposition (3.2), on a

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge \vec{F}_{\beta \alpha}. \quad (3.31)$$

Montrons que la double somme est nulle. Pour cela, prenons (par exemple) les termes impliquant les points matériels 1 et 2, c'est-à-dire que l'on prend les termes ($\alpha = 1; \beta = 2$) et ($\alpha = 2; \beta = 1$) :

$$\overrightarrow{AM}_1 \wedge \vec{F}_{21} + \overrightarrow{AM}_2 \wedge \vec{F}_{12} = \overrightarrow{AM}_2 \wedge \vec{F}_{12} - \overrightarrow{AM}_1 \wedge \vec{F}_{12} = (\overrightarrow{AM}_2 - \overrightarrow{AM}_1) \wedge \vec{F}_{12} = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{12} = \vec{0}. \quad (3.32)$$

(On a utilisé que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ était colinéaire à $\overrightarrow{M_1 M_2}$.) Tous les termes dans la double somme de (3.31) s'annulent ainsi deux à deux, et il ne reste que la première somme. Finalement,

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.33)$$

3.3.2 Propriétés du moment cinétique

En écrivant $\overrightarrow{AM}_\alpha = \overrightarrow{BM}_\alpha - \overrightarrow{BA}$ dans (3.28) et (3.33), on arrive à montrer (exercice) que

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}, \quad \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.34)$$

(Résultat connu sous le nom « formule Babar », parce que la somme des forces extérieures $\sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}$ est parfois appelée la résultante $\vec{R}$ des forces extérieures.) En particulier,

- Si $\sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha} = \vec{0}$ (système pseudo-isolé), alors $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A$: le moment des forces ne dépend pas du point choisi.
- Si l'impulsion totale $\vec{p}$ est nulle, alors $\vec{L}_B = \vec{L}_A$: le moment cinétique ne dépend pas du point choisi.

Supposons que le point A soit fixe, mais que le point B ait une vitesse $\vec{v}_B$. On a alors $\frac{d}{dt} \overrightarrow{BA} = -\vec{v}_B$ et

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_B = \frac{d}{dt} \vec{L}_A - \vec{v}_B \wedge \vec{p} + \overrightarrow{BA} \wedge \frac{d}{dt} \vec{p}. \quad (3.35)$$

mais $\frac{d}{dt} \vec{L}_A = \vec{\mathcal{M}}_A$ (car le point A est fixe) et $\frac{d}{dt} \vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}$. On reconnaît alors $\vec{\mathcal{M}}_B$ dans la somme du premier et troisième termes et, finalement,

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_B = \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{v}_B \wedge \vec{p}. \quad (3.36)$$

On constate que $\frac{d}{dt} \vec{L}_B$ n'est, en général, pas égal à $\vec{\mathcal{M}}_B$ si B est mobile. Cependant, comme $\vec{p} = m\vec{v}_C$, on voit que si $B = C$, alors le terme supplémentaire est nul. Finalement, on retiendra ceci :

Encadré 3.3 : Théorème du moment cinétique pour un système

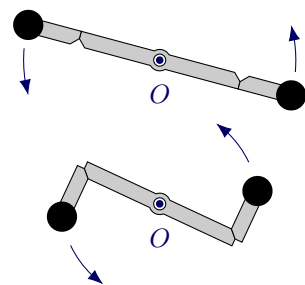
$$\frac{d}{dt} \vec{L}_A = \vec{\mathcal{M}}_A \quad \text{si } A \text{ est fixe ou si } A \text{ est le centre de masse du système,} \quad (3.37)$$

où le **moment cinétique** $\vec{L}_A$ et le **moment des forces** $\vec{\mathcal{M}}_A$ par rapport à A sont

$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}, \quad \vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_\alpha \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.38)$$

En un sens, le moment cinétique (*angular momentum* en anglais) est la « quantité de rotation » dans le système, de même manière que $\vec{p}$ est la « quantité de mouvement » (*linear momentum* en anglais). Si le système est une sphère solide homogène, la direction de $\vec{L}_C$ est celle de l'axe de rotation de la sphère ; pour un système moins symétrique, la relation entre moment cinétique et vecteur rotation est plus compliquée, comme nous le verrons dans le chapitre 4 consacré aux solides. Le moment des forces représente dans quelle mesure ces forces font tourner le système.

Exemple 3.5 : Considérons un mécanisme comme sur le schéma ci-contre : deux billes lourdes mais quasi ponctuelles sont attachées au bout de deux bras articulés disposés de manière symétrique autour d'un centre O . Le tout tourne librement dans un plan horizontal (le plan de la feuille) autour d'un axe fixe vertical (perpendiculaire à la feuille) placé en O . La masse des bras et autres pièces du mécanisme est négligeable devant la masse des billes. À un moment donné, les bras articulés se referment sous l'action d'un moteur disposé à l'intérieur du mécanisme ; on passe de la configuration 1 (en haut) à la configuration 2 (en bas)



On note ω la vitesse angulaire du système et a la distance entre une bille et O . On cherche la relation entre a_1, ω_1 (dans la configuration 1), a_2 et ω_2 (dans la configuration 2).

Notons A et B les positions des deux billes, et m_b la masse de chacune d'entre elles. Les seules forces extérieures s'appliquant sur le système sont les poids $\vec{P}_A$ et $\vec{P}_B$ des deux billes, et la réaction verticale $\vec{R}$ du support en O . (Il pourrait aussi y avoir des forces de frottements le long de l'axe qui ralentiraient la

rotation, mais on les suppose négligeables.) Le moment de ces trois forces par rapport au point O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) = \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_A) = \vec{OA} \wedge m_b \vec{g}, \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_B) = \vec{OB} \wedge m_b \vec{g}. \quad (3.39)$$

Comme à tout moment $\vec{OB} = -\vec{OA}$, on voit que **la somme des moments des forces extérieures est nulle**. On en déduit que **le moment cinétique du système est conservé**. En particulier, l'action du moteur qui déplie les bras ne change pas le moment cinétique, car il s'agit de forces intérieures au système.

Calculons le moment cinétique de la bille A par rapport au point O ; on se place en coordonnées cylindriques. On a $\vec{OA} = a \vec{u}_\rho$; la vitesse de la bille est $\frac{d}{dt} \vec{OA} = a\omega \vec{u}_\varphi$ (car $\dot{\varphi} = \omega$) et son moment cinétique est donc $a \vec{u}_\rho \wedge m_b a\omega \vec{u}_\varphi = m_b a^2 \omega \vec{u}_z$. On vérifie que la bille B a le même moment cinétique; le moment cinétique total du système est donc

$$\vec{L}_O = 2m_b a^2 \omega \vec{u}_z. \quad (3.40)$$

Cette quantité reste constante; on doit donc avoir $a_1^2 \omega_1 = a_2^2 \omega_2$.

3.4 Théorèmes de l'énergie

3.4.1 Théorème de l'énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un système comme la somme des énergies cinétiques de ses constituants :

$$E_c = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2. \quad (3.41)$$

(Remarque : pour un vecteur $\vec{u}$ quelconque, on utilise la convention que $\vec{u}^2$ signifie $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.)

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel (1.33), on arrive au **théorème de l'énergie cinétique pour un système** :

Encadré 3.4

Pour un système de points,

$$dE_c = \sum_{\alpha} \delta W_{\alpha} \quad \text{avec} \quad E_c = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 \quad \text{et} \quad \delta W_{\alpha} = \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}, \quad (3.42)$$

Sous forme intégrée, pour un système allant de l'état initial (I) à l'état final (F) :

$$\Delta E_c = E_c^{(F)} - E_c^{(I)} = \sum_{\alpha} W_{(I) \rightarrow (F)}(\vec{f}_{\alpha}) \quad \text{avec} \quad W_{(I) \rightarrow (F)}(\vec{f}_{\alpha}) = \int_{(I)}^{(F)} \delta W_{\alpha} = \int_{(I)}^{(F)} \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}. \quad (3.43)$$

Ici, (I) et (F) sont des **états du système**, pas des points. Décrire l'état du système revient à donner les positions et vitesses de toutes les particules.

On rappelle, comme dans la section 1.2.2, que $\int \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}$ est, pour chaque α , une intégrale sur la trajectoire suivie par le point α et que, malgré ce que laisse penser la notation, le travail $W_{(I) \rightarrow (F)}(\vec{f}_{\alpha})$ dépend non seulement des états initial (I) et final (F), mais également de la trajectoire effectivement suivie par la particule entre ces deux états.

3.4.2 Travail des forces intérieures

En établissant la relation fondamentale de la dynamique et le théorème du moment cinétique pour un système, on a vu que l'on pouvait ignorer les forces intérieures, parce que dans les deux cas, la contribution de la force $\vec{F}_{12}$ annulait la contribution de la force $\vec{F}_{21}$. Cependant, dans le théorème de l'énergie cinétique pour un système, **les travaux des forces intérieures ne s'annulent pas dans le cas général**; on dit que « les forces intérieures travaillent ». Plus précisément, on a le résultat suivant :

Encadré 3.5

On considère deux points matériels du système, par exemple les points 1 et 2.

- Si les forces $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ entre ces points ne sont pas nulles, et si la distance entre ces deux points varie, alors la somme des travaux de ces deux forces n'est pas nulle.
- Réciproquement, si la distance entre ces deux points reste constante, la somme des travaux des deux forces est nulle.

En effet, la somme des travaux de ces deux forces est

$$\delta W_1 + \delta W_2 = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_{12} \cdot d\overline{M_1 M_2}. \quad (3.44)$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire allant de M_1 vers M_2 ; on a alors $\overline{M_1 M_2} = M_1 M_2 \vec{u}$ et donc $d\overline{M_1 M_2} = dM_1 M_2 \vec{u} + M_1 M_2 d\vec{u}$. D'après la troisième loi de Newton (1.29), on peut également écrire $\vec{F}_{12} = F_{12} \vec{u}$ avec $F_{12} = \vec{F}_{12} \cdot \vec{u} = \pm \|\vec{F}_{12}\|$ selon le sens de la force. On obtient alors

$$\delta W_1 + \delta W_2 = F_{12} \vec{u} \cdot (dM_1 M_2 \vec{u} + M_1 M_2 d\vec{u}) = F_{12} dM_1 M_2 + F_{12} M_1 M_2 \vec{u} \cdot d\vec{u}. \quad (3.45)$$

Mais $\vec{u} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2} d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0$ puisque $\vec{u}$ est unitaire et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ est constant (voir l'encadré 1.5). On a donc finalement $\delta W_1 + \delta W_2 = F_{12} dM_1 M_2$ et on retrouve le résultat de l'encadré 3.5.

Exemple 3.6 : On reprend le problème de l'exemple 3.5 page 36. L'énergie cinétique du système est $2 \times \frac{1}{2} m_b (a\omega)^2$. Le rapport entre l'énergie cinétique finale E_{c2} et l'énergie cinétique initiale E_{c1} est $E_{c2}/E_{c1} = (a_2 \omega_2)^2 / (a_1 \omega_1)^2 = (a_1/a_2)^2$ (en utilisant $a_1^2 \omega_1 = a_2^2 \omega_2$). On voit donc que l'énergie cinétique augmente lors de la transformation : $\Delta E_c > 0$. D'après le théorème de l'énergie cinétique, la somme des travaux des forces est positive. Or, les forces extérieures (les deux poids et la réaction du support) ne travaillent pas, puisqu'elles sont verticales et que le mouvement est horizontal. On en déduit que le moteur (force intérieure) a fourni un travail au système.

De même, dans l'exemple 3.2 de la voiture page 31, l'énergie cinétique augmente parce que le moteur fournit un travail ; les forces extérieures ne travaillent pas ou ont un travail négatif. (La force de frottement sur les pneus a un travail nul quand la roue accroche bien la route (roulement sans glissement), et un travail négatif quand la roue est bloquée par les freins et dérape. En aucun cas une force de frottement ne peut fournir un travail positif.)

3.4.3 Interactions conservatives

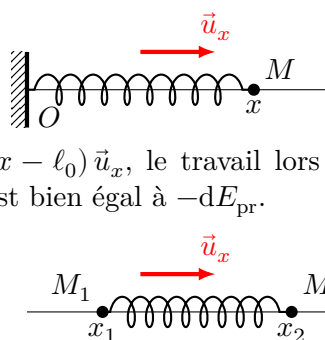
Pour un point matériel, on a rappelé section 1.2.2 qu'une force $\vec{f}$ telle que la force de rappel d'un ressort (pour prendre un exemple) était conservative, ce qui signifie que *si l'autre extrémité du ressort est fixe*, alors le travail de cette force sur le point matériel peut s'écrire $\delta W = -dE_{\text{pr}}$ avec $E_{\text{pr}} = \frac{1}{2} K(r - \ell_0)^2$ l'énergie potentielle associée. (K est la constante de raideur, ℓ_0 la longueur à vide et r la distance entre les deux extrémités.)

Ainsi, sur la figure ci-contre où un point matériel M se déplace sur la ligne, la longueur du ressort est $r = x$ et, puisque l'autre extrémité du ressort est fixe, le travail de la force du ressort sur M s'écrit $-dE_{\text{pr}}$, où $E_{\text{pr}} = \frac{1}{2} K(x - \ell_0)^2$ est l'énergie potentielle. Vérifions-le : la force exercée sur M est $\vec{f} = -K(x - \ell_0) \vec{u}_x$, le travail lors d'un déplacement $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$ est $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -K(x - \ell_0) dx$, qui est bien égal à $-dE_{\text{pr}}$.

Considérons maintenant un ressort reliant deux points matériels mobiles, mais contraints de se déplacer sur la ligne. Si on choisit comme système : {le point M_2 seul}, alors le travail de la force du ressort sur le système M_2 ne peut pas s'écrire à l'aide d'une énergie potentielle qui dépend seulement des positions x_1 et x_2 .

Si on choisit comme système : {les deux points M_1 et M_2 }, le ressort est à l'origine de deux forces intérieures : la force $\vec{f}_{12}$ de M_1 sur M_2 et la force $\vec{f}_{21}$ de M_2 sur M_1 . On vérifie alors que la somme des travaux de ces deux forces dérive de l'énergie potentielle du ressort :

$$\delta W(\vec{f}_{12}) + \delta W(\vec{f}_{21}) = -dE_{\text{pr}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{pr}} = \frac{1}{2} K(r - \ell_0)^2, \quad (3.46)$$



où $r = x_2 - x_1$ est la longueur du ressort. En effet, les forces sont $\vec{f}_{12} = -K(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{u}_x$ et $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} = K(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{u}_x$, les déplacements sont $d\vec{r}_1 = dx_1 \vec{u}_x$ et $d\vec{r}_2 = dx_2 \vec{u}_x$ et on obtient

$$\begin{aligned}\delta W(\vec{f}_{12}) &= \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = -K(x_2 - x_1 - \ell_0) dx_2, \\ \delta W(\vec{f}_{21}) &= \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_1 = K(x_2 - x_1 - \ell_0) dx_1.\end{aligned}\quad (3.47)$$

Comme $dE_p = K(x_2 - x_1 - \ell_0)(dx_2 - dx_1)$, on voit que (3.46) est bien vérifiée. ^{※5}

On voit donc que ce ne sont plus tellement les forces individuelles qui sont conservatives ou non, mais les *interactions* entre particules. En mécanique classique, une interaction élémentaire opère entre deux particules, et est modélisée par deux forces opposées, une sur chacune des particules. On retiendra donc :

Encadré 3.6

Une interaction entre deux points matériels α et β d'un système est dite **conservative** si la somme des travaux des deux forces correspondant à cette interaction s'écrit comme $-dE_p$ pour une certaine énergie potentielle E_p , également appelée **potentiel d'interaction** :

$$\delta W(\vec{f}_{\alpha\beta}) + \delta W(\vec{f}_{\beta\alpha}) = -dE_p. \quad (3.48)$$

Cette énergie potentielle est une fonction de la distance $r = \|\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha\|$ entre les deux points matériels.

Ainsi, les interactions gravitationnelle, coulombienne, et harmonique (ressorts) sont conservatives. Lorsqu'une interaction conservative a lieu entre un point matériel du système et un point extérieur, il y a deux possibilités :

- soit le point extérieur est immobile, auquel cas le travail de la force sur le système peut encore s'écrire $-dE_p$ pour l'énergie potentielle E_p associée ;
- soit le point extérieur est mobile, auquel cas le travail de la force sur le système est compliqué, et ne s'écrit pas simplement à l'aide d'une énergie potentielle.

Décomposons la résultante des forces $\vec{F}_\alpha$ s'appliquant sur le point α de la façon suivante,

$$\vec{F}_\alpha = \vec{f}_\alpha^c + \vec{f}_\alpha^{nc}, \quad (3.49)$$

où $\vec{f}_\alpha^c$ est la résultante de toutes les forces sur le point α , intérieures ou extérieures, participant à des interactions conservatives (avec l'autre point fixe dans le cas d'une force extérieure), et $\vec{f}_\alpha^{nc}$ la résultante de toutes les autres forces sur le point α . Alors, en appelant E_p l'énergie potentielle totale, c'est-à-dire la somme de toutes les énergies potentielles de toutes les interactions conservatives, on arrive au résultat suivant :

Encadré 3.7

Il existe une énergie potentielle $E_p = E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ qui dépend de tous les vecteurs position $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ des N points matériels du système telle que

$$\sum_\alpha \delta W(\vec{f}_\alpha^c) = -dE_p. \quad (3.50)$$

Sous forme intégrée,

$$\sum_\alpha W_{(I) \rightarrow (F)}(\vec{f}_\alpha^c) = E_p^{(I)} - E_p^{(F)}, \quad (3.51)$$

où $E_p^{(I)} = E_p(\vec{r}_1^{(I)}, \vec{r}_2^{(I)}, \dots, \vec{r}_N^{(I)})$ est l'énergie potentielle du système dans la configuration (I) , et $E_p^{(F)}$ l'énergie potentielle du système dans la configuration (F) .

Cette définition est « presque » équivalente à la suivante, voir la discussion de la section 1.2.2 :

5. En faisant un calcul plus sophistiqué, on peut montrer que (3.46) reste vrai dans le cas où les points matériels ne sont pas contraints à rester sur un axe. La longueur du ressort est alors $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$.

Encadré 3.8

Il existe une énergie potentielle $E_p = E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ qui dépend de tous les vecteurs position $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ des N points matériels du système telle que

$$\vec{f}_\alpha^c = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}_\alpha} E_p. \quad (3.52)$$

Ici, la notation $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}_\alpha}$ correspond au gradient en supposant que la position $\vec{r}_\alpha$ varie alors que toutes les autres positions sont fixes : si on écrit en coordonnées cartésiennes $\vec{r}_\alpha = x_\alpha \vec{u}_x + y_\alpha \vec{u}_y + z_\alpha \vec{u}_z$, et que l'on considère E_p comme une fonction des $3N$ variables $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}_\alpha} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_\alpha} \vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y_\alpha} \vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z_\alpha} \vec{u}_z. \quad (3.53)$$

Vérifions que (3.52) implique bien (3.50). La différentielle de E_p s'écrit, par définition,

$$dE_p = \sum_\alpha \left[\frac{\partial E_p}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial E_p}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial E_p}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right]. \quad (3.54)$$

Mais le terme entre crochets est $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}_\alpha} E_p \cdot d\vec{r}_\alpha$; on a donc l'écriture plus compacte

$$dE_p = \sum_\alpha \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}_\alpha} E_p \cdot d\vec{r}_\alpha = - \sum_\alpha \vec{f}_\alpha^c \cdot d\vec{r}_\alpha = - \sum_\alpha \delta W(\vec{f}_\alpha^c), \quad (3.55)$$

qui est l'expression recherchée.

3.4.4 Théorème de l'énergie mécanique

En utilisant (3.50) dans le théorème de l'énergie cinétique (3.42), on obtient

$$dE_c = \sum_\alpha \delta W(\vec{F}_\alpha) = \sum_\alpha \delta W(\vec{f}_\alpha^c) + \sum_\alpha \delta W(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}) = -dE_p + \sum_\alpha \delta W(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}). \quad (3.56)$$

Finalement, on a le résultat suivant :

Encadré 3.9

On note $E_m = E_c + E_p$ *l'énergie mécanique du système*. On a

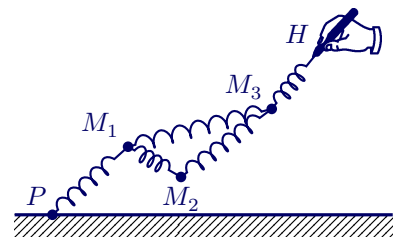
$$dE_m = \sum_\alpha \delta W(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}) \quad \text{avec} \quad \delta W(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}) = \vec{f}_\alpha^{\text{nc}} \cdot d\vec{r}_\alpha. \quad (3.57)$$

Sous forme intégrée, entre deux états (I) et (F) ,

$$\Delta E_m = E_m^{(F)} - E_m^{(I)} = \sum_\alpha W_{(I) \rightarrow (F)}(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}) \quad \text{avec} \quad W_{(I) \rightarrow (F)}(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}) = \int_{(I)}^{(F)} \delta W(\vec{f}_\alpha^{\text{nc}}), \quad (3.58)$$

où l'on rappelle que le travail des forces non conservatives dépend du chemin suivi par les particules auxquelles elles s'appliquent, et pas seulement de leurs positions dans les états (I) et (F) .

Exemple 3.7 : On considère un système constitué de trois points matériels M_1, M_2, M_3 , et on note comme d'habitude $m_\alpha, \vec{r}_\alpha, \vec{v}_\alpha$, les masses, vecteurs position et vitesses des trois points. Ces trois points sont reliés deux à deux par des ressorts ; le point M_1 est également relié par un ressort à un point P fixe au sol, et le point M_3 est relié par un ressort à une main en H qui agite le tout. Les cinq ressorts sont identiques ; on note K leur constante de raideur et ℓ_0 leur longueur à vide.



Les trois points sont soumis à leurs poids et aux forces de rappel des ressorts. Toutes ces forces sont conservatives, mais comme la main est mobile et ne fait pas partie du système, on doit traiter la force du ressort $[HM_3]$ à part. Le point P est également en dehors du système, mais comme il est immobile, on peut écrire une énergie potentielle pour le ressort $[PM_1]$. L'énergie potentielle totale du système est donc donnée par

$$E_p = \frac{K}{2}(PM_1 - \ell_0)^2 + \frac{K}{2}(M_1M_2 - \ell_0)^2 + \frac{K}{2}(M_1M_3 - \ell_0)^2 + \frac{K}{2}(M_2M_3 - \ell_0)^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2 + m_3gz_3, \quad (3.59)$$

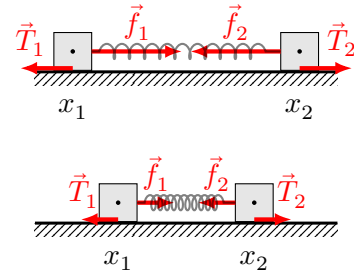
où z_1, z_2, z_3 sont les altitudes des trois points et g l'accélération de la pesanteur. On rappelle que M_1M_2 (par exemple) est la distance entre les points M_1 et M_2 , et que l'on peut écrire, en coordonnées cartésiennes, $M_1M_2 = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. L'énergie potentielle (3.59) prend en compte toutes les forces, intérieures ou extérieures, s'appliquant sur les points du système, sauf la force du ressort $[HM_3]$. L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\vec{v}_3^2$ et l'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_p$. Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit alors

$$dE_m = \delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{r}_3, \quad (3.60)$$

où $\vec{f}$ est la seule force qui n'a pas été prise en compte dans l'énergie potentielle, c'est-à-dire la force exercée par le ressort $[HM_3]$ sur le point M_3 .

3.4.5 Énergie mécanique macroscopique et énergie totale

Considérons la situation sur la figure ci-contre : deux cubes identiques sont posés sur une table ; un ressort idéal les relie. On suppose que la longueur du ressort est supérieure à sa longueur à vide ℓ_0 ; le ressort tire donc sur les cubes (forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$) pour qu'ils se rapprochent. Les forces de frottements ($\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$) sont initialement (dans la figure du haut) plus faibles que les forces du ressort, et les cubes se mettent en mouvement. Au fur et à mesure qu'ils se rapprochent, la force de rappel du ressort diminue et, à un moment donné, les cubes s'immobilisent (figure du bas).



On choisit pour système l'ensemble {les deux cubes + le ressort}. L'énergie mécanique du système est

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + \frac{K}{2}(x_2 - x_1 - a - \ell_0)^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2, \quad (3.61)$$

où a est la longueur du côté d'un des cubes et où les autres quantités ont leur sens habituel. (On vérifie que la longueur du ressort est $x_2 - x_1 - a$.) Le théorème de l'énergie mécanique entre la situation initiale et la situation finale s'écrit

$$\Delta E_m = W(\vec{T}_1) + W(\vec{T}_2). \quad (3.62)$$

Le travail des deux forces de frottement $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ est négatif, et donc l'énergie mécanique E_m a diminué. Où est passée cette énergie ? Le système interagit avec la table, mais la table ne gagne pas d'énergie mécanique : elle reste immobile et n'a pas de variation d'énergie potentielle. En fait, on pourrait considérer le système {les deux cubes + le ressort + la table}, qui est un système pseudo-isolé, et on trouverait de la même manière que l'énergie mécanique de ce système diminue.

Cette observation, pourtant évidente, que des systèmes mécaniques pseudo-isolés peuvent perdre de l'énergie à cause du travail des forces de frottement, pose problème. D'un point microscopique, *toutes les interactions sont conservatives*. On peut donc écrire une énergie potentielle prenant en compte toutes les forces intérieures et, pour un système isolé, on doit avoir $\Delta E = 0$. Autrement dit, pour un système isolé, l'énergie E se conserve : elle ne peut être ni créée, ni détruite (ou « consommée »).

La solution à cette contradiction apparente est que l'on a mal compté l'énergie du système. Même si un cube est dans l'ensemble immobile, chacun de ses atomes vibre autour de sa position d'équilibre, son énergie cinétique totale est non-nulle (et même très grande ^{*6}). Par ailleurs, en plus de l'énergie potentielle macroscopique associée au ressort, il faut prendre en compte les énergies potentielles de toutes les forces entre les atomes qui maintiennent la cohésion des cubes et de la table. (Une manière simplifiée de se représenter ces forces est d'imaginer que tout se passe comme si des petits ressorts reliaient chaque atome aux atomes immédiatement voisins.)

On voit donc que la « vraie » énergie mécanique du système est très différente de l'expression (3.61). On écrit habituellement

$$E = E_m + U, \quad (3.63)$$

où E est la « vraie » énergie mécanique du système, prenant en compte tous les mouvements et toutes les forces à toutes les échelles, E_m est l'énergie mécanique macroscopique, comme dans (3.61), et U est **l'énergie interne**. Elle représente l'énergie présente dans toutes les interactions et mouvements microscopiques. On apprend en thermodynamique qu'une augmentation de l'énergie interne U est liée à une augmentation de la température T du système.

Pour un système isolé (comme dans l'exemple où l'on prend {les deux cubes + le ressort + la table}), E est constant. Quand E_m décroît, c'est que U augmente. Autrement dit, les forces de frottement convertissent de l'énergie mécanique macroscopique en énergie interne. Le système perd de l'énergie mécanique, sa température augmente un peu, et l'énergie totale est conservée.

3.5 Action de la pesanteur sur un système

Sur un système de N particules, il y a N forces de pesanteur car chaque point matériel ressent la force $\vec{f}_\alpha = m_\alpha \vec{g}$, avec $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. La résultante de toutes ces forces, qu'on appelle le « poids du système », est alors

$$\overrightarrow{\text{poids}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{g} = m \vec{g} \quad (3.64)$$

(On a utilisé le fait que $\vec{g}$, étant uniforme, pouvait se factoriser.)

Le moment total par rapport à un point A de toutes ces forces de pesanteur est

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{\text{poids}}) = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \vec{g}) = \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AM}_{\alpha} \right) \wedge \vec{g} = m \overrightarrow{AC} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{AC} \wedge (m \vec{g}), \quad (3.65)$$

où l'on a utilisé la définition du centre de masse pour évaluer la somme. Le moment total de toutes les forces de pesanteur est le même que le moment qu'on aurait obtenu en prenant une force poids unique $m \vec{g}$ dont le point d'application serait le centre de masse C .

Calculons le travail des forces de pesanteur lors d'une évolution infinitésimale du système.

$$\delta W(\overrightarrow{\text{poids}}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{g} \cdot d\vec{r}_{\alpha} = \vec{g} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} d\vec{r}_{\alpha} = \vec{g} \cdot d\left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) = \vec{g} \cdot d(m \vec{r}_C) = m \vec{g} \cdot d\vec{r}_C. \quad (3.66)$$

La encore, le travail de toutes les forces de pesanteur est égal au travail du poids total $m \vec{g}$ appliqué au centre de masse C .

On retiendra donc ceci :

6. Par exemple, l'énergie cinétique microscopique d'un cube de fer de 1 kg à température ambiante est environ de 65 kJ, autant que l'énergie cinétique macroscopique qu'aurait le même cube s'il était lancé à 360 m/s. On apprend à faire ces calculs en thermodynamique.

Encadré 3.10

Dans la relation fondamentale de la dynamique, le théorème du moment d'inertie, ou les théorèmes de l'énergie, on peut remplacer l'action de la pesanteur sur les N points constituant un système par une force unique égale à $m\vec{g}$ appliquée au centre de masse C du système. En particulier, l'énergie potentielle de pesanteur peut s'écrire $E_{pp} = mgz_C$, où z_C est l'altitude du centre de masse.

Remarque 1 : dans un référentiel non galiléen *en translation* par rapport à un référentiel d'étude galiléen, la force d'inertie d'entraînement sur le point α s'écrit $\vec{f}_{e,\alpha} = -m_\alpha \vec{a}_e$, où l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ est indépendante de α . Cette force est très similaire au poids (en remplaçant $-\vec{a}_e$ par $\vec{g}$), et donc le même calcul arrive au même résultat : pour les théorèmes de la mécanique, on peut remplacer les forces $\vec{f}_{e,\alpha}$ par une force unique $-m\vec{a}_e$ appliquée en C .

Remarque 2 : dans certains cas, il peut être plus intéressant de remplacer toutes les forces de pesanteurs par quelques forces ; par exemple, pour exprimer l'action de la pesanteur sur un marteau de masse $m = m_1 + m_2$ avec m_1 la masse de la tête (en fer) et m_2 la masse du manche (en bois), on peut décider de mettre une force $m\vec{g}$ au centre de masse du marteau ou, au choix, mettre une force $m_1\vec{g}$ au centre de masse de la tête et une force $m_2\vec{g}$ au centre de masse du manche.

3.6 Référentiel barycentrique et théorèmes de König

3.6.1 Définition

Encadré 3.11

Pour un système donné, on définit le **référentiel barycentrique** ou **référentiel du centre de masse** $\mathcal{R}^*$ comme étant le référentiel défini par les deux propriétés suivantes :

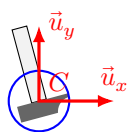
- $\mathcal{R}^*$ est en *translation* par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}$, que l'on suppose galiléen,
- dans $\mathcal{R}^*$, le centre de masse C est immobile.

Si $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un repère fixe dans le référentiel d'étude, alors $(C, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est donc un repère fixe dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$.

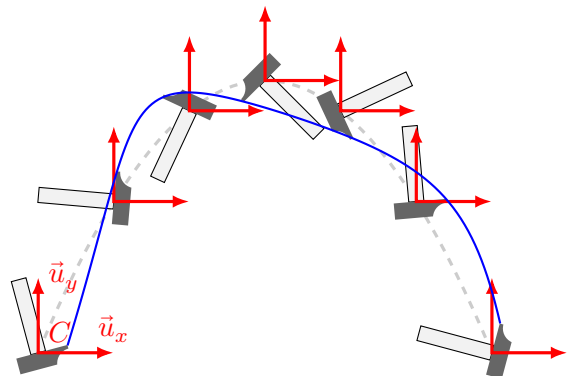
! À moins que C n'ait un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel d'étude supposé galiléen, le référentiel barycentrique n'est pas galiléen.

Exemple 3.8 : On reprend l'exemple 3.3 du marteau que l'on lance, page 32. Le référentiel du centre de masse et son repère $(C, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (en rouge sur la figure à droite) suivent le mouvement du marteau dans son mouvement, mais les axes du repère ne tournent pas.

Dans le référentiel d'étude, la trajectoire de la pointe du marteau (en bleu sur la figure de droite) est compliquée.



Dans le référentiel barycentrique (sur la figure à gauche), la pointe du marteau a tout simplement un mouvement circulaire uniforme.



Pour chacun des points matériels α du système, on note $\vec{r}_\alpha^* = \overrightarrow{CM_\alpha}$ et $\vec{v}_\alpha^* = d_{\mathcal{R}^*} \vec{r}_\alpha^* / dt$ les vecteurs position et vitesse de ce point dans le référentiel barycentrique. Comme le référentiel barycentrique est en translation par rapport au référentiel du laboratoire (et donc $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$), les dérivées par rapport au temps se calculent de la même manière dans les deux référentiels $\mathcal{R}^*$

et $\mathcal{R}$, et on peut se permettre d'utiliser la notation « point » sans ambiguïté, voir section 2.1.1. On a donc

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_C + \vec{r}_\alpha^*, \quad \vec{v}_\alpha^* = \dot{\vec{r}}_\alpha^*, \quad \vec{v}_\alpha = \vec{v}_C + \vec{v}_\alpha^*. \quad (3.67)$$

3.6.2 Les théorèmes de König

Comme le point C est (par définition) immobile dans $\mathcal{R}^*$, on obtient immédiatement la propriété suivante :

Encadré 3.12

L'impulsion du système dans son référentiel barycentrique est nulle : $\vec{p}^* = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^* = m \vec{v}_C^* = \vec{0}$.

Cela implique en particulier que le moment cinétique calculé dans $\mathcal{R}^*$ est indépendant du point par rapport auquel on le calcule, voir (3.34). On notera ce moment cinétique $\vec{L}^*$ (et non $\vec{L}_C^*$, par exemple, puisque le point de référence n'a pas d'importance) :

$$\vec{L}^* = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha^* \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha^*. \quad (3.68)$$

On notera également E_c^* l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}^*$:

$$E_c^* = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v}_\alpha^*)^2. \quad (3.69)$$

Les théorèmes suivants permettent de relier $\vec{L}_A$ et E_c (calculés dans $\mathcal{R}$) à $\vec{L}^*$ et E_c^* (calculés dans $\mathcal{R}^*$) :

Encadré 3.13

Théorèmes de König :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{p} + \vec{L}^*, \quad E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + E_c^*. \quad (3.70)$$

Le moment cinétique d'un système de points est égal à la somme du moment cinétique d'un point matériel de masse m situé en C , et du moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique.

Démontrons (3.70). Pour le moment cinétique (premier théorème de König), on part de (3.34) qui permet d'écrire :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{p} + \vec{L}_C. \quad (3.71)$$

Il reste donc à démontrer que $\vec{L}_C$ (moment cinétique par rapport à C calculé dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$) est égal à $\vec{L}^*$ (moment cinétique calculé dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$). On a

$$\vec{L}_C = \sum_\alpha \overrightarrow{CM}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \overrightarrow{CM}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_C + \sum_\alpha \overrightarrow{CM}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha^*, \quad (3.72)$$

où l'on a utilisé (3.67). On remarque que le deuxième terme est égal à $\vec{L}^*$. Pour le premier terme :

$$\sum_\alpha \overrightarrow{CM}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_C = \left(\sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{CM}_\alpha \right) \wedge \vec{v}_C = \vec{0}, \quad (3.73)$$

en utilisant (3.13). On a donc bien $\vec{L}_C = \vec{L}^*$ et $\vec{L}_A = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{p} + \vec{L}^*$.

Pour l'énergie cinétique (second théorème de König), on a avec (3.67)

$$E_c = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v}_C + \vec{v}_\alpha^*)^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_C^2 + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v}_\alpha^*)^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_C \cdot \vec{v}_\alpha^*. \quad (3.74)$$

Le premier terme est $\frac{1}{2}m\vec{v}_C^2$. (Il suffit de mettre $\frac{1}{2}\vec{v}_C^2$ en facteur et d'utiliser $\sum_{\alpha} m_{\alpha} = m$).
 Le deuxième terme est l'énergie cinétique E_c^* dans le référentiel barycentrique, voir (3.69).
 Le troisième terme peut s'écrire $\vec{v}_C \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*$ en mettant $\vec{v}_C$ en facteur. Mais $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*$ est l'impulsion totale $\vec{p}^*$ dans le référentiel du centre de masse, qui est nulle. Il reste donc, comme annoncé, $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_C^2 + E_c^*$.

3.6.3 Les théorèmes de la mécanique dans le référentiel barycentrique

Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ n'étant pas, en général, galiléen, il faut *a priori* faire intervenir les forces d'inertie introduites dans le chapitre 2 si l'on veut appliquer le principe fondamental de la dynamique, le théorème du moment cinétique ou le théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}^*$. Comme $\mathcal{R}^*$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis, et la force d'inertie d'entraînement appliquée au point matériel α s'écrit simplement :

$$\vec{f}_{e,\alpha} = -m_{\alpha} \vec{a}_C, \quad (3.75)$$

avec $\vec{a}_C$ l'accélération de C dans $\mathcal{R}$. (Attention $\vec{a}_C$ avec un grand C italique est l'accélération du point C ; ce n'est pas l'accélération complémentaire ou de Coriolis $\vec{a}_c$ avec un petit c droit. Ici, l'accélération d'entraînement est $\vec{a}_e = \vec{a}_C$ et l'accélération de Coriolis est $\vec{a}_c = \vec{0}$.)

Le travail des forces d'inertie d'entraînement dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est nul ; en effet,

$$\sum_{\alpha} \delta W^*(\vec{f}_{e,\alpha}) = \sum_{\alpha} (-m_{\alpha} \vec{a}_C) \cdot d\vec{r}_{\alpha}^* = -\vec{a}_C \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* dt = 0, \quad (3.76)$$

puisque $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* = \vec{p}^* = \vec{0}$.

Le moment des forces d'inertie d'entraînement par rapport à C est également nul :

$$\sum_{\alpha} \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_{e,\alpha}) = \sum_{\alpha} \overline{CM}_{\alpha} \wedge \vec{f}_{e,\alpha} = \sum_{\alpha} \overline{CM}_{\alpha} \wedge (-m_{\alpha} \vec{a}_C) = -\left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overline{CM}_{\alpha}\right) \wedge \vec{a}_C = \vec{0}, \quad (3.77)$$

puisque, par définition du centre de masse, $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overline{CM}_{\alpha} = \overline{CC} = \vec{0}$.

À partir de (3.76) et (3.77), on voit donc que l'on a le résultat suivant :

Encadré 3.14

On peut appliquer les théorèmes de l'énergie (cinétique et mécanique), ainsi que le théorème du moment cinétique *par rapport à C*, dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, sans se préoccuper des forces d'inertie, alors même que $\mathcal{R}^*$ n'est pas (en général) galiléen :

$$dE_c^* = \sum_{\alpha} \delta W^*(\vec{F}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}^*, \quad \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \sum_{\alpha} \overline{CM}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha}. \quad (3.78)$$

Remarques : si on veut appliquer le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}^*$ par rapport à un point différent du point C , il faut faire intervenir la force d'inertie d'entraînement. La relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}^*$ n'a aucun intérêt : on sait déjà que $\vec{p}^* = \vec{0}$. Attention au fait que le travail δW^* d'une force dans $\mathcal{R}^*$ est différent du travail δW de la même force dans $\mathcal{R}$, puisque le premier fait intervenir le déplacement infinitésimal $d\vec{r}_{\alpha}^*$ dans $\mathcal{R}^*$, alors que le second fait intervenir le déplacement $d\vec{r}_{\alpha}$ dans $\mathcal{R}$.

3.7 Chocs, collisions et lois de conservation

Pour un système isolé, la relation fondamentale de la dynamique (3.17) et le théorème du moment cinétique (3.37) nous disent que la quantité de mouvement $\vec{p}$ et le moment cinétique $\vec{L}_C$ par rapport au centre de masse sont des quantités conservées, c'est-à-dire indépendantes du

temps. En revanche, l'énergie cinétique n'est en générale *pas* conservée car les forces intérieures peuvent travailler.

Considérons maintenant un système qui n'est *pas* isolé, et appelons $\vec{R} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}$ la résultante des forces extérieures. En intégrant la relation fondamentale $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{R}$ entre deux temps t_1 et t_2 , on obtient

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} dt = (t_2 - t_1)\langle\vec{R}\rangle \quad \text{avec} \quad \langle\vec{R}\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} dt, \quad (3.79)$$

où $\langle\vec{R}\rangle$ est la **force moyenne** exercée sur le système entre les instants t_1 et t_2 .

Si on imagine que t_2 est presque égal à t_1 , on voit que si la force moyenne $\langle\vec{R}\rangle$ reste finie, alors $\vec{p}(t_2)$ est presque égale à $\vec{p}(t_1)$. Mathématiquement, on dira que si $\langle\vec{R}\rangle$ reste bornée, alors $t \mapsto \vec{p}(t)$ est une fonction continue.

3.7.1 Chocs entre le système et l'extérieur

On dit que le système subit un **choc avec l'extérieur** si son impulsion (et/ou son moment cinétique) change brutalement en un temps très court. Lors d'un choc, nécessairement, les forces s'appliquant sur le système sont très grandes, voire infinies si la modélisation du phénomène est trop sommaire.

Exemple 3.9 : On laisse tomber une brique de masse $m = 2 \text{ kg}$ sur le sol depuis une hauteur d'environ 1 m. À l'instant t_{av} , juste avant que la brique touche le sol, sa vitesse est de $v = 4 \text{ m/s}$. Juste après, à l'instant t_{ap} , la vitesse de la brique est nulle. On a donc

$$\|\vec{p}(t_{\text{av}})\| = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad \|\vec{p}(t_{\text{ap}})\| = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \quad (3.80)$$

En notant $R = \|\langle\vec{R}\rangle\|$ la norme de la moyenne de la force exercée sur la brique, on a donc $R \times (t_{\text{ap}} - t_{\text{av}}) = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. La valeur de $t_{\text{ap}} - t_{\text{av}}$, c'est-à-dire le temps qu'a duré le choc, est difficile à évaluer, mais il est en tout cas très court par rapport aux perceptions humaines. Peut-être $t_{\text{ap}} - t_{\text{av}} = 0,01 \text{ s}$? Si c'est le cas, alors $R = 800 \text{ N}$. Mais peut-être $t_{\text{ap}} - t_{\text{av}} = 0,001 \text{ s}$? Dans ce cas, $R = 8000 \text{ N}$.

Dans un modèle « idéal » où l'arrêt de la brique est instantané, c'est-à-dire $t_{\text{ap}} - t_{\text{av}} = 0$, alors il faut considérer que $R = \infty$.

3.7.2 Chocs internes au système

Lorsqu'il y a un choc, il est souvent intéressant de considérer le système comprenant tous les éléments participant au choc. Ainsi, les forces « très grandes » deviennent des forces intérieures.

Exemple 3.10 : Au billard, on considère un coup où la bille blanche de masse m_b vient percuter une bille jaune de masse m_j initialement au repos. On note $\vec{v}_{b,\text{av}}$ la vitesse initiale de la bille blanche.

Lors du choc, le système {bille blanche} ressent de grandes forces extérieures de la part de la bille jaune. Réciproquement, le système {bille jaune} ressent de grandes forces extérieures de la part de la bille blanche. Cependant, le système {bille blanche + bille jaune} n'est soumis qu'au poids et à la réaction du tapis, qui sont des forces bornées ; les « grandes forces » sont maintenant des forces intérieures.

En appliquant (3.79) avec $t_1 = t_{\text{av}}$, l'instant « juste avant le choc » et $t_2 = t_{\text{ap}}$, l'instant « juste après le choc », on a $t_{\text{ap}} - t_{\text{av}} \approx 0$ et

$$\vec{p}(t_{\text{av}}) = \vec{p}(t_{\text{ap}}). \quad (3.81)$$

Si on note $\vec{v}_{b,\text{ap}}$ et $\vec{v}_{j,\text{ap}}$ les vitesses respectives des billes blanche et jaune juste après le choc, on doit donc avoir

$$m_b \vec{v}_{b,\text{ap}} = m_b \vec{v}_{b,\text{av}} + m_j \vec{v}_{j,\text{ap}}. \quad (3.82)$$

Cette équation ne permet pas à elle seule de déterminer $\vec{v}_{b,\text{ap}}$ et $\vec{v}_{j,\text{ap}}$; les vitesses finales vont dépendre du type de choc, des matériaux, des effets, etc. Mais dans tous les cas, (3.82) sera vérifiée.

Le même raisonnement s'applique au moment cinétique du système ; on retiendra donc ceci :

Encadré 3.15

Lorsque, dans un système, des forces *intérieures* sont à l'origine d'un brusque changement des vitesses de certaines parties du système, on dit qu'il y a un **choc interne** au système. Pendant la durée du choc, on peut habituellement négliger les forces extérieures et écrire

$$\vec{p}_{av.} = \vec{p}_{ap.}, \quad \vec{L}_{A,av.} = \vec{L}_{A,ap.} \quad (3.83)$$

où $\vec{p}_{av.}$ et $\vec{p}_{ap.}$ sont les impulsions du système juste avant et juste après le choc, et de même $\vec{L}_{A,av.}$ et $\vec{L}_{A,ap.}$ sont les moments cinétiques du système juste avant et juste après le choc par rapport à un point A fixe ou égal à C .

Remarque : pour appliquer ce résultat, il faut considérer un système qui contient toutes les parties participant au choc !

3.7.3 Chocs élastiques et inélastiques**Encadré 3.16**

On dit qu'un choc est **élastique** si l'énergie cinétique du système est conservée :

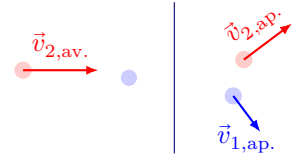
$$E_{c,av.} = E_{c,ap.} \quad (\text{si le choc est élastique}), \quad (3.84)$$

avec $E_{c,av.}$ et $E_{c,ap.}$ l'énergie cinétique du système juste avant et juste après le choc. Un choc est dit **inélastique** si l'égalité précédente n'est pas réalisée.

Remarque : ici, on parle bien de l'énergie cinétique *macroscopique* du système, voir la discussion de la section 3.4.5. Lorsque le choc est élastique, c'est que l'énergie interne des objets participant au choc ne varie pas. Lorsque le choc est inélastique, la situation la plus commune est que l'énergie cinétique macroscopique diminue ($E_{c,ap.} < E_{c,av.}$), et donc que l'énergie interne augmente, de manière à ce que l'énergie totale soit constante.

Exemple 3.11 : On considère un choc entre deux billes de même masse m . La première est initialement immobile : $\vec{v}_{1,av.} = \vec{0}$, et on note $\vec{v}_{2,av.}$ la vitesse initiale (non-nulle) de la deuxième bille. En notant $\vec{v}_{1,ap.}$ et $\vec{v}_{2,ap.}$ les vitesses après le choc, on a par conservation de la quantité de mouvement

$$m\vec{v}_{2,av.} = m\vec{v}_{1,ap.} + m\vec{v}_{2,ap.} \quad (3.85)$$



On élève cette relation au carré, on développe, et on divise par $2m$, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_{2,av.}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_{1,ap.}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_{2,ap.}^2 + m\vec{v}_{1,ap.} \cdot \vec{v}_{2,ap.}, \quad (3.86)$$

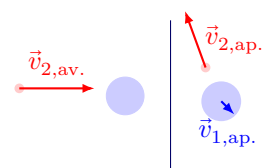
c'est-à-dire, en notant $E_{c,av.}$ et $E_{c,ap.}$ les énergies cinétiques du système juste avant et juste après le choc,

$$E_{c,av.} = E_{c,ap.} + m\vec{v}_{1,ap.} \cdot \vec{v}_{2,ap.} \quad (3.87)$$

On voit donc que *si le choc est élastique*, alors $\vec{v}_{1,ap.} \cdot \vec{v}_{2,ap.} = 0$, c'est-à-dire que les vitesses après le choc sont orthogonales. Si le choc est inélastique et que $E_{c,après} < E_{c,avant}$, alors $\vec{v}_{1,ap.} \cdot \vec{v}_{2,ap.} > 0$, c'est-à-dire que l'angle entre les deux vitesses est aigu.

Exemple 3.12 : On considère un choc entre deux billes de masses très différentes m_1 et m_2 avec $m_1 \gg m_2$. Dans le référentiel d'étude, la particule lourde est initialement immobile ($\vec{v}_{1,av.} = \vec{0}$), et la particule légère a initialement une vitesse $\vec{v}_{2,av.}$ non-nulle. En notant $\vec{v}_{1,ap.}$ et $\vec{v}_{2,ap.}$ les vitesses après le choc, on a par conservation de la quantité de mouvement

$$m_2\vec{v}_{2,av.} = m_1\vec{v}_{1,ap.} + m_2\vec{v}_{2,ap.} \quad (3.88)$$



On suppose qu'on est dans le cas habituel où l'énergie cinétique n'augmente pas lors du choc : $E_{c,ap.} \leq E_{c,av.}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1,ap.}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2,ap.}^2 \leq \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2,av.}^2. \quad (3.89)$$

Cette inégalité implique $\|\vec{v}_{2,ap.}\| \leq \|\vec{v}_{2,av.}\|$. La conservation de la quantité de mouvement (3.88) et l'inégalité triangulaire donnent alors

$$m_1\|\vec{v}_{1,ap.}\| = m_2\|\vec{v}_{2,av.} - \vec{v}_{2,ap.}\| \leq m_2(\|\vec{v}_{2,av.}\| + \|\vec{v}_{2,ap.}\|) \leq 2m_2\|\vec{v}_{2,av.}\|. \quad (3.90)$$

On élève cette dernière inégalité au carré, et on divise par $2m_1$, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1,ap.}^2 \leq \frac{4m_2}{m_1} \times \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2,av.}^2. \quad (3.91)$$

mais on a supposé $m_1 \gg m_2$. On voit donc que l'énergie cinétique finale de la bille 1 (celle qui est lourde) est négligeable devant l'énergie cinétique initiale de la bille 2 (celle qui est légère). En particulier, si le choc est élastique, l'inégalité de (3.89) devient une égalité, et comme le premier terme est négligeable, on obtient $\|\vec{v}_{2,ap.}\| \simeq \|\vec{v}_{2,av.}\|$: la bille légère rebondit sur la bille lourde ; sa vitesse change de direction mais garde la même norme.

Exemple 3.13 : On considère maintenant un choc élastique dans le cas général de deux particules de masses m_1 et m_2 et de vitesses initiales $\vec{v}_{1,av.}$ et $\vec{v}_{2,av.}$. Que peut-on dire des vitesses finales $\vec{v}_{1,ap.}$ et $\vec{v}_{2,ap.}$? Pour répondre à ce genre de questions, il est souvent utile de se placer dans le référentiel de centre de masse. On obtient la vitesse $\vec{v}_C$ du centre de masse en écrivant que l'impulsion totale du système est $(m_1 + m_2)\vec{v}_C = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. La vitesse $\vec{v}_C$ reste constante pendant le choc, par conservation de l'impulsion. Dans le référentiel du centre de masse, les vitesses des particules sont $\vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{v}_C$, et on a par définition

$$m_1\vec{v}_{1,av.}^* + m_2\vec{v}_{2,av.}^* = m_1\vec{v}_{1,ap.}^* + m_2\vec{v}_{2,ap.}^* = \vec{0}. \quad (3.92)$$

Autrement dit, les deux particules ont des impulsions de même norme avant le choc ($\|m_1\vec{v}_{1,av.}^*\| = \|m_2\vec{v}_{2,av.}^*\|$), ainsi qu'après le choc. Il est facile de voir que l'énergie cinétique dans le centre de masse E^* augmente avec cette impulsion ; comme on suppose le choc élastique, on en déduit que la norme des impulsions de chaque particule reste constante lors du choc :

$$\|m_1\vec{v}_{1,av.}^*\| = \|m_2\vec{v}_{2,av.}^*\| = \|m_1\vec{v}_{1,ap.}^*\| = \|m_2\vec{v}_{2,ap.}^*\|. \quad (3.93)$$

En particulier, on doit avoir $\|\vec{v}_{1,ap.}^*\| = \|\vec{v}_{1,av.}^*\|$ et $\|\vec{v}_{2,av.}^*\| = \|\vec{v}_{2,ap.}^*\|$: dans le référentiel barycentrique, les deux particules voient leur vitesse changer de direction, mais pas de norme. On ne sait pas déterminer la nouvelle direction, mais on sait que les deux particules partent dans la même direction avec des sens opposés dans le référentiel barycentrique ; il ne reste alors qu'à ajouter $\vec{v}_c$ pour trouver les vitesses après le choc dans le référentiel d'étude.

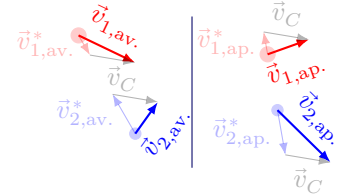
Exemple 3.14 : On continue l'exemple précédent, mais on suppose en plus que tous les mouvements se font en une dimension, c'est-à-dire que toutes les vitesses sont colinéaires à un même vecteur unitaire $\vec{u}$. On peut donc écrire tous les vecteurs vitesses sous la forme $\vec{v}_X = v_X \vec{u}$, où le scalaire v_X peut être positif ou négatif, et on travaille uniquement avec ces vitesses scalaires.

Selon la définition du centre de masse et la conservation de la quantité de mouvement, on a $(m_1 + m_2)v_C = m_1v_{1,av.} + m_2v_{2,av.} = m_1v_{1,ap.} + m_2v_{2,ap.}$. Dans le référentiel du centre de masse, on a $v_\alpha^* = v_\alpha - v_C$ pour les vitesses avant ou après le choc. Comme on suppose le choc élastique on vient de voir que, dans le référentiel barycentrique, les vitesses changent de direction mais non de norme lors du choc. En une dimension, il y a une seule manière de changer de direction, et on doit donc avoir $v_{\alpha,ap.}^* = -v_{\alpha,av.}^*$. On obtient donc

$$v_{\alpha,ap.} = v_{\alpha,ap.}^* + v_C = -v_{\alpha,av.}^* + v_C = -(v_{\alpha,av.} - v_C) + v_C = 2v_C - v_{\alpha,av.}. \quad (3.94)$$

Avec $v_C = (m_1v_{1,av.} + m_2v_{2,av.})/(m_1 + m_2)$, on obtient finalement

$$v_{1,ap.} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,av.} + 2m_2v_{2,av.}}{m_1 + m_2}, \quad v_{2,ap.} = \frac{2m_1v_{1,av.} + (m_2 - m_1)v_{2,av.}}{m_1 + m_2}. \quad (3.95)$$



On peut vérifier directement que ces expressions donnent bien $m_1 v_{1,\text{ap.}} + m_2 v_{2,\text{ap.}} = m_1 v_{1,\text{av.}} + m_2 v_{2,\text{av.}}$ et $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{ap.}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{ap.}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{av.}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{av.}}^2$.

Exemple 3.15 : On considère un noyau d'uranium 235 (^{235}U) immobile, de masse m_0 , se désintégrant en un noyau de thorium 231 (^{231}Th), de masse m_1 , et une particule α (c'est-à-dire un noyau d'hélium 4, ^4He), de masse m_2 . Les masses des noyaux sont $m_0 = 234,99346 \text{ u}$, $m_1 = 230,98693 \text{ u}$ et $m_2 = 4,00151 \text{ u}$, où $\text{u} = 1,660539 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,494 \text{ MeV}/c^2$ est l'unité de masse atomique. (Note : on trouve dans la littérature une masse de $235,04393 \text{ u}$, pour l'uranium 235, mais il s'agit de la masse de l'atome, avec ses 92 électrons. Pour la même raison, les valeurs données pour les masses du noyau de thorium et de la particule α diffèrent des valeurs des masses des atomes correspondants.)

Le « défaut de masse » $m_0 - (m_1 + m_2) = 0.00502 \text{ u}$ correspond à une énergie E libérée sous forme d'énergie cinétique lors de la désintégration :

$$E = (m_0 - m_1 - m_2)c^2 = 4,68 \text{ MeV} = 7,50 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (3.96)$$

Une désintégration se traite de la même manière qu'un choc. En notant $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses des deux particules après désintégration, on a, par conservation de la quantité de mouvement

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}, \quad (3.97)$$

puisque la quantité de mouvement est initialement nulle. Par ailleurs, on connaît l'énergie cinétique totale :

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = E. \quad (3.98)$$

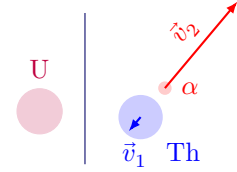
De la première équation, on obtient que les deux particules ont des vitesses selon la même direction, dans des sens opposés, et que $\|\vec{v}_2\| = \frac{m_1}{m_2} \|\vec{v}_1\|$. En reportant dans la deuxième équation, on arrive alors à

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\frac{2m_2}{m_1(m_1 + m_2)} E} \approx 2,6 \times 10^5 \text{ m/s}, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{\frac{2m_1}{m_2(m_1 + m_2)} E} \approx 1,5 \times 10^7 \text{ m/s}. \quad (3.99)$$

La vitesse $\|\vec{v}_2\|$ de la particule α est 0,05 fois la vitesse de la lumière, c'est très rapide mais suffisamment lent pour que la mécanique classique soit assez précise. On peut alors calculer les énergies cinétiques des deux particules et on trouve

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E \approx 0,02 E, \quad \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E \approx 0,98 E. \quad (3.100)$$

La particule légère est m_1/m_2 fois plus rapide que la particule lourde, et son énergie cinétique est m_1/m_2 fois plus grande que celle de la particule lourde.



Chapitre 4

Mouvement d'un solide

4.1 Généralités et premier exemple

4.1.1 Définition d'un corps solide

Un *corps solide* est simplement défini comme un système de points matériels à distances fixes les uns des autres.

Nous considérons des corps solides parfaitement rigides et excluons toute élasticité ou déformation de ces solides.

Une conséquence de cette définition est qu'il est possible d'associer à tout solide rigide un référentiel, le **référentiel du solide**, dans lequel celui-ci est fixe.

Le corps solide constitue donc un cas très particulier d'un système de points matériels. En effet, la description de son mouvement ne requiert que la connaissance (en fonction du temps) de la position de l'un de ses points (par exemple le centre de masse) et de l'orientation du solide autour de ce point.

Comme il faut trois nombres (x , y et z) pour donner la position du point choisi, et trois angles pour décrire l'orientation du solide, on voit qu'on a besoin de calculer six quantités pour positionner un solide dans l'espace ; on dit que ce système possède six degrés de liberté.

En toute généralité, il suffira donc de six équations scalaires pour résoudre la trajectoire d'un solide. Ces six équations peuvent être le théorème du centre de masse (3.17), et le théorème du moment cinétique (3.37) ; en reprenant les notations du chapitre 3 :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha}, \quad (4.1)$$

avec A qui est fixe ou égal au centre de masse. Si le référentiel n'est pas galiléen, les forces extérieures doivent inclure les forces d'inertie.

En effet, chaque équation vectorielle est équivalente à trois équations scalaires ; on a donc bien six équations scalaires pour les six degrés de liberté.

Souvent, diverses contraintes feront qu'il y aura moins de six degrés de liberté dans le problème : le solide est peut-être attaché en un point, ou bien il glisse sans tourner sur une surface, etc. S'il ne reste plus qu'un seul degré de liberté, on pourra préférer utiliser le théorème de l'énergie cinétique (3.42) ou mécanique (3.57) pour résoudre le problème ; par exemple

$$dE_c = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext } \alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}. \quad (4.2)$$

On rappelle (voir chapitre 3) que seules les forces extérieures interviennent dans le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique. Pour un solide, on peut également ignorer les forces intérieures dans les théorèmes de l'énergie : en effet, alors que les forces intérieures peuvent travailler dans un système de points quelconque, la distance entre deux atomes d'un

solide reste constante ; or on sait d'après l'encadré 3.5, page 38, que le travail total des forces intérieures est alors nul. En résumé :

Encadré 4.1

Dans l'étude du mouvement des solides, on peut entièrement oublier les forces intérieures.

4.1.2 Sommes et intégrales

On sait que l'impulsion totale de n'importe quel système s'écrit

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}. \quad (4.3)$$

Dans le cas d'un solide, on sait que si deux atomes sont très proches l'un de l'autre, ils doivent avoir pratiquement la même vitesse. Considérons alors un petit volume dV autour d'un point M du solide. Tous les atomes dans ce volume ont (pratiquement) la même vitesse, que l'on note $\vec{v}(M)$. Notons également dm la masse totale présente dans le volume dV . Alors l'impulsion totale des atomes dans dV s'écrit

$$\sum_{\alpha \in dV} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = dm \vec{v}(M). \quad (4.4)$$

(La notation $\alpha \in dV$ signifie : α tel que le point M_{α} est dans le volume dV .) Si on somme cette quantité sur tous les petits éléments de volume qui constituent le solide, on obtient l'impulsion totale $\vec{p}$. Mais une somme sur des quantités infinitésimales est une intégrale, si bien que finalement on écrit

$$\vec{p} = \iiint dm \vec{v}(M). \quad (4.5)$$

Toutes les formules obtenues au chapitre 3 comme des sommes sur α peuvent s'écrire comme des intégrales sur la masse. Voici quelques exemples.

$$\text{Masse du système} \quad m = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad m = \iiint dm, \quad (4.6)$$

$$\text{Position du centre de masse} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{OM}_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{m} \iiint dm \overrightarrow{OM}, \quad (4.7)$$

$$\text{Énergie cinétique} \quad E_c = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 \quad \Leftrightarrow \quad E_c = \iiint dm \frac{1}{2} \vec{v}(M)^2, \quad (4.8)$$

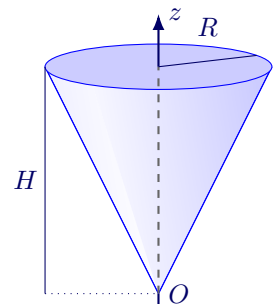
$$\text{Moment cinétique} \quad \vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L}_A = \iiint dm \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M). \quad (4.9)$$

(Note : on écrira souvent $\vec{v}$ plutôt que $\vec{v}(M)$.)

Pour calculer une intégrale de ce type, on commence par écrire $dm = \mu dV$, avec μ la masse volumique (qui est constante pour un solide homogène, ou qui dépend de la position sinon), puis on choisit un système de coordonnées. On écrit $\overrightarrow{OM}$ et dV dans ce système, puis on fait le calcul. Par exemple, $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ et $dV = dx dy dz$ en cartésien, $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_{\rho} + z \vec{u}_z$ et $dV = \rho d\varphi d\rho dz$ en cylindrique, etc. ; voir la section 1.1.3.

Exemple 4.1 : Considérons un cône homogène de hauteur H dont la base est un disque de rayon R , et cherchons la position du centre de masse C . Nous allons en fait commencer par calculer le volume du cône, dont on aura besoin plus tard.

On se place en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , avec l'origine O au sommet du cône, l'axe des z selon l'axe du cône et orienté vers la base. La coordonnée z va de 0 (sommet) à H (base). Les points du cône à une altitude z donnée forment un disque de rayon zR/H (d'après Thalès), et donc la coordonnée ρ va de 0 à zR/H . Finalement, φ va de 0 à 2π . On peut maintenant écrire l'intégrale triple



puis calculer tour à tour les trois intégrales :

$$V = \iiint dV = \int_{z=0}^H \int_{\rho=0}^{\frac{zR}{H}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\varphi d\rho dz = \int_{z=0}^H \int_{\rho=0}^{\frac{zR}{H}} 2\pi\rho d\rho dz = \int_{z=0}^H \pi \left(\frac{zR}{H}\right)^2 dz = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3}. \quad (4.10)$$

Finalement,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \quad (4.11)$$

Le volume est donc égal à un tiers de l'aire de la base fois la hauteur (ce résultat est valide pour tout cône ou pyramide, même penché).

Passons maintenant au centre de masse, avec la formule (4.7). On écrit $dm = \mu dV$ et $m = \mu V$ avec μ la masse volumique. Les facteurs μ se simplifient et on arrive à

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{V} \iiint dV \overrightarrow{OM} = \frac{1}{V} \int_{z=0}^H \int_{\rho=0}^{\frac{zR}{H}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (z\vec{u}_z + \rho\vec{u}_\rho) \rho d\varphi d\rho dz. \quad (4.12)$$

Lorsqu'on intègre sur φ , il faut faire attention au fait que $\vec{u}_\rho$ dépend de φ . Cependant, on a clairement, $\int \vec{u}_\rho d\varphi = \vec{0}$ par symétrie. (Si ce vecteur était non nul, dans quelle direction privilégiée pointerait-il ?) En fait, on aurait pu dès le départ affirmer que, par symétrie, le centre de masse se trouve sur l'axe (Oz) , et calculer plus simplement $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{V} \iiint dV \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{V} \iiint dV z$. Mais continuons. On a

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2\pi}{V} \int_{z=0}^H \int_{\rho=0}^{\frac{zR}{H}} z\rho d\rho dz \vec{u}_z = \frac{2\pi}{V} \int_{z=0}^H z \frac{1}{2} \left(\frac{zR}{H}\right)^2 dz \vec{u}_z = \frac{2\pi}{V} \frac{R^2}{2H^2} \times \frac{1}{4} H^4 \vec{u}_z = \frac{\pi R^2 H^2}{4V} \vec{u}_z = \frac{3}{4} H \vec{u}_z. \quad (4.13)$$

Le centre de masse est donc aux trois quarts de la hauteur en partant du sommet.

Nous allons maintenant établir les équations du mouvement d'un solide dans un cas simple, avant de développer la théorie complète.

4.1.3 Exemple : le pendule rigide

On considère un pendule rigide constitué d'une tige fine homogène de masse m et de longueur ℓ , qui oscille librement par rapport à l'une de ses extrémités maintenue fixe ; voir la figure ci-contre. À tout instant, la position du pendule est caractérisée par son angle orienté φ par rapport à la verticale descendante.

On considère un point M de la tige, à une distance ρ du centre. Le point M bouge avec la tige, mais la distance $\rho = OM$ reste constante parce que la tige est un solide. Les vecteurs position et vitesse du point M sont donc

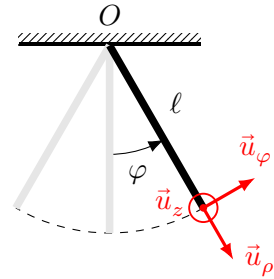
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi. \quad (4.14)$$

On peut également écrire la vitesse de M à l'aide des formules de changement de référentiel. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude, et $\mathcal{R}'$ le référentiel lié au solide. On note $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, et on applique la loi de composition des vitesses (2.22) en prenant $O' = O$ (point fixe à la fois dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$). Comme le point M est immobile dans $\mathcal{R}'$, on a $\vec{v}' = \vec{0}$, et la loi de composition se réduit à

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}, \quad (4.15)$$

avec ici $\vec{v}_O = \vec{0}$.

Le vecteur $\vec{\Omega}$ décrit la rotation du solide (c'est-à-dire de $\mathcal{R}'$) par rapport au référentiel d'étude. Ici, l'axe de rotation est la droite $(O, \vec{u}_z)$. (Pour s'en convaincre, on peut imaginer que cette droite est un objet physique, rigide, soudée à la tige du pendule. Pour faire tourner le pendule, on fait tourner la droite entre les doigts.) La norme de la vitesse angulaire est $|\dot{\varphi}|$, et



l'orientation de la rotation est, d'après la règle du tire-bouchon, selon $+\vec{u}_z$ si $\dot{\varphi} > 0$ et selon $-\vec{u}_z$ si $\dot{\varphi} < 0$. On a donc ici, quel que soit le signe de $\dot{\varphi}$,

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_z, \quad (4.16)$$

et on vérifie que $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ donne bien $\vec{v} = \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$.

Calculons maintenant l'énergie et le moment cinétiques du système. On considère un petit segment de la tige de longueur dr autour du point M . Puisque la tige est homogène, ce segment a pour masse $dm = \frac{m}{\ell} dr$. (La quantité $\frac{m}{\ell}$ s'appelle la « masse linéique », par analogie avec la masse volumique.) L'énergie cinétique du petit segment, et son moment cinétique par rapport à O sont

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \vec{v}^2 = \frac{1}{2} dm (\rho \dot{\varphi})^2, \quad d\vec{L}_O = \vec{r} \wedge dm \vec{v} = \rho \vec{u}_\rho \wedge dm \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi = dm \rho^2 \dot{\varphi} \vec{u}_z. \quad (4.17)$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ces quantités sur toute la longueur de la tige pour obtenir l'énergie cinétique et le moment cinétique du système ; après avoir remplacé dm par $\frac{m}{\ell} dr$, on obtient

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\int_0^\ell \frac{m}{\ell} dr r^2 \right] \dot{\varphi}^2, \quad \vec{L}_O = \left[\int_0^\ell \frac{m}{\ell} dr r^2 \right] \dot{\varphi} \vec{u}_z. \quad (4.18)$$

On remarque que l'on doit calculer deux fois la même intégrale. La valeur de cette intégrale s'appelle le **moment d'inertie du solide par rapport à la droite** $(O, \vec{u}_z)$. Nous allons voir que pour un solide quelconque effectuant une rotation autour d'un axe (Δ) donné, il existe un moment d'inertie noté I_Δ tel que

$$E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \vec{\Omega}^2. \quad (4.19)$$

Par ailleurs, si O est un point fixe dans le référentiel lié au solide, c'est-à-dire sur l'axe (Δ) , on a aussi, avec le même I_Δ ,

$$\vec{L}_O = I_\Delta \vec{\Omega} + (\text{un vecteur orthogonal à } \vec{\Omega}). \quad (4.20)$$

Dans l'exemple du pendule solide, la droite (Δ) est la droite $(O, \vec{u}_z)$, le moment cinétique est $I_{(O, \vec{u}_z)} = \frac{m\ell^2}{3}$ (obtenu en calculant l'intégrale dans (4.18)), et le deuxième terme dans (4.20) est, par chance, nul. En se rappelant que $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_z$, on voit que (4.18) donne bien (4.19) et (4.20).

Insistons sur un point : le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (Δ) dépend de la position de l'axe (Δ) , et pas seulement de la direction de l'axe (Δ) .

On peut maintenant écrire les équations du mouvement. Le système (la tige) est soumise à

- son poids $m\vec{g}$ (dont on peut considérer qu'il s'applique au centre de masse C , voir la section 3.5),
- la force $\vec{R}$ exercée par le dispositif d'attache au plafond sur le point O du système.

On ne connaît pas *a priori* la force $\vec{R}$, donc il est difficile d'utiliser le théorème du centre de masse. Par contre, comme la force $\vec{R}$ s'applique en O , son moment par rapport à O est nul et on a, d'après le théorème du moment cinétique (3.37),

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g}. \quad (4.21)$$

Le centre de masse C se trouve, par symétrie, au milieu de la tige. En projetant, on obtient $\vec{g} = g(\cos \varphi \vec{u}_\rho - \sin \varphi \vec{u}_\varphi)$ et $\overrightarrow{OC} = \frac{\ell}{2} \vec{u}_\rho$; on arrive donc à $\overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g} = -\frac{mg\ell}{2} \sin \varphi \vec{u}_z$.

Par ailleurs, $\vec{L}_O = I_{(O, \vec{u}_z)} \vec{\Omega} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\varphi} \vec{u}_z$. On arrive finalement à

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\varphi} \vec{u}_z = -\frac{mg\ell}{2} \sin \varphi \vec{u}_z \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{3g}{2\ell}. \quad (4.22)$$

Dans la limite des petites oscillations, $\sin \varphi \simeq \varphi$ et l'on obtient un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 . Pour un pendule simple (une masse m au bout d'un fil sans masse de longueur ℓ), on trouve la même équation mais avec $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$.

Une autre technique pour obtenir les équations du mouvement est d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique :

- L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2} I_{(O, \vec{u}_z)} \vec{\Omega}^2 = \frac{m\ell^2}{6} (\dot{\varphi})^2$,
- les forces intérieures ne travaillent pas, parce que le système est un solide,
- la force $\vec{R}$ ne travaille pas, parce qu'elle s'applique au point O , qui est fixe,
- le poids $m\vec{g}$ est une force conservative qui dérive du potentiel $E_{pp} = mg \times (\text{altitude de } C) = -mg\frac{\ell}{2} \cos \varphi$. (On a pris l'origine des altitudes au point O .)

L'énergie mécanique du système est donc constante :

$$E_c + E_{pp} = \text{Cste}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m\ell^2}{6} (\dot{\varphi})^2 - mg\frac{\ell}{2} \cos \varphi = \text{Cste}. \quad (4.23)$$

On dérive cette expression par rapport au temps :

$$\frac{m\ell^2}{3} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + mg\frac{\ell}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} = 0. \quad (4.24)$$

Après simplification par $\dot{\varphi}$, on retrouve (4.22).

4.2 Résultats principaux

Nous allons démontrer les résultats principaux qui permettent de mettre en équation des problèmes impliquant des solides.

Tout d'abord, comme les points du solide restent à distances constantes les uns des autres, les vitesses de ces points sont reliées entre elles. On montre le résultat suivant :

Encadré 4.2

À tout instant, il existe un **vecteur vitesse angulaire** $\vec{\Omega}$ (éventuellement dépendant du temps) tel que, si A et M sont deux points du solide (ou immobiles dans le référentiel lié au solide), on a

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}. \quad (4.25)$$

À tout instant, le vecteur vitesse angulaire est dirigé selon l'axe de rotation, son sens vérifie la règle du tire-bouchon et sa norme est la vitesse angulaire de la rotation.

Cette formule est tout simplement la loi de composition des vitesses (2.22), vue dans le chapitre 2 sur les changements de référentiel ! En effet, considérons le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel le solide est immobile et notons $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ (avec $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude). On applique (2.22) avec $O' = A$ (qui, étant un point du solide, est bien fixe dans $\mathcal{R}'$). Comme $\vec{v}' = \vec{0}$ (puisque le point M , appartenant au solide, a une vitesse nulle dans le référentiel lié au solide), on obtient bien (4.25).

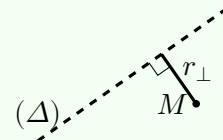
L'énergie et le moment cinétiques d'un solide dépendent du vecteur rotation et des **moments d'inertie** du solide, que l'on définit ainsi :

Encadré 4.3

Pour un solide donné et une droite (Δ) donnée, on appelle **moment d'inertie du solide par rapport à la droite** (Δ) la quantité

$$I_{\Delta} = \iiint dm r_{\perp}^2, \quad (4.26)$$

où $r_{\perp}$ est la distance entre le point courant M et la droite (Δ) .



On a alors deux types de résultats, que l'on va voir dans les deux sections suivantes, selon que l'on calcule les vitesses par rapport à un point de vitesse nulle ou par rapport au centre de masse.

4.2.1 Par rapport à un point de vitesse nulle

Encadré 4.4

Considérons un solide en mouvement, de vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, et un point A lié au solide qui, à un instant donné, a une vitesse $\vec{v}_A$ nulle dans le référentiel d'étude. À cet instant, la droite $(A, \vec{\Omega})$ passant par A et dirigée selon $\vec{\Omega}$ est l'**axe instantané de rotation** du solide, et :

- L'énergie cinétique du solide s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} I_{(A, \vec{\Omega})} \vec{\Omega}^2. \quad (4.27)$$

- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit

$$\vec{L}_A = I_{(A, \vec{\Omega})} \vec{\Omega} + \vec{K} \quad \text{avec } \vec{K} \text{ orthogonal à } \vec{\Omega}. \quad (4.28)$$

- Par ailleurs, si l'axe de rotation $(A, \vec{\Omega})$ est un axe de symétrie du solide, ou s'il est perpendiculaire à un plan de symétrie du solide, alors $\vec{K} = \vec{0}$.

Rappel : ces deux formules ne sont valables que si $\vec{v}_A = \vec{0}$.

Remarque : Il peut arriver que $\vec{K} = \vec{0}$ même si le solide n'a aucune symétrie ; voir la section 4.3, ainsi que la section B.3.3 dans l'appendice.

Pour montrer ces résultats, on part des définitions (4.8) et (4.9) de l'énergie et du moment cinétique :

$$E_c = \iiint dm \frac{1}{2} \vec{v}(M)^2, \quad \vec{L}_A = \iiint dm \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M), \quad (4.29)$$

où l'intégrale se fait sur le point courant M .

On décompose $\overrightarrow{AM}$ de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AM} = \vec{r}_{//} + \vec{r}_{\perp} \quad \text{avec } \vec{r}_{//} \text{ parallèle et } \vec{r}_{\perp} \text{ perpendiculaire à } \vec{\Omega}. \quad (4.30)$$

Comme le point A est fixe, on a, d'après (4.25),

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{r}_{//} + \vec{r}_{\perp}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{\perp}. \quad (4.31)$$

(En effet, $\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{//} = \vec{0}$ puisque $\vec{\Omega}$ et $\vec{r}_{//}$ sont colinéaires.) Comme les vecteurs, $\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{\perp}$ sont orthogonaux, on a

$$\|\vec{v}(M)\| = \|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{\perp}\| = \|\vec{\Omega}\| \times \|\vec{r}_{\perp}\|. \quad (4.32)$$

On notera $r_{\perp} = \|\vec{r}_{\perp}\|$; cette quantité est la distance entre M et l'axe de rotation $(A, \vec{\Omega})$. En reportant dans l'expression (4.29) de l'énergie cinétique, on arrive à

$$E_c = \iiint dm \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \|\vec{\Omega}\|^2, \quad (4.33)$$

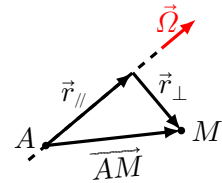
qui est bien, avec (4.26), l'expression (4.27) de l'énergie cinétique.

Passons maintenant au moment cinétique ; en utilisant (4.31) on a

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{\perp}). \quad (4.34)$$

On rappelle l'égalité $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$, voir (A.6) dans l'annexe. On obtient alors

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M) = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{r}_{\perp}) \vec{\Omega} - (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}) \vec{r}_{\perp}. \quad (4.35)$$



Avec la décomposition (4.30), comme $\vec{r}_{//}$ et $\vec{\Omega}$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\vec{r}_{\perp}$, on a $\overline{AM} \cdot \vec{r}_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp} = r_{\perp}^2$ et $\overline{AM} \cdot \vec{\Omega} = \vec{r}_{//} \cdot \vec{\Omega}$. Finalement

$$\overline{AM} \wedge \vec{v}(M) = \vec{r}_{\perp}^2 \vec{\Omega} - (\vec{r}_{//} \cdot \vec{\Omega}) \vec{r}_{\perp}. \quad (4.36)$$

En reportant dans (4.29), on arrive alors à

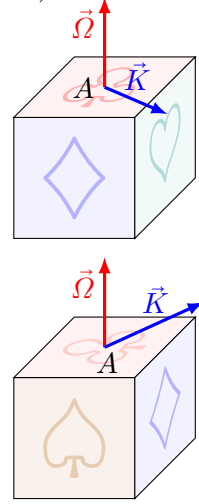
$$\vec{L}_A = \left[\iiint dm \vec{r}_{\perp}^2 \right] \vec{\Omega} - \iiint dm (\vec{r}_{//} \cdot \vec{\Omega}) \vec{r}_{\perp}. \quad (4.37)$$

Le premier terme est bien $I_{(A, \vec{\Omega})} \vec{\Omega}$. Le deuxième terme, appelons-le $\vec{K}$, est clairement orthogonal à $\vec{\Omega}$ puisque le terme intégré est toujours orthogonal à $\vec{\Omega}$; on a donc obtenu (4.28).

Démontrons que si $(A, \vec{\Omega})$ est un axe de symétrie du solide, alors $\vec{K} = \vec{0}$. Pour cela, on va voir qu'il est inutile d'essayer de calculer l'intégrale qui définit $\vec{K}$. Supposons que l'axe de rotation $(A, \vec{\Omega})$ soit un axe de symétrie, au sens que si l'on tourne le solide autour de cet axe d'un certain angle φ (qui n'est pas un multiple de 360° ...), alors le solide après rotation est identique au solide avant rotation. (Par exemple, le cube homogène représenté ci-contre est identique à lui-même après des rotations de 90° , 180° et 270° autour de l'axe $(A, \vec{\Omega})$.)

Imaginons que, pour un tel solide, le vecteur $\vec{K}$ soit non-nul. Alors, quand on tourne le solide d'un angle φ autour de l'axe de rotation, le vecteur $\vec{K}$ devrait tourner lui aussi d'un angle φ (comme sur la figure ci-contre après une rotation de 90°). D'un autre côté, comme le solide est identique à lui-même pour un angle φ bien choisi, le vecteur $\vec{K}$ devrait ne pas bouger. On arrive ainsi à une contradiction en supposant $\vec{K} \neq \vec{0}$, et on en déduit que, pour un solide en rotation autour d'un axe de symétrie, $\vec{K}$ doit être nul.

De même, $\vec{K} = \vec{0}$ si $(A, \vec{\Omega})$ est perpendiculaire à un axe de symétrie. En effet, d'après (4.37), si on retourne $\vec{\Omega}$, on retourne également $\vec{K}$. Si maintenant on prend le symétrique du système, on revient à la situation initiale, mais avec un $\vec{K}$ opposé à celui de départ; autrement dit : $\vec{K} = -\vec{K}$, et donc $\vec{K} = \vec{0}$.



4.2.2 Par rapport au centre de masse

Trouver un point fixe lié au solide en mouvement afin d'utiliser directement les résultats de l'encadré 4.4 n'est pas toujours facile. Il est souvent plus pratique de se placer dans le référentiel barycentrique, section 3.6, et de calculer le moment et l'énergie cinétiques $\vec{L}^*$ et E_c^* dans ce référentiel en utilisant l'encadré 4.4 avec le centre de masse C comme point fixe. On applique alors les théorèmes de König, (3.70), pour obtenir $\vec{L}_A$ et E_c dans le référentiel d'étude. On arrive à :

Encadré 4.5

Considérons un solide en mouvement, de vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Dans le référentiel barycentrique, le centre de masse C est immobile et la droite $(C, \vec{\Omega})$ est l'axe instantané de rotation.

- L'énergie cinétique barycentrique du solide s'écrit

$$E_c^* = \frac{1}{2} I_{(C, \vec{\Omega})} \vec{\Omega}^2; \quad (4.38)$$

- Le moment cinétique barycentrique du solide s'écrit

$$\vec{L}^* = I_{(C, \vec{\Omega})} \vec{\Omega} + \vec{K} \quad \text{avec } \vec{K} \text{ orthogonal à } \vec{\Omega}. \quad (4.39)$$

- Par ailleurs, si l'axe de rotation $(C, \vec{\Omega})$ est un axe de symétrie du solide, ou s'il est perpendiculaire à un plan de symétrie du solide, alors $\vec{K} = \vec{0}$.

Dans le référentiel d'étude, on obtient alors grâce aux théorèmes de König que

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + E_c^*, \quad \vec{L}_A = \overline{AC} \wedge m \vec{v}_C + \vec{L}^*. \quad (4.40)$$

Remarque : sous cette forme, on appelle souvent $\frac{1}{2}m\vec{v}_C^2$ « l'énergie cinétique de translation » et E_c^* « l'énergie cinétique de rotation ».

Nous allons illustrer les résultats de l'encadré 4.5 sur un exemple.

4.2.3 Exemple : cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné

On considère un cylindre homogène de rayon R , de hauteur H et de masse m qui roule sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le dessin ci-contre montre l'état du système à deux instants différents, représenté dans le plan contenant C perpendiculaire à l'axe du cylindre. On note S le point de contact entre le cylindre et la pente dans ce plan ; pour se repérer, on a tracé (en bleu) sur le cylindre le rayon entre le centre et le point de contact initial.

On place l'origine O du repère à la position initiale du centre de masse C du cylindre. On a alors

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = x \vec{u}_x, \quad \vec{v}_C = \dot{x} \vec{u}_x, \quad (4.41)$$

où $x = x(t)$ est la distance parcourue par le cylindre depuis le début de l'expérience et où $\vec{u}_x$ est dirigée selon la pente, vers le bas.

En roulant, le cylindre tourne sur lui-même. On note $\theta = \theta(t)$ l'angle dont a tourné le cylindre depuis le début de l'expérience.

Dans le référentiel barycentrique, voir la section 3.6, le point C est par définition immobile. En fait, dans le référentiel barycentrique, le mouvement du cylindre est très simple : il tourne autour de son axe, la droite $(C, \vec{u}_z)$. La vitesse angulaire instantanée est $\dot{\theta}$, et le vecteur rotation est

$$\vec{\Omega} = -\dot{\theta} \vec{u}_z. \quad (4.42)$$

(Attention au signe $-$, penser au tire-bouchon.)

On remarque que la situation est bien plus simple dans le référentiel barycentrique que dans le référentiel d'étude. Dans le référentiel d'étude, l'axe de rotation n'est pas fixe puisque aucun point lié au solide ne reste immobile. ^{*1}

L'axe $(\Delta) = (C, \vec{u}_z)$ est donc l'axe de rotation dans le référentiel barycentrique. Cet axe est par ailleurs un axe de symétrie du solide ; on peut donc appliquer les résultats de l'encadré 4.5 :

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_C^2 + \frac{1}{2}I_\Delta \vec{\Omega}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_\Delta \dot{\theta}^2, \quad \vec{L}_C = \vec{L}^* = I_\Delta \vec{\Omega} = -I_\Delta \dot{\theta} \vec{u}_z. \quad (4.43)$$

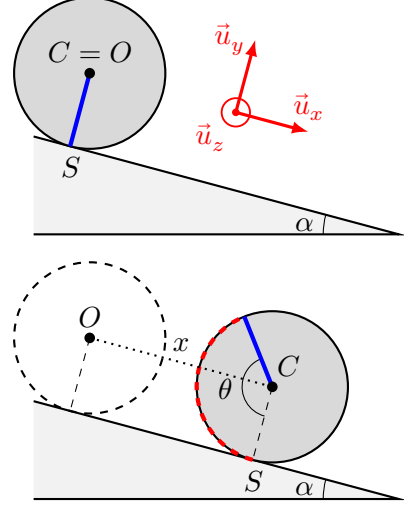
Calculons I_Δ en utilisant (4.26). On repère le point courant M en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , dans un repère centré en C avec z le long de l'axe du cylindre. Dans ce repère, on décrit tout le solide lorsque ρ varie de 0 à R , φ varie de 0 à 2π et z varie de $-H/2$ à $+H/2$. Par ailleurs, la distance à l'axe $r_\perp$ est justement la coordonnée cylindrique ρ . On écrit $dm = \frac{m}{V} dV$ avec $V = \pi R^2 H$ le volume du cylindre ($\frac{m}{V}$ est donc la masse volumique), puis on écrit, en coordonnées cylindriques, $dV = \rho d\varphi d\rho dz$. On obtient donc

$$I_{(\Delta)} = \iiint r_\perp^2 dm = \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \times \frac{m}{V} \rho d\varphi d\rho dz. \quad (4.44)$$

Les intégrales sont faciles à calculer ; on arrive à

$$I_{(\Delta)} = \frac{m}{V} \times 2\pi \times H \times \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}. \quad (4.45)$$

1. Si on fait l'hypothèse du roulement sans glissement, décrite plus bas, alors l'axe de rotation instantané est l'axe colinéaire à $\vec{u}_z$ passant par le point de contact S .



On a donc

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2, \quad \vec{L}_C = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z. \quad (4.46)$$

Nous allons faire l'hypothèse supplémentaire que le cylindre **roule sans glisser**. On a alors

$$x = R\theta. \quad (4.47)$$

En effet, la distance x parcourue par le cylindre depuis le début de l'expérience doit être égale, en l'absence de glissement, à la longueur représentée en pointillés rouges sur la figure ci-dessus, et cette longueur est justement $x = R\theta$.

Avec cette contrainte du « roulement sans glissement », le système n'a qu'un seul degré de liberté et, si on choisit x comme variable, en utilisant $R\dot{\theta} = \dot{x}$, on trouve

$$E_c = \frac{3}{4}m\dot{x}^2, \quad \vec{L}_C = -\frac{1}{2}mR\dot{x}\vec{u}_z. \quad (4.48)$$

On peut maintenant écrire les équations du mouvement. On se place dans le référentiel lié à la rampe, supposé galiléen. Le système étudié est le cylindre, et les forces extérieures s'appliquant sur le cylindre sont le poids $m\vec{g}$ qui s'applique au point C , la réaction normale $\vec{N}$ qui s'applique au point S , et la force de frottement $\vec{f}$ qui s'applique au point S , voir la figure ci-contre.

Il ne faut pas oublier la force de frottement : si elle était absente, le cylindre glisserait sans rouler, alors qu'on a supposé qu'il roulait sans glisser. Si le cylindre glissait, son point de contact avec la rampe se déplacerait le long de la pente vers la droite ; la force de frottement, qui s'oppose à ce mouvement, est donc le long de la pente vers la gauche.

Essayons d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\frac{d}{dt}\vec{v}_C = m\ddot{x}\vec{u}_x = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}. \quad (4.49)$$

En projection sur les axes du repère (on rappelle qu'on a pris $\vec{u}_x$ le long de la pente)

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - f, \quad N = mg\cos\alpha, \quad (4.50)$$

avec $f = \|\vec{f}\|$ et $N = \|\vec{N}\|$. Comme on ne connaît pas f , il nous faut une autre équation. Cette équation est donnée par le théorème du moment cinétique, (3.37), que l'on applique au point C :

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_C = \vec{M}_C(m\vec{g}) + \vec{M}_C(\vec{N}) + \vec{M}_C(\vec{f}). \quad (4.51)$$

mais

$$\begin{aligned} \vec{M}_C(m\vec{g}) &= \vec{CC} \wedge m\vec{g} = \vec{0}, & \vec{M}_C(\vec{N}) &= \vec{CS} \wedge \vec{N} = \vec{0}, \\ \vec{M}_C(\vec{f}) &= \vec{CS} \wedge \vec{f} = -R\vec{u}_y \wedge -f\vec{u}_x = -Rf\vec{u}_z. \end{aligned} \quad (4.52)$$

On a donc

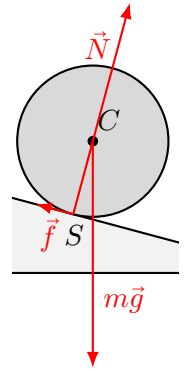
$$-\frac{1}{2}mR\ddot{x} = -Rf, \quad (4.53)$$

c'est-à-dire $m\ddot{x} = 2f$. Mais, dans (4.50), on avait obtenu $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - f$; on en déduit que

$$f = \frac{1}{3}mg\sin\alpha, \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha. \quad (4.54)$$

On remarque que le rayon R n'intervient pas dans ces équations. Pour un objet qui glisse sans rouler sur la même pente d'angle α , on aurait obtenu $\ddot{x} = g\sin\alpha$.

En fait, comme il y a un seul degré de liberté dans ce problème, il est plus simple d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique. En prenant l'origine des altitudes au point de départ, l'altitude



de C est $-x \sin \alpha$, et l'énergie potentielle de pesanteur du cylindre est donc $E_{pp} = -mgx \sin \alpha$. La réaction $\vec{R}$ et les frottements $\vec{f}$ ne travaillent pas parce que le point du cylindre en contact avec la pente a une vitesse nulle. Le point géométrique de contact glisse le long de la pente, mais, à chaque instant, la vitesse du point matériel du solide en contact avec la pente est nulle. (C'est la signification de « rouler sans glisser ». Le point *géométrique* de contact glisse le long de la pente, mais, à chaque instant, la vitesse du point matériel du solide en contact avec la pente est nulle. On peut aussi directement le vérifier avec la formule (4.25) : $\vec{v}_S = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CS}$ avec $\vec{v}_C = \dot{x} \vec{u}_x$, $\vec{\Omega} = -\dot{\theta} \vec{u}_z$ et $\overrightarrow{CS} = -R \vec{u}_y$; cela donne $\vec{v}_S = (\dot{x} - R\dot{\theta}) \vec{u}_x = \vec{0}$ puisqu'on a supposé que $x = R\theta$.)

L'énergie mécanique est donc constante, ce qui donne avec (4.48)

$$E_c + E_{pp} = \text{Cste} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - mgx \sin \alpha = \text{Cste}. \quad (4.55)$$

Après dérivation par rapport au temps et simplification par m et par $\dot{x}$, on obtient la même expression qu'avant pour $\ddot{x}$.

4.2.4 Rotation autour d'un axe fixe

Un cas particulier important est celui de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe (Δ) de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$. Cela signifie que tout point A de (Δ) est fixe, et que l'on peut écrire

$$\vec{\Omega} = \Omega(t) \vec{u}. \quad (4.56)$$

(On écrira souvent $\Omega(t) = \dot{\varphi}(t)$, où $\varphi(t)$ est l'angle que fait le solide au cours de sa rotation par rapport à une direction de référence arbitraire.) On projette alors le théorème du moment cinétique sur $\vec{u}$:

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{L}_A \right) \cdot \vec{u} = \left(\sum_{\alpha} \overrightarrow{AM_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha} \right) \cdot \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\vec{L}_A \cdot \vec{u}) = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{AM_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha}) \cdot \vec{u}, \quad (4.57)$$

en utilisant que $\vec{u}$ est constant. En utilisant l'expression (4.28) du moment cinétique, on obtient pour le membre de gauche

$$\vec{L}_A \cdot \vec{u} = I_{\Delta} \Omega, \quad (4.58)$$

puisque par définition, $\vec{K}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Cette quantité s'appelle **le moment cinétique du solide par rapport à l'axe (Δ)** . Il ne dépend pas du choix du point A de l'axe.

Dans le membre de droite de (4.57), le terme $(\overrightarrow{AM_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\text{ext } \alpha}) \cdot \vec{u}$ s'appelle le **moment de la force $\vec{F}_{\text{ext } \alpha}$ par rapport à l'axe (Δ)** . Il ne dépend pas du choix du point A (tant qu'il est sur l'axe), et peut se calculer comme étant (distance entre M_{α} et (Δ)) $\times$ (composante de la force perpendiculaire au plan contenant (Δ) et M_{α}) $\times$ (± 1 selon le sens de cette force.)

4.3 Axes principaux du solide

Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du solide, le centre de masse C est immobile et l'axe instantané de rotation est $(\Delta) = (C, \vec{\Omega})$. On a énoncé, dans l'encadré 4.5, la propriété suivante :

$$\text{Si } (\Delta) \text{ est un axe de symétrie, alors } \vec{L}^* = I_{\Delta} \vec{\Omega}. \quad (4.59)$$

La réciproque de cette propriété est fautive : il peut arriver qu'un axe (Δ) ne soit pas un axe de symétrie, mais que l'on ait quand même $\vec{L}^* = I_{\Delta} \vec{\Omega}$.

4.3.1 Définition et propriétés

Encadré 4.6

On appelle **axe principal** d'un solide donné tout axe (Δ) passant par C tel que, lorsque l'axe instantané de rotation est (Δ) dans le référentiel barycentrique, on ait :

$$\vec{L}^* = I_{\Delta} \vec{\Omega}. \quad (4.60)$$

- Tous les axes de symétrie du solide sont des axes principaux.
- Il peut exister des axes principaux qui ne sont pas des axes de symétrie.

Exemple 4.2 : Pour une boule homogène, tous les axes passant par le centre sont des axes de symétrie, et donc des axes principaux.

Pour un cube homogène, il y a 13 axes de symétrie qui passent tous par le centre du cube. (Au passage, tout axe de symétrie passe forcément par le centre de masse ; réfléchissez-y, et essayez d'identifier les 13 axes de symétrie du cube.) Les 13 axes de symétrie sont des axes principaux, bien sûr, mais on verra en TD que n'importe quel axe passant par le centre d'un cube homogène est, en fait, un axe principal.

Nous allons admettre les résultats suivants (des éléments de démonstration, basée sur l'application du théorème spectral décrivant les vecteurs propres d'une matrice réelle symétrique, sont donnés en appendice dans la section B.3.3).

Encadré 4.7

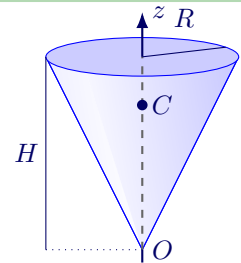
On considère un solide quelconque de centre de masse C .

- On peut trouver trois axes principaux orthogonaux deux à deux.
- Si on a déjà trouvé un premier axe principal, on peut trouver deux autres axes principaux orthogonaux entre eux et au premier axe.
- Si on a déjà trouvé deux axes principaux orthogonaux entre eux, alors l'axe passant par C orthogonal à ces deux axes est également un axe principal.

Exemple 4.3 : On reprend le cône homogène de l'exemple 4.1, page 52. On avait vu que son centre de masse se trouvait sur l'axe (Oz) , aux $3/4$ de la hauteur en partant de O , comme sur la figure ci-contre.

L'axe (Oz) est un axe de symétrie du solide ; c'est donc un axe principal.

Le solide n'a pas d'autre axe de symétrie, mais d'après l'encadré 4.7 on peut trouver deux autres axes principaux orthogonaux à l'axe (Oz) et orthogonaux entre eux. Mais toutes les droites orthogonales à (Oz) passant par C sont équivalentes (par définition, tous les axes principaux passent par C) ; il n'y a aucune direction privilégiée. On en déduit que toutes les droites orthogonales à (Oz) passant par C sont des axes principaux.



On peut donc construire une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ qui est *liée au solide* de manière à ce que les droites $(C, \vec{u}_1)$, $(C, \vec{u}_2)$ et $(C, \vec{u}_3)$ soient des axes principaux du solide. Ainsi, si $\vec{\Omega}$ est selon $\vec{u}_i$ pour $i = 1, 2, 3$, alors $\vec{L}^* = I_i \vec{\Omega}$, où I_i est le moment cinétique associé à l'axe $(C, \vec{e}_i)$. Mais on a, de manière plus générale, le résultat suivant que nous admettrons également :

Encadré 4.8

Soit un solide quelconque et une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée au solide, où chaque vecteur est dans la direction d'un axe principal. Si on décompose le vecteur rotation dans cette base

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{u}_1 + \Omega_2 \vec{u}_2 + \Omega_3 \vec{u}_3, \quad (4.61)$$

alors le moment et l'énergie cinétiques dans le référentiel barycentrique sont

$$\vec{L}^* = I_1 \Omega_1 \vec{u}_1 + I_2 \Omega_2 \vec{u}_2 + I_3 \Omega_3 \vec{u}_3, \quad E_c^* = \frac{1}{2} I_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2, \quad (4.62)$$

où I_1 , I_2 sont I_3 sont les moments d'inertie du solide par rapport aux trois axes principaux $(C, \vec{u}_1)$, $(C, \vec{u}_2)$ et $(C, \vec{u}_3)$; on les appelle les « **moments principaux du solide** ».

Exemple 4.4 : On considère une tige homogène fine de longueur ℓ et de masse m . Le centre de masse C est au centre de la tige. Il est clair que l'axe de la tige et tous les axes passant par C et perpendiculaires à la tige sont des axes de symétrie, et donc des axes principaux.

Choisissons $\vec{u}_3$ le long de la tige, et $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ orthogonaux entre eux et à la tige, de manière à ce que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ soit un repère orthonormé direct. On va maintenant calculer les moments principaux de la tige en utilisant (4.26).

Commençons par I_3 . Pour tout point M de la tige, la distance $r_\perp$ entre le point et l'axe $(C, \vec{u}_3)$ est clairement nulle. On en déduit $I_3 = 0$.

On passe maintenant à I_1 . La distance $r_\perp$ entre un point M et l'axe $(C, \vec{u}_1)$ est simplement égale à la distance $r = CM$. Un petit élément de longueur dr autour de M a une masse $dm = \frac{m}{\ell} dr$, et on a donc

$$I_1 = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{m}{\ell} dr r^2 = \frac{m}{\ell} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{m}{\ell} \left[\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24} \right] = \frac{m\ell^2}{12}. \quad (4.63)$$

Le calcul de I_2 est exactement le même, et on arrive finalement à

$$I_1 = I_2 = \frac{m\ell^2}{12}, \quad I_3 = 0. \quad (4.64)$$

4.3.2 Exemple d'une rotation qui n'est pas autour d'un axe principal

On considère une boîte dont la base est un carré de côté a avec quatre pieds en ses coins qui reposent sur une table horizontale, voir figure 4.1. Dans la boîte, un moteur fait tourner un axe vertical, sortant du centre de la boîte, à une vitesse angulaire Ω constante. Sur cet axe est fixée en son centre une tige de masse m et de longueur ℓ , mais qui est inclinée d'un angle α avec l'horizontale. On note m' la masse du bloc moteur (=boîte+pieds+moteur+axe vertical); la masse totale du système est donc $m + m'$.

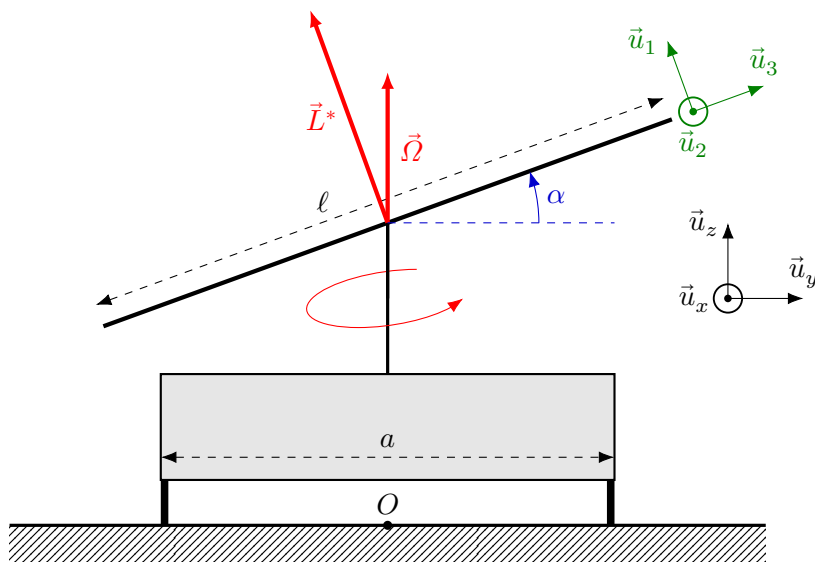


FIGURE 4.1 – Le système étudié vu au moment où la tige inclinée est dans le plan (Oyz) .

On utilise le repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ vertical ascendant et $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ selon les côtés du carré, et O sur la table à la verticale de l'axe. On utilise également la base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée à la tige en rotation : $\vec{u}_3$ est dans l'axe de la tige, $\vec{u}_1$ est dans le plan vertical contenant la tige et $\vec{u}_2$ est horizontal.

Question : à l'instant où la tige est dans le plan (Oyz) (comme sur la figure), quelles sont les forces de réaction s'exerçant sur les pieds de la boîte ?

On note $\vec{R}_{\text{gauche}} = R_{\text{gauche}} \vec{u}_z$ la force de réaction totale s'exerçant sur les deux pieds de gauche (sur la figure, on ne voit qu'un pied à gauche parce qu'ils sont l'un derrière l'autre), et $\vec{R}_{\text{droite}} = R_{\text{droite}} \vec{u}_z$ la force de réaction totale s'exerçant sur les deux pieds de droite. Comme le centre de masse est immobile, et que les seules forces extérieures sont le poids et les réactions de la table sur les pieds, l'équilibre en translation de la boîte implique

$$R_{\text{gauche}} + R_{\text{droite}} = (m + m')g. \quad (4.65)$$

(Rappel : les forces exercées par le moteur sont des forces internes, qui n'interviennent pas dans le principe fondamental de la dynamique.)

On cherche maintenant à appliquer le théorème du moment cinétique. Le moment cinétique de la boîte étant nul et celui de l'axe vertical étant négligeable, il reste à calculer le moment cinétique de la tige.

Le centre de masse de la tige est immobile : le référentiel d'étude est égal au référentiel barycentrique. On a déjà identifié les axes principaux de la tige dans l'exemple 4.4 ; ils sont portés par les vecteurs unitaires $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ représentés sur la figure.

Le vecteur vitesse angulaire est $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$, mais, pour appliquer (4.62), on a besoin de l'écrire dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. On a $\vec{u}_z = \cos \alpha \vec{u}_1 + \sin \alpha \vec{u}_3$, et donc

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \alpha \vec{u}_1 + \vec{\Omega} \sin \alpha \vec{u}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega_1 = \Omega \cos \alpha, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \alpha. \quad (4.66)$$

Avec (4.62), on obtient alors

$$\vec{L}^* = I_1 \Omega_1 \vec{u}_1 + I_2 \Omega_2 \vec{u}_2 + I_3 \Omega_3 \vec{u}_3 = \frac{m\ell^2}{12} \Omega \cos \alpha \vec{u}_1. \quad (4.67)$$

(On a utilisé $I_3 = 0$ et $I_1 = \frac{m\ell^2}{12}$, voir l'exemple 4.4.) D'après (3.70), le moment cinétique de la tige par rapport à n'importe quel point fixe est égal à L^* puisque son centre est immobile.

On remarque que le moment cinétique $\vec{L}^*$ n'est pas colinéaire au vecteur vitesse angulaire. Par ailleurs, $\vec{L}^*$ dépend du temps (puisque le vecteur $\vec{u}_1$ tourne avec le système), alors que le vecteur $\vec{\Omega}$ est constant.

Le vecteur $\vec{u}_1$ étant fixe par rapport au solide, et celui-ci tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ par rapport au référentiel terrestre, la formule de Bour (2.12) donne

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_1 = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_1 = \Omega \sin \alpha \vec{u}_2, \quad (4.68)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = \frac{m\ell^2}{12} \Omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_2. \quad (4.69)$$

Cette quantité doit être égale à la somme $\vec{\mathcal{M}}$ des moments des forces extérieures. Comme la somme des forces extérieures est nulle, la somme des moments ne dépend pas du point de référence, mais on la calcule par rapport au point O . En supposant que le centre de masse de la boîte est à la verticale de O , le moment du poids est nul et on trouve (à faire en exercice)

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{a}{2} (R_{\text{droite}} - R_{\text{gauche}}) \vec{u}_x + \frac{a}{2} (R_{\text{derrière}} - R_{\text{devant}}) \vec{u}_y, \quad (4.70)$$

où R_{devant} est la projection selon $\vec{u}_z$ de la somme des deux forces de réaction des pieds de devant, et de même pour $R_{\text{derrière}}$.

Les expressions (4.69) et (4.70) sont vraies à tout instant. Dans la configuration de la figure, quand la tige est dans le plan (Oyz) , on a $\vec{u}_2 = \vec{u}_x$. On en conclut que, à cet instant,

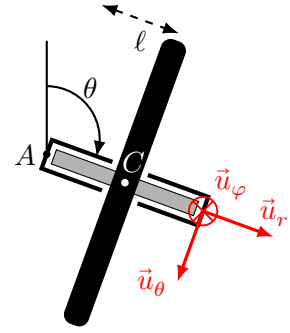
$$R_{\text{derrière}} = R_{\text{devant}}, \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} (R_{\text{droite}} - R_{\text{gauche}}) = \frac{m\ell^2}{12} \Omega^2 \cos \alpha \sin \alpha. \quad (4.71)$$

On peut en déduire R_{droite} et R_{gauche} à l'aide de (4.65).

Le calcul donne que si $m\ell^2 \Omega^2 \cos \alpha \sin \alpha > 6a(m + m')g$, alors $R_{\text{gauche}} < 0$, ce qui n'est pas possible (à moins que les pieds ne soient collés à la table). On en déduit que la boîte doit bouger, et certains pieds doivent décoller, si Ω est trop grand.

4.4 L'effet gyroscopique

On considère une roue de vélo, lestée en sa circonférence, munie d'un axe passant en son centre. Un manchon de masse négligeable, dans lequel l'axe tourne sans frottement, permet de tenir le système même lorsque la roue tourne. Le centre de masse C est au milieu du système, et on note ℓ la demi-longueur de l'axe, entre C et l'extrémité du manchon. Une ficelle est accrochée au manchon en son extrémité, au point A sur la figure, ce qui permet de tenir le système.



On repère l'orientation de l'axe par les angles sphériques θ et φ , avec θ l'angle entre la verticale ascendante au point A et l'axe de la roue. On utilise la base sphérique associée; en particulier $\vec{u}_r$ est selon l'axe de la roue.

Par symétrie, les axes principaux du système sont

- La droite $(C, \vec{u}_r)$. On pose I_1 le moment d'inertie associé à cet axe.
- N'importe quelle droite passant par C et perpendiculaire à l'axe. On note I_2 le moment d'inertie correspondant. (C'est le même pour toutes les droites perpendiculaires à $\vec{u}_r$.)

L'appareil est conçu de manière à ce que $I_1 \gg I_2$.

Une main tient la ficelle en la maintenant verticale à tout instant. Le système est donc soumis à deux forces, le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$, avec m la masse du système, g l'accélération de la pesanteur et $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire vertical ascendant, et la tension du fil $\vec{T} = T\vec{u}_z$ avec $T > 0$. On applique le théorème du moment cinétique par rapport au point C , dans le référentiel barycentrique. On a

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{P}) = \vec{0}, \quad \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{T}) = \vec{CA} \wedge \vec{T} = -\ell \vec{u}_r \wedge T\vec{u}_z = \ell T \sin \theta \vec{u}_\varphi. \quad (4.72)$$

(La tension T dépend du temps.) On a donc

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = \ell T \sin \theta \vec{u}_\varphi. \quad (4.73)$$

On sait, d'après (1.26) que $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi$. Par ailleurs, comme le vecteur $\vec{u}_r$ est immobile dans le référentiel lié au système, on sait que $\dot{\vec{u}}_r = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r$. On en déduit que

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\theta + \dot{\theta} \vec{u}_\varphi \quad \text{et donc} \quad \vec{L}^* = I_1 \omega \vec{u}_r - I_2 \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\theta + I_2 \dot{\theta} \vec{u}_\varphi, \quad (4.74)$$

où ω représente la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe $\vec{u}_r$. On cherche donc à résoudre

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = \frac{d}{dt} [I_1 \omega \vec{u}_r - I_2 \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\theta + I_2 \dot{\theta} \vec{u}_\varphi] = \ell T \sin \theta \vec{u}_\varphi. \quad (4.75)$$

À l'instant initial, on suppose que $\theta = \frac{\pi}{2}$ (l'axe est donc horizontal) et que $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ (l'axe est initialement immobile). Considérons maintenant deux situations.

La roue ne tourne pas : initialement, $\omega = 0$. Dans cette situation, $\vec{L}^*$ est initialement nul et sa dérivée est selon $\vec{u}_\varphi$. Il est facile de voir qu'une solution (et donc, la solution, parce qu'en mécanique la solution est unique) est de garder φ constant (et donc $\vec{u}_\varphi$ constant) et $\omega = 0$. L'équation (4.75) devient

$$I_2 \ddot{\theta} = \ell T \sin \theta, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \omega = 0. \quad (4.76)$$

Conformément à l'intuition, θ augmente, c'est-à-dire que l'axe bascule dans le plan de la figure. (Pour résoudre l'équation, il faudrait connaître $T(t)$ qui dépend de comment on tire sur le fil.)

La roue tourne : initialement, $\omega > 0$. Pour des temps très courts, le système se comporte comme dans le premier cas, et θ commence par augmenter. Mais si θ augmente, alors $\frac{d}{dt}[I_1\omega\vec{u}_r]$ a une composante selon $\vec{u}_\theta$ puisque $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}_\varphi$. Comme il n'y a pas de composante selon $\vec{u}_\theta$ dans le membre de droite de (4.75), cela implique que les autres termes du membre de gauche, $\frac{d}{dt}[-I_2\dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}_\theta + I_2\dot{\theta}\vec{u}_\varphi]$, ont également une composante selon $\vec{u}_\theta$, et on se convainc facilement que cela implique que φ varie : le système se met à tourner autour d'un axe vertical.

Écrire les équations du mouvement est compliqué (voir en annexe la section B.3.2 pour une mise en équation d'un système similaire), mais on peut vérifier facilement qu'il existe une solution avec

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi} = \text{Cste}, \quad \omega = \text{Cste}, \quad \vec{\Omega} = \omega\vec{u}_r - \dot{\varphi}\vec{u}_\theta. \quad (4.77)$$

Pour une solution de ce type, la roue tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω , et par ailleurs l'axe tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. (En effet, lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$.)

Vérifions que (4.77) est bien solution ; le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ correspond à un moment cinétique barycentrique $\vec{L}^* = I_1\omega\vec{u}_r - I_2\dot{\varphi}\vec{u}_\theta$. Avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ constant, on a d'une part $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$ qui est constant, et d'autre part $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$. On obtient donc

$$\frac{d}{dt}\vec{L}^* = I_1\omega\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \ell T\vec{u}_\varphi. \quad (4.78)$$

Si on suppose par ailleurs que l'on maintient l'axe à une altitude constante, alors le théorème du centre de masse implique que $T = mg$ (les forces verticales se compensent), et on voit que (4.77) est bien solution, à condition de prendre

$$I_1\omega\dot{\varphi} = \ell mg. \quad (4.79)$$

L'axe reste horizontal (θ est constant et égal à $\frac{\pi}{2}$), mais tourne autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$; on dit qu'il **précesse**. La vitesse angulaire de précession $\dot{\varphi}$ est d'autant plus faible que la vitesse angulaire ω de rotation de la roue autour de son axe est importante.

4.5 Actions sur un solide

On a déjà vu dans la section 3.5 que le poids, qui agit sur chacun des points matériels d'un système, pouvait être remplacé par une force unique exercée au centre de masse. Cette substitution fonctionne à la fois dans le théorème du centre de masse, le théorème du moment cinétique et les théorèmes énergétiques.

Dans cette section, on cherche à généraliser ce résultat à d'autres ensembles de forces. On considère un ensemble de forces extérieures $\{\vec{f}_\alpha\}$, où $\vec{f}_\alpha$ s'applique sur le point α du système étudié, et on cherche à remplacer cet ensemble par une force unique.

4.5.1 Représentation d'un ensemble de forces par une résultante et un couple

Du point de vue du théorème du centre de masse, c'est très facile : les points d'application des forces n'interviennent pas ; la seule chose qui compte est la somme des forces, et on peut donc clairement remplacer toutes les forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ par leur **résultante** $\vec{R}$, définie comme

$$\vec{R} = \sum_{\alpha} \vec{f}_\alpha. \quad (4.80)$$

En revanche, dans le théorème du moment cinétique, le point d'application des forces est important. La contribution de tous les moments des forces $\vec{f}_\alpha$ par rapport à un point A s'écrit

$$\sum_{\alpha} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_\alpha) = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AM_\alpha} \wedge \vec{f}_\alpha. \quad (4.81)$$

Choisissons, de manière arbitraire, un point Q . En écrivant $\overrightarrow{AM_\alpha} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QM_\alpha}$, on arrive à

$$\sum_{\alpha} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_\alpha) = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{R} + \vec{I}, \quad (4.82)$$

avec $\vec{I} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{QM_\alpha} \wedge \vec{f}_\alpha = \sum_{\alpha} \vec{\mathcal{M}}_Q(\vec{f}_\alpha)$. Le vecteur $\vec{I}$ dépend *a priori* de Q , mais il ne dépend pas de A . Si A est fixe ou si $A = C$, on pourra alors écrire le théorème du moment cinétique sous la forme

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_A = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{R} + \vec{I} + (\text{moment des autres forces par rapport à } A), \quad (4.83)$$

où, insistons sur ce point, $\vec{I}$ ne dépend pas de A .

Lorsque $\vec{R} = \vec{0}$, on dit que l'ensemble des forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ forme un **couple**, et on appelle également **couple** le moment total $\vec{I}$ de ces forces, voir (4.82) avec $\vec{R} = \vec{0}$. Ce moment, qui n'est en général pas nul, est indépendant du point choisi pour le calculer.

Par extension, même lorsque $\vec{R} \neq \vec{0}$, on continuera à appeler « couple » le terme $\vec{I}$ qui apparaît dans (4.82) et (4.83). On dira que l'on a remplacé l'ensemble des forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ par une force unique $\vec{R}$ s'appliquant en Q , plus un couple $\vec{I}$.

Exemple 4.5 : La figure ci-contre représente une tête de vis (en gris) et l'extrémité d'un tournevis (en noir). Un bricoleur tourne le tournevis dans le sens trigonométrique afin de dévisser la vis. La pointe du tournevis, de largeur d , applique deux forces $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ sur la vis, respectivement en A et B . Ces deux forces sont égales en norme et en direction, mais de sens opposés.

La résultante des forces appliquées par le tournevis est nulle : $\vec{R} = \vec{f}_A + \vec{f}_B = \vec{0}$, mais le moment total de ces forces ne s'annule pas. Calculons par exemple le moment par rapport au point A ; en notant $f = \|\vec{f}_A\| = \|\vec{f}_B\|$ la norme commune des deux forces, on a

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_A) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_B) = \vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}_B = df \vec{u}_z. \quad (4.84)$$

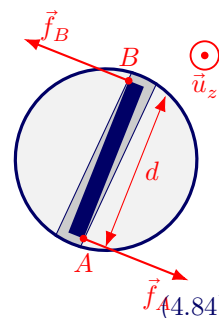
Le moment total par rapport à B a clairement la même expression et, en fait, le moment total par rapport à un point X quelconque vaut également $df \vec{u}_z$. (C'est un résultat général, à démontrer en exercice : lorsque la résultante est nulle, le moment total d'un ensemble de forces ne dépend pas du point choisi pour le calculer). L'ensemble de ces deux forces forme un couple, et on appelle également couple $\vec{I}$ le moment total de ces deux forces :

$$\vec{I} = \vec{\mathcal{M}}_X(\vec{f}_A) + \vec{\mathcal{M}}_X(\vec{f}_B) = df \vec{u}_z. \quad (4.85)$$

Lorsque $\vec{R} \neq \vec{0}$, on peut écrire (4.82) pour n'importe quel choix de Q , mais le couple $\vec{I}$ dépend de Q . Dans certains cas, il est possible de choisir Q de manière à ce que $\vec{I}$ soit nul ; alors, du point de vue du théorème du centre de masse et du théorème du moment cinétique, l'ensemble des forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ a une action complètement équivalente à une unique force $\vec{R}$ s'appliquant en Q . C'est le cas de la force de pesanteur, où l'on peut remplacer toutes les forces $\vec{f}_\alpha = m_\alpha \vec{g}$ par une unique force $m\vec{g}$ s'appliquant en C .

Notons au passage que, s'il existe point Q tel que $\vec{I} = \vec{0}$, ce point n'est pas unique : on définit la **droite d'action** comme la droite passant par Q et colinéaire à $\vec{R}$, et on démontre (en exercice) que l'on peut remplacer Q par n'importe quel point de la droite d'action.

On retiendra donc les points suivants :



Encadré 4.9

Soit un ensemble de forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ s'appliquant sur un système, et $\vec{R} = \sum_\alpha \vec{f}_\alpha$ la résultante de ces forces.

- Si $\vec{R} = \vec{0}$, on dit que l'ensemble de ces forces forme un **couple**, et on appelle également **couple** le moment total de ces forces, qui est indépendant du point A :

$$\sum_\alpha \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_\alpha) = \vec{I}. \quad (4.86)$$

- Si $\vec{R} \neq \vec{0}$, alors pour chaque choix d'un point Q , on peut trouver un vecteur $\vec{I}$ tel que le moment des forces par rapport à un point A quelconque est

$$\sum_\alpha \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_\alpha) = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{R} + \vec{I}. \quad (4.87)$$

On dit qu'on a représenté l'ensemble des forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ par sa résultante $\vec{R}$ s'appliquant en Q plus un couple $\vec{I}$.

- Toujours dans le cas $\vec{R} \neq 0$, le vecteur $\vec{I}$ dépend du point Q . Quand c'est possible (mais ce n'est pas toujours possible), il vaut mieux choisir Q de manière à ce que $\vec{I}$ soit nul.

Exemple 4.6 : Considérons l'action du vent qui souffle sur une éolienne, en supposant que l'éolienne est bien orientée face au vent. Cette action est constituée de plein de petites forces $\vec{f}_\alpha$ s'appliquant sur toutes les surfaces de l'éolienne. Écrivons la somme des moments de ces forces sous la forme (4.87) en choisissant un point Q sur l'éolienne le long de son axe. Il est clair intuitivement et par symétrie que la résultante $\vec{R}$ et le couple $\vec{I}$ sont tous les deux orientés le long de l'axe de symétrie : la force $\vec{R}$ pousse l'éolienne, et le couple $\vec{I}$ la fait tourner autour de son axe.

Si on choisissait un point Q ailleurs que sur l'axe, le vecteur $\vec{I}$ serait plus compliqué, et il n'existe aucun point Q pour lequel $\vec{I}$ serait nul, à démontrer en exercice. Il est donc plus naturel de prendre Q sur l'axe.

4.5.2 Application aux théorèmes énergétiques

On cherche maintenant à calculer le travail d'un ensemble de forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ de résultante $\vec{R}$. On choisit un point d'application Q et on a vu que l'on pouvait écrire le moment total de ces forces en fonction de Q , de $\vec{R}$ et d'un couple $\vec{I}$, voir (4.87). On va chercher à exprimer le travail des forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ simplement en fonction de Q , de $\vec{R}$ et de $\vec{I}$.

On sait que le travail d'une force $\vec{f}_\alpha$ sur un point matériel M_α est $\delta W_\alpha = \vec{f}_\alpha \cdot d\vec{M}_\alpha = \vec{f}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha dt$, avec $\vec{v}_\alpha$ la vitesse du point α . On aimerait bien que le travail total de toutes les forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ ressemble au travail de la force $\vec{R}$ (la résultante) s'appliquant sur le point Q ; quelque chose comme $\vec{R} \cdot \vec{v}_Q dt$.

Le problème est que Q n'est pas défini de manière unique, et que sa définition peut changer à chaque instant. La signification de $\vec{v}_Q$ n'est donc pas très claire. On prend la définition suivante pour $\vec{v}_Q$: à chaque instant t , c'est la vitesse qu'a le point du solide qui coïncide avec Q à cet instant t . (La vitesse de Q à l'instant t dépend alors de comment est défini Q à cet instant, mais pas de comment il est défini aux autres instants.) Avec cette définition, on peut alors appliquer la formule (4.25) et écrire

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QM}_\alpha. \quad (4.88)$$

Le travail infinitésimal total des forces $\{\vec{f}_\alpha\}$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha dt = \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot \vec{v}_Q dt + \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QM}_\alpha) dt \\ &= \vec{R} \cdot \vec{v}_Q dt + \vec{\Omega} \cdot \sum_\alpha \overrightarrow{QM}_\alpha \wedge \vec{f}_\alpha dt \\ &= \vec{R} \cdot \vec{v}_Q dt + \vec{I} \cdot \vec{\Omega} dt. \end{aligned} \quad (4.89)$$

(On a utilisé la propriété de rotation du produit mixte, (A.11), et on a reconnu la somme des moments des forces par rapport à Q , que l'on a réécrit grâce à (4.87).)

Le premier terme est le résultat attendu pour le travail d'une force : on fait le produit scalaire entre la force $\vec{R}$ et le déplacement infinitésimal $\vec{v}_Q dt$ de son point d'application Q . De par les propriétés du produit scalaire, seul le déplacement dans la direction de la force contribue au travail.

Le deuxième terme est nouveau : c'est le produit scalaire entre le couple $\vec{I}$ et le **vecteur rotation infinitésimale** définie par $d\vec{\varphi} = \vec{\Omega} dt$: c'est le vecteur dirigé selon l'axe de rotation, orienté dans le sens de la rotation, et dont la norme est l'angle infinitésimal $\|\vec{\Omega}\| dt$ dont a tourné le solide pendant dt . Seule la rotation d'axe parallèle au couple $\vec{I}$ compte pour le calcul de son travail. On retiendra donc

Encadré 4.10

Le travail exercé par un couple $\vec{I}$ s'appliquant sur un solide lors d'une rotation infinitésimale $d\vec{\varphi}$ est

$$\delta W = \vec{I} \cdot d\vec{\varphi}. \quad (4.90)$$

Pendant un temps dt , la rotation infinitésimale est $d\vec{\varphi} = \vec{\Omega} dt$.

Exemple 4.7 : Une boutique de bricolage vend une visseuse-dévisseuse en affichant en grand la caractéristique suivante : « 45 Nm ». C'est la valeur du couple maximal que peut produire la visseuse ; l'unité est bien celle du moment d'une force. (Au passage, c'est dimensionnellement identique à une énergie, et il serait, strictement parlant, correct d'afficher ce couple maximal comme valant 45 J, mais personne ne fait ça.) Si on modélise l'action sur la vis par deux forces, comme dans l'exemple 4.5, et qu'on prend une largeur $d = 1$ cm, alors les forces $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ ont une norme pouvant aller jusqu'à $45 \text{ N} \cdot \text{m} / (10^{-2} \text{ m}) = 4,5 \text{ kN}$. Dans une situation où la visseuse utilise son couple maximal (pour une vis grippée dans un matériau dur), l'énergie mécanique fournie par la visseuse pour une rotation infinitésimale $d\varphi$ de la vis serait $\Gamma d\varphi$, avec $\Gamma = 45 \text{ Nm}$; l'énergie fournie pour un tour complet de la vis serait donc $45 \times 2\pi \simeq 280 \text{ J}$.

Remarque : Les résultats de la section 4.5.1 s'appliquent à n'importe quel système de points matériel, mais la section 4.5.2 ne s'applique qu'aux solides.

4.5.3 La liaison pivot

En mécanique, une **liaison** est une connexion entre deux solides qui impose des contraintes sur les mouvements relatifs de ces deux solides. Les mécaniciens définissent douze liaisons usuelles ; à titre d'exemple, on va en considérer une, la **liaison pivot**.

Une liaison pivot entre deux solides permet la rotation d'un solide par rapport à l'autre autour d'un axe fixe par rapport aux deux solides ; tout autre mouvement relatif est rendu impossible par la liaison. L'image à avoir en tête est une porte : les gonds fixés au mur (supposé immobile) et à la porte font en sorte que le seul mouvement possible de la porte est une rotation autour de l'axe passant par les gonds. On dit que la porte et le mur sont en liaison pivot. Un autre exemple est celui d'une pédale de vélo qui est en liaison pivot avec la manivelle : le seul mouvement possible de la pédale *par rapport à la manivelle* est la rotation autour de son axe. (La manivelle tourne par rapport au vélo, et le vélo avance par rapport au sol, et donc la pédale a un mouvement compliqué par rapport au sol.)

Revenons à l'exemple de la porte ; pour fixer les notations, notons (Δ) l'axe des gonds, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire selon (Δ) . (On suppose le mur immobile, donc (Δ) et $\vec{u}$ sont constant.)

En pratique, les gonds exercent sur la porte des actions mécaniques que l'on peut représenter par une force $\vec{R}$ s'appliquant quelque part sur l'axe de rotation (Δ) , et un couple $\vec{I}$. (On peut aussi, de manière équivalente et peut-être plus intuitive, mais finalement plus compliquée, mettre une force et un couple par gond.) Cette force $\vec{R}$ et ce couple $\vec{I}$ prennent instantanément les valeurs nécessaires pour interdire tout mouvement autre que la rotation autour de (Δ) . (C'est un peu comme la réaction normale d'un support sur un point matériel : cette réaction prend

instantanément la valeur nécessaire pour empêcher le point matériel de pénétrer le support.) Si on écrit les théorèmes de la mécanique appliqués à la porte, on aura

$$m\vec{a}_C = \vec{R} + (\text{autres forces}), \quad \frac{d}{dt}\vec{L}_A = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{R} + \vec{I} + (\text{autres moments}), \quad (4.91)$$

avec m la masse de la porte, $\vec{a}_C$ l'accélération de son centre de masse, $\vec{L}_A$ son moment cinétique par rapport à un point A fixe quelconque et Q le point d'application de la force $\vec{R}$, quelque part sur (Δ) . Ces « autres forces » comprennent notamment le poids de la porte, ou la force exercée par une personne poussant ou tirant la porte. Les « autres moments » sont les moments par rapport à A de ces « autres forces ».

Comme $\vec{R}$ est complètement arbitraire, à la fois en norme et en direction, le théorème du centre de masse ne sert essentiellement à rien.

Le couple $\vec{I}$ est *presque* complètement arbitraire : en l'absence de frottements au niveau des gonds, ceux-ci n'ont aucune influence sur la rotation de la porte autour de (Δ) ; cela signifie que $\vec{I} \cdot \vec{u} = 0$, où l'on rappelle que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire selon l'axe des gonds (Δ) . On choisit A sur l'axe (Δ) , ce qui implique que $(\overrightarrow{AQ} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{u} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AQ}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

En projetant le théorème du moment cinétique sur $\vec{u}$, on obtient donc

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_A \cdot \vec{u}) = (\text{autres moments projetés selon } \vec{u}) \quad \text{si } A \text{ est sur l'axe des gonds.} \quad (4.92)$$

Comme le vecteur rotation peut s'écrire $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}$, avec φ l'angle orienté par $\vec{u}$ que fait la porte par rapport à une référence arbitraire, on a d'après (4.28), que $\vec{L}_A \cdot \vec{u} = I_\Delta \dot{\varphi}$. C'est le résultat qu'on a déjà obtenu dans la section 4.2.4 sur les rotations autour d'un axe fixe, et on rappelle que $\vec{L}_A \cdot \vec{u}$ s'appelle le moment cinétique de la porte par rapport à l'axe (Δ) .

Dans le membre de droite, on considère une force $\vec{f}$ s'appliquant sur la porte en un point P . Le moment de $\vec{f}$ par rapport à A projeté sur $\vec{u}$, égal à $(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}$, est le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe (Δ) , comme on l'a défini dans la section 4.2.4. Par exemple, si on appuie perpendiculairement à la porte avec une force de norme f appliquée à une distance d de l'axe et dans le sens faisant augmenter l'angle φ , le moment de cette force par rapport à l'axe (Δ) vaut df , on pourra écrire

$$I_\Delta \ddot{\varphi} = df. \quad (4.93)$$

Noter que le poids n'intervient pas, puisque $m\vec{g}$ n'a pas de composante perpendiculaire à la porte, et donc le moment de $m\vec{g}$ par rapport à l'axe (Δ) est nul. (Alors que le moment de $m\vec{g}$ par rapport à un point A est non-nul !) Un petit calcul (à faire en exercice) donne $I_\Delta = \frac{1}{3}m\ell^2$, avec ℓ la largeur de la porte.

Chapitre 5

Problème à deux corps

Dans ce chapitre, on considère un système isolé de deux points matériels en interaction. Cette étude trouvera des applications en astronomie (mouvement d'un satellite autour d'une planète, mouvement d'une planète autour d'une étoile, etc. ^{*1}) et en physique microscopique (déviations d'une particule chargée par une autre).

5.1 Réduction du problème à deux corps

Considérons deux points matériels M_1 et M_2 . Comme dans le chapitre 3, on note m_1 et m_2 les masses des deux corps, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ leurs vecteurs positions par rapport à une origine O fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ utilisé.

Le système étant supposé isolé, les seules forces agissant sur les corps sont les deux forces intérieures. On note $\vec{F}_{12}$ la force exercée par le corps 1 sur le corps 2 et $\vec{F}_{21}$ la force exercée par le corps 2 sur le corps 1. D'après la troisième loi de Newton, (1.29), on sait que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ et que ces deux forces sont colinéaires avec la droite (M_1M_2) .

Le centre de masse C du système se situe sur le segment $[M_1M_2]$, plus près du corps le plus lourd. Sa position est définie par (3.13) :

$$m_1 \overrightarrow{CM_1} + m_2 \overrightarrow{CM_2} = \vec{0}. \quad (5.1)$$

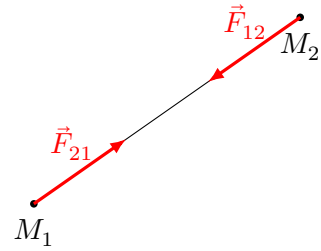
D'après le théorème du centre d'inertie (3.17), le centre de masse C de ce système isolé a une vitesse rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \vec{0}, \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad \vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C = \overrightarrow{Cste}. \quad (5.2)$$

Le problème du centre de masse étant résolu, on cherche maintenant à décrire le mouvement des deux points matériels *par rapport au centre de masse*. Pour cela, on se place naturellement dans le *référentiel du centre de masse* $\mathcal{R}^*$, voir la section 3.6. On introduit les vecteurs positions dans $\mathcal{R}^*$:

$$\vec{r}_1^* = \overrightarrow{CM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_C, \quad \vec{r}_2^* = \overrightarrow{CM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_C, \quad (5.3)$$

1. Il peut paraître surprenant de remplacer une étoile ou une planète par un point matériel, mais c'est tout-à-fait justifié : le théorème de Stokes-Ostrogradski, que vous verrez en électromagnétisme, permet de démontrer que le champ gravitationnel créé par un corps à symétrie sphérique est identique (à l'extérieur du corps) à celui créé par un point matériel en son centre. Donc la force gravitationnelle d'une boule sur un point est la même que celle entre deux points. Par le principe des actions réciproques, on en déduit que la force d'un point sur une boule est la même que celle entre deux points. En appliquant encore Stokes-Ostrogradski, on arrive finalement à voir que la force entre deux boules (ne s'interpénétrant pas!) est la même que celle entre deux points.



Comme C a un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$, le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est galiléen. On peut donc appliquer le principe fondamental de la dynamique aux deux points matériels dans $\mathcal{R}^*$:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1^* = \vec{F}_{21}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2^* = \vec{F}_{12}. \quad (5.4)$$

On introduit la *position relative de M_2 par rapport à M_1* par

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*, \quad (5.5)$$

En combinant cette définition avec (5.1), qui se réécrit $m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0}$, on arrive à

$$\vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (5.6)$$

En reportant dans (5.4), on obtient deux fois la même relation :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} \quad (5.7)$$

Cette relation ressemble à la deuxième loi de Newton appliquée à un mobile de masse m et de vecteur position $\vec{r}$.

Encadré 5.1 : Réduction du problème à deux corps

Dans un système isolé de deux corps M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en interaction, on introduit la **masse réduite** m , la position relative $\vec{r}$ et la force $\vec{F}$ définies par

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}, \quad \vec{F} = \vec{F}_{12}. \quad (5.8)$$

On obtient alors

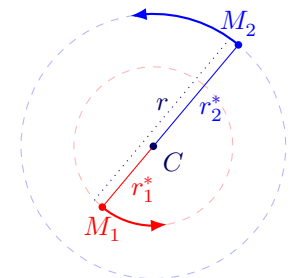
$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (5.9)$$

Soit un référentiel galiléen avec un point fixe O , et M le point tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. La relation (5.9) décrit le mouvement dans ce référentiel d'un point matériel situé en M , de masse m et soumis à la force $\vec{F}$. Ce point matériel s'appelle le **mobile fictif**.

On dit que le problème à deux corps réels M_1 et M_2 a été réduit à un problème à un seul corps. La force $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{r}$ et ne dépend que de la distance $r = \|\vec{r}\|$; on dit que c'est une **force centrale à symétrie sphérique**, dont le centre est O .

Une fois connue la position $\vec{r}$ du mobile fictif, on obtient les positions de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique à partir de (5.6). Puis connaissant la position de C , on obtient finalement les positions de M_1 et M_2 dans le référentiel $\mathcal{R}$ à l'aide de (5.3).

Exemple 5.1 : Deux corps de masses m_1 et m_2 tournent l'un autour de l'autre en gardant une distance r constante entre eux. Ces corps s'attirent avec une force de norme $F = \|\vec{F}_{12}\| = \|\vec{F}_{21}\|$ constante. Quelles sont leurs trajectoires autour de C ? La distance entre le corps 1 et le centre de masse C est $r_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$ qui est constante. La trajectoire du corps 1 est donc circulaire de rayon r_1^* . De même, le corps 2 a une trajectoire circulaire de rayon $r_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$. Pour calculer la vitesse angulaire, on écrit l'équation fondamentale de la dynamique pour le mobile fictif : $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ avec $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ la masse réduite. Pour une telle trajectoire circulaire, on sait que l'accélération $\ddot{\vec{r}}$ est centripète de norme $v^2/r = r\omega^2$ avec $v = r\omega$ la norme de la vitesse et ω la vitesse angulaire, voir l'exemple 1.1 page 8 avec $\rho = r$ et $\omega = \dot{\varphi}$. On a donc



$$m r \omega^2 = F, \quad \text{soit} \quad \omega = \sqrt{\frac{F}{m r}} = \sqrt{\frac{F(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 r}}. \quad (5.10)$$

Exemple 5.2 : Si $m_1 \gg m_2$, on voit que $\|\vec{r}_1^*\| \ll \|\vec{r}\|$ et $\vec{r}_2^* \simeq \vec{r}$: le centre de masse est presque confondu avec le corps 1, c'est-à-dire le corps « lourd ». La masse réduite est $m \simeq m_2$, presque égale à la masse « légère ». Finalement, au lieu d'écrire $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, on peut écrire $m_2\ddot{\vec{r}}_2^* = \vec{F}$, c'est-à-dire qu'on fait l'approximation que le corps 2 évolue autour d'un corps 1 immobile. Cette approximation est très courante en astronomie : si on étudie le mouvement de la Terre ($m_2 \simeq 6 \times 10^{24}$ kg) autour du Soleil ($m_1 \simeq 2 \times 10^{30}$ kg), on peut avec une très bonne approximation considérer que le Soleil est immobile.

Dans ce chapitre, m représente la masse réduite définie par (5.8), et non la masse totale du système comme dans les chapitres précédents.

5.2 Mouvement d'un corps soumis à une force centrale

Dans la réduction du problème à deux corps, la force $\vec{F}$ à laquelle est soumis le mobile fictif est une force centrale à symétrie sphérique :

Encadré 5.2 : Définition d'une force centrale

Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$. On dit que $\vec{F}$ est une **force centrale** s'il existe un point O fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ utilisé tel que la force est colinéaire à $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Autrement dit, on peut écrire

$$\vec{F} = F(\vec{r}) \vec{u}_r \quad (\text{force centrale}), \quad (5.11)$$

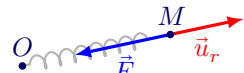
où $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ est le vecteur unitaire allant de O vers M . La valeur de F est négative si la force $\vec{F}$ pointe vers O et positive si elle est pointée à l'opposé de O .

Par ailleurs, une force centrale $\vec{F}$ est dite à **symétrie sphérique** si la norme et le sens de la force ne dépendent que de la distance $r = OM$, autrement dit si on peut écrire

$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r \quad (\text{force centrale à symétrie sphérique}). \quad (5.12)$$

Remarque : Une force attractive dans le système à deux corps conduit à une force $\vec{F}$ agissant sur le mobile fictif qui pointe vers O (et donc telle que $F(r) < 0$), alors qu'une force répulsive conduit à une force qui pointe à l'opposé de O (et donc telle que $F(r) > 0$).

Exemple 5.3 : Si on cloue l'extrémité d'un ressort sur une table (en O) et qu'on accroche un point matériel à l'autre extrémité (en M), alors ce point matériel est soumis à une force centrale à symétrie sphérique exercée par le ressort et égale à $\vec{F} = -k(r - \ell_0) \vec{u}_r$, où k et ℓ_0 sont la constante de raideur et la longueur à vide du ressort, $r = OM$ et $\vec{u}_r$ est tel que $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$.



Dans le reste de cette section, on étudie de manière générale le **mouvement à force centrale**, c'est-à-dire le mouvement d'un corps M de masse m soumis seulement à une force centrale à **symétrie sphérique** $\vec{F}$ de centre O . La principale application de cette étude est de traiter le problème à deux corps, mais elle peut également s'appliquer à d'autres situations comme celle de l'exemple ci-dessus.

5.2.1 Potentiel

Encadré 5.3

Toute force centrale à symétrie sphérique est conservative.

En effet, le travail de la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal s'écrit

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r) \vec{u}_r \cdot [dr \vec{u}_r + (...) \vec{u}_\theta + (...) \vec{u}_\varphi] = F(r) dr. \quad (5.13)$$

Lorsque l'on écrit le déplacement infinitésimal $d\vec{r}$, on a seulement besoin ici du terme $dr\vec{u}_r$, et on n'a même pas écrit les autres termes, donnés dans (1.8).

Toute fonction continue a une primitive ; si on note $E_p(r)$ une primitive de $-F(r)$, alors

$$\frac{dE_p}{dr} = -F(r) \quad \Rightarrow \quad dE_p = -F(r) dr \quad \Rightarrow \quad \delta W = -dE_p. \quad (5.14)$$

On voit donc que $\vec{F}$ est conservative, avec E_p l'énergie potentielle associée. Plus précisément, en un point P de l'espace, l'énergie potentielle de $\vec{F}$ est $E_p(OP)$. Les équipotentielles sont des sphères centrées en O .

5.2.2 Conservation du moment cinétique et loi des aires

Appliquons le théorème du moment cinétique au corps M par rapport au centre O . (On note $\vec{L}$ le moment cinétique par rapport à O plutôt que $\vec{L}_O$ pour alléger les notations.)

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{car } \vec{r} \text{ et } \vec{F} \text{ sont colinéaires}). \quad (5.15)$$

On en déduit ^{*2} que $\vec{L}$ est constant. Si $\vec{L} = \vec{0}$, on démontre ^{*3} que le mouvement reste sur une droite fixe, ce qui se traite avec les outils du L1. On s'intéresse donc au cas $\vec{L} \neq \vec{0}$.

Dans tout le reste de ce chapitre, on suppose que $\vec{L} \neq \vec{0}$.

Selon les propriétés du produit vectoriel, le moment cinétique $\vec{L}$ est orthogonal à $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. On en déduit que M se situe dans le plan orthogonal à $\vec{L}$ et passant par O . Comme O est fixe et $\vec{L}$ est constant, ce plan est constant. Autrement dit, *Le mouvement est plan : toute la trajectoire de M se situe dans un plan fixe contenant le point O .*

On utilise des coordonnées cylindriques (r, φ, z) ^{*4} centrées en O , avec $z = 0$ qui correspond au plan qui contient la trajectoire. On obtient alors, voir (1.22) avec $z = 0$,

$$\vec{r} = r\vec{u}_r, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi, \quad (5.16)$$

puis

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{u}_z. \quad (5.17)$$

(Par définition, $\vec{L}$ est orthogonal au plan du mouvement ; c'est donc parfaitement naturel que l'on trouve que $\vec{L}$ est selon $\vec{u}_z$.)

Le vecteur $\vec{L}$ étant constant, on voit que la quantité $mr^2\dot{\varphi}$ est constante. En particulier, $\dot{\varphi}$ doit toujours avoir le même signe au cours de la trajectoire. On peut habituellement s'arranger, en orientant correctement le plan, pour avoir $\dot{\varphi} > 0$.

Dans tout le reste de ce chapitre, on suppose que l'on a $\dot{\varphi} > 0$.

Finalement, on écrira

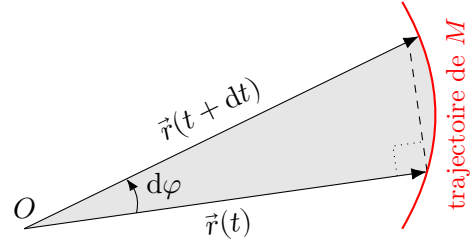
$$\vec{L} = L\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad L = \|\vec{L}\| = mr^2\dot{\varphi} = \text{Cste} > 0. \quad (5.18)$$

2. On peut aussi montrer (exercice) que, dans le problème à deux corps, le moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*$ et l'énergie cinétique barycentrique E_c^* du système sont égaux au moment cinétique $\vec{L}$ et à l'énergie cinétique E_c du mobile fictif correspondant. Comme $\vec{L}^*$ est constant (car le système des deux corps est isolé), alors il est clair que $\vec{L}$ est constant.

3. $\vec{L} = \vec{0}$ implique que $\vec{v} = v\vec{u}_r$, et donc que $\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_r + v\dot{\vec{u}}_r$. Mais la force, et donc l'accélération, est selon $\vec{u}_r$; on en déduit que, si $\vec{L} = \vec{0}$, alors $\dot{\vec{u}}_r = \vec{0}$, et donc $\vec{u}_r$ est constant, et donc le mouvement se fait selon la droite constante passant par O et orientée selon $\vec{u}_r$.

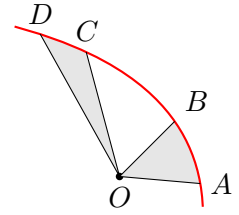
4. Dans ce cours, les coordonnées cylindriques sont habituellement notées (ρ, φ, z) , mais comme on utilise r et pour la distance OM depuis le début du chapitre, on continue à utiliser r . De toute façon, dans le plan $z = 0$, on a $\rho = r$ et $\vec{u}_\rho = \vec{u}_r$.

La norme L de $\vec{L}$ a une interprétation géométrique simple. Considérons le mobile M à deux instants très proches t et $t + dt$. Soit $d\mathcal{A}$ l'aire élémentaire balayée par $\vec{r}$ entre t et $t + dt$, représentée en gris sur la figure ci-contre. L'aire du triangle infinitésimal à gauche des pointillés est $\frac{1}{2}r^2 d\varphi$. (Si on remplaçait $d\varphi$ par un angle α , le triangle aurait une aire $\frac{1}{2}r^2 \tan \alpha$. Comme $\tan \alpha \sim \alpha$ quand $\alpha \rightarrow 0$, on obtient bien l'aire annoncée.) L'aire à droite des pointillés est négligeable (d'ordre $r dr d\varphi$). On a donc



$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 d\varphi = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi} dt = \frac{L}{2m} dt. \quad (5.19)$$

Comme L est constant, on voit que $d\mathcal{A}/dt$ est indépendant du temps. La quantité L/m est appelée la **constante des aires**. En intégrant la relation précédente, on peut écrire $\mathcal{A} = \frac{L}{2m} \Delta t$, qui signifie que l'aire $\mathcal{A}$ balayée pendant un temps Δt donné est une constante proportionnelle à Δt , ou alors que le temps nécessaire pour balayer une aire $\mathcal{A}$ donnée est une constante proportionnelle à $\mathcal{A}$. Ainsi, dans la figure ci-contre, les aires des régions OAB et OCD sont égales ; on en déduit que le temps pour aller de A à B est égal au temps pour aller de C à D . C'est la *loi des aires*, ou deuxième loi de Kepler. Pour résumer



Encadré 5.4

Pour un mobile soumis seulement à une force centrale de centre O ,

- Le moment cinétique par rapport à O est constant,
- Le mouvement est plan,
- La trajectoire satisfait la **loi des aires**, ou **deuxième loi de Kepler**, selon laquelle l'aire balayée par la trajectoire est proportionnelle au temps.

Remarque : Kepler a énoncé sa loi dans le cadre de l'étude du mouvement des planètes du système solaire, lorsque la force centrale est la force gravitationnelle exercée par le Soleil. Cependant, la loi est valable pour n'importe quelle force centrale.

5.2.3 Potentiel effectif

La force $\vec{F}$ étant conservative, d'énergie potentielle $E_p(r)$, l'énergie mécanique du système est conservée :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \text{Cste}. \quad (5.20)$$

En utilisant (5.16) puis (5.18), on a

$$v^2 = \|\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\varphi} \vec{u}_\varphi\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad \text{car} \quad L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (5.21)$$

En reportant dans (5.20), on arrive au résultat suivant :

Encadré 5.5

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^{\text{eff}}(r) = \text{Cste} \quad \text{avec} \quad E_p^{\text{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (5.22)$$

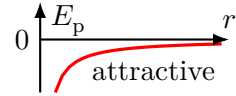
Cette équation est identique à la conservation de l'énergie d'une particule de masse m se déplaçant *en une dimension*, avec r sa position et $\dot{r}$ sa vitesse, soumise à une force dérivant de l'**énergie potentielle effective** $E_p^{\text{eff}}(r)$.

On peut donc appliquer les techniques usuelles de résolution du mouvement d'une particule pour obtenir $r(t)$. En utilisant également $L = mr^2\dot{\varphi}$, on aura également accès à $\varphi(t)$ ou $r(\varphi)$.

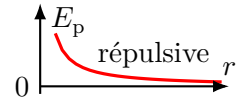
5.2.4 Étude qualitative des trajectoires

Supposons pour simplifier que le potentiel $E_p(r)$ atteint une limite finie $E_p(\infty)$ pour r grand ; comme le potentiel est défini à une constante près, on s'arrange pour avoir $E_p(\infty) = 0$. On s'intéresse alors à deux situations :

Force attractive : si la force est toujours attractive, c'est-à-dire si l'on a $F(r) < 0$ pour tout r , alors $\frac{d}{dr}E_p(r) > 0$ et, puisque $E_p(\infty) = 0$, on voit que $E_p(r) < 0$.



Force répulsive : si la force est toujours répulsive, c'est-à-dire si l'on a $F(r) > 0$ pour tout r , alors $\frac{d}{dr}E_p(r) < 0$ et, puisque $E_p(\infty) = 0$, on voit que $E_p(r) > 0$.



Le potentiel qui nous intéresse est le potentiel effectif $E_p^{\text{eff}}(r)$. C'est la somme de $E_p(r)$, et du terme $L^2/(2mr^2)$ qui est positif et décroissant. Dans le cas répulsif, E_p^{eff} est donc la somme de deux termes positifs et décroissants, et est lui-même positif et décroissant. Dans le cas attractif, E_p^{eff} est la somme de deux termes de signe et de sens de variation opposés. La situation est plus compliquée, mais on a typiquement une somme comme représentée sur la figure 5.1 : E_p^{eff} est d'abord décroissant, atteint un minimum négatif $-U_0$ pour un certain rayon r_0 , puis croît jusqu'à 0 quand $r \rightarrow \infty$.

Lorsque le mobile a une énergie E donnée, sa position r doit être telle que $E_p^{\text{eff}}(r) \leq E$, puisque $E - E_p^{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, voir (5.22). On en déduit que

- $E \geq -U_0$ dans le cas attractif, et $E > 0$ dans le cas répulsif.
- Lorsque $E = -U_0$ (cas attractif uniquement), la seule valeur de r possible est $r = r_0$, et on a $\dot{r} = 0$. La trajectoire est un cercle de rayon r_0 .
- Lorsque $-U_0 < E < 0$ (cas attractif uniquement), il existe deux valeurs $r_{\min}$ et $r_{\max}$ de r pour lesquelles $E_p^{\text{eff}}(r) = E$, voir la figure 5.1. Ce sont des bornes pour le mouvement radial ; à ces points, la vitesse radiale $\dot{r}$ change de signe en passant par 0. La coordonnée r augmente entre $r_{\min}$ et $r_{\max}$, puis diminue de $r_{\max}$ à $r_{\min}$, puis augmente à nouveau, etc.
- Lorsque $E \geq 0$ (cas attractif ou répulsif), il n'y a qu'une seule borne, $r_{\min}$. Si r est initialement grand et décroissant, il diminue jusqu'à $r_{\min}$ puis augmente à nouveau vers l'infini.

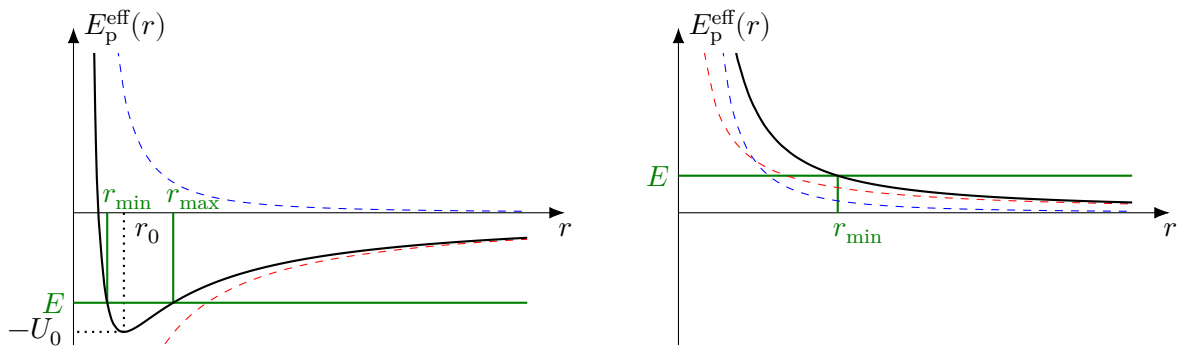


FIGURE 5.1 – Le potentiel effectif E_p^{eff} dans le cas attractif (à gauche) et dans le cas répulsif (à droite). C'est la somme de deux termes, $E_p(r)$ (en pointillés rouges) et $L^2/(2mr^2)$ (en pointillés bleus). Dans le cas attractif, le potentiel effectif prend sa valeur minimale $-U_0$ pour une valeur de $r = r_0$. Si $E < 0$ (uniquement dans le cas attractif), le mouvement est limité aux valeurs de r comprises entre les bornes $r_{\min}$ et $r_{\max}$. Si $E > 0$ (dans le cas répulsif ou attractif), il n'y a qu'une borne, $r_{\min}$, et toutes les valeurs de r supérieures à $r_{\min}$ sont possibles.

5.2.5 Solution générale

Nous allons maintenant écrire la solution générale du mouvement à force centrale, sans faire d'hypothèse sur $F(r)$, puis nous appliquerons ce résultat au cas particulier des forces en

$1/r^2$ (gravitation et électrostatique) dans la section 5.3. Cette approche est compliquée et assez technique, mais elle peut être appliquée à un potentiel quelconque. Un exercice de TD donnera une approche plus simple et plus directe pour résoudre le cas des forces en $1/r^2$, mais cette approche ne peut pas être généralisée à d'autres forces.

Supposons pour fixer les idées que, à $t = 0$, la particule est en $r_{\min}$. Pour $t > 0$, et si $E < 0$, seulement jusqu'au moment où r atteint $r_{\max}$ pour la première fois, on a $\dot{r} > 0$. On a donc, de (5.22),

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{\text{eff}}(r))}. \quad (5.23)$$

Cette équation différentielle non-linéaire du premier ordre se résout par séparation des variables :

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{\text{eff}}(r))}}. \quad (5.24)$$

Par intégration, on obtient t en fonction de r :

$$t = \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{\text{eff}}(r))}}. \quad (5.25)$$

(On rappelle que cette expression n'est valable que pour l'intervalle de temps où r va de $r_{\min}$ à $r_{\max}$ pour la première fois.)

En particulier, dans le cas $E < 0$, le temps nécessaire pour aller de $r_{\min}$ à $r_{\max}$ est

$$\Delta t = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{\text{eff}}(r))}}. \quad (5.26)$$

Lorsque t vaut Δt , la distance r vaut $r_{\max}$ et la vitesse radiale $\dot{r}$ s'annule puis change de signe : il faut alors modifier (5.23) en rajoutant un signe « moins » pour avoir la trajectoire de $r_{\max}$ à $r_{\min}$. On vérifie que $r(t)$ est symétrique autour de Δt , c'est-à-dire que $r(\Delta t + t) = r(\Delta t - t)$. Le temps nécessaire pour aller de $r_{\max}$ à $r_{\min}$ est donc égal à Δt et, finalement, la valeur de r dans le cas $E < 0$ est une fonction périodique et symétrique du temps de période $2\Delta t$.

On peut faire un travail similaire sur l'angle en φ en partant de (5.18), à savoir $L = mr^2\dot{\varphi}$. Cette égalité donne

$$d\varphi = \frac{L dt}{mr^2}. \quad (5.27)$$

On remplace dt en utilisant (5.24), et on intègre. En supposant qu'on ait choisi l'origine des angles $\varphi = 0$ quand $r = r_{\min}$, on obtient

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{\text{eff}}(r))}} = \int_{r_{\min}}^r \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - E_p^{\text{eff}}(r))}}. \quad (5.28)$$

(Expression uniquement valable jusqu'à ce que r vaille $r_{\max}$ si on est dans le cas $E < 0$.)

Cette expression est le résultat recherché. Il ne reste plus qu'à remplacer E_p^{eff} par son expression, puis à calculer l'intégrale pour avoir $\varphi(r)$, et enfin à inverser cette relation pour obtenir $r(\varphi)$ qui décrit la trajectoire en coordonnées polaires.

5.3 Problème de Kepler

5.3.1 Équation de la trajectoire

Nous considérons dans cette section le problème d'une force attractive en $1/r^2$:

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad E_p(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{avec} \quad \alpha > 0. \quad (5.29)$$

Cette force peut être la force gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 si $\alpha = Gm_1m_2$, avec $G \simeq 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ la constante de gravitation universelle (problème de Kepler), ou alors une force d'interaction de Coulomb avec $\alpha = -q_1q_2/(4\pi\epsilon_0)$, où q_1 et q_2 sont les charges portées par les deux corps (de signes opposés pour avoir une force attractive) et $\epsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ est la permittivité du vide.

Le potentiel effectif (5.22) est donc de la forme

$$E_p^{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (5.30)$$

En résolvant $\frac{d}{dr}E_p^{\text{eff}} = 0$, on peut calculer la valeur r_0 qui rend le potentiel effectif minimum et la valeur $-U_0$ du minimum correspondante :

$$r_0 = \frac{L^2}{m\alpha} \quad \text{et} \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 m}{L^2}. \quad (5.31)$$

En remplaçant $E_p^{\text{eff}}(r)$ dans la formule intégrale (5.28) pour l'angle φ , On arrive à une intégrale que l'on peut miraculeusement calculer pour obtenir le résultat recherché ; ce calcul est donné dans la section B.4 de l'appendice.

Ici, nous allons utiliser une autre approche, plus simple, mais qui a l'inconvénient de ne marcher que pour le problème de Kepler.

On fait le changement de variable

$$u = \frac{1}{r}. \quad (5.32)$$

En introduisant la **constante des aires** $C = L/m = r^2\dot{\varphi}$, on a

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} = Cu^2 \quad (5.33)$$

et

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{d(\frac{1}{u})}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2} \times \frac{du}{d\varphi} \times Cu^2 = -C\frac{du}{d\varphi}, \quad (5.34)$$

d'où

$$\vec{v} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = -C\frac{du}{d\varphi}\vec{u}_r + Cu\vec{u}_\varphi \quad (5.35)$$

et

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -C\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi}\vec{u}_r - C\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + C\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + Cu(-\dot{\varphi}\vec{u}_r) = -C^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)u^2\vec{u}_r. \quad (5.36)$$

Les deux relations (5.35) et (5.36) s'appellent les *formules de Binet*.

On écrit le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{u}_r = -\alpha u^2\vec{u}_r$ et on obtient, après simplification,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha}{mC^2}. \quad (5.37)$$

La solution générale de cette équation peut s'écrire

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi + a) + \frac{\alpha}{mC^2}, \quad (5.38)$$

avec $A \geq 0$ et $a \in [0, 2\pi[$. Choisissons comme origine des φ le point où r est minimale, donc où u est maximale. Lorsque $\varphi = 0$, le cosinus doit valoir 1, et donc on doit prendre $a = 0$.

Posons $p = mC^2/\alpha = L^2/(m\alpha)$ et $e = pA$. On a donc $e \geq 0$ et

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}[1 + e \cos \varphi], \quad \text{et donc} \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (5.39)$$

Le paramètre e est directement lié à l'énergie ; vérifions-le :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}mC^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - \alpha u, \quad (5.40)$$

où l'on a utilisé (5.35) pour calculer v^2 . En reportant (5.39), on arrive à

$$E = \frac{mC^2}{2p^2} [1 + 2e \cos \varphi + e^2] - \frac{\alpha}{p} [1 + e \cos \varphi]. \quad (5.41)$$

Mais $\frac{mC^2}{p^2} = \frac{\alpha}{p} = \frac{\alpha^2}{mC^2} = \frac{m\alpha^2}{L^2}$, et donc

$$E = \frac{m\alpha^2}{2L^2} [e^2 - 1]. \quad (5.42)$$

Finalement, en comparant avec (5.31), on a les expressions suivantes pour p et e :

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} = r_0, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{E}{U_0}}. \quad (5.43)$$

Encadré 5.6

La trajectoire d'un mobile de masse m soumis à une force centrale attractive $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_r$ s'écrit, en coordonnées polaires (r, φ) ,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (5.44)$$

Les trajectoires de ce type sont des **coniques**, et on appelle e **l'excentricité** et p le **paramètre** de la conique.

Remarque 1 : Les expressions de e et p en fonction de L , E , m et α sont données dans (5.43). Ces expressions ne sont pas à connaître.

Remarque 2 : L'expression (5.44) a été obtenue en choisissant l'origine des angles de manière à avoir $\varphi = 0$ lorsque $r = r_{\min}$. Si on choisit une autre origine des angles, telle que $r = r_{\min}$ lorsque $\varphi = \varphi_0$, il faut remplacer $\cos \varphi$ par $\cos(\varphi - \varphi_0)$.

Remarque 3 : Si la force $\vec{F}$ est répulsive, de la forme $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_r = \alpha u^2 \vec{u}_r$ avec $\alpha > 0$, le même calcul montre (exercice) que

$$r(\varphi) = \frac{p}{e \cos \varphi - 1}. \quad (5.45)$$

Remarque 4 : Un excellent exercice consiste à vérifier directement que la relation (5.44) vérifie la seconde loi de Newton, $m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_r$, ce qui donne en projection $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\alpha}{r^2}$. Indice : pour dériver par rapport au temps, il faut écrire $\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \frac{d}{d\varphi} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}$, voir (5.18).

5.3.2 Premières propriétés des trajectoires kepleriennes

Le type de la trajectoire décrite par (5.44) dépend de la valeur de l'excentricité e :

Si $0 \leq e < 1$ (ce qui correspond à $-U_0 \leq E < 0$), alors $-1 < e \cos \varphi < 1$ et le dénominateur dans (5.44) ne s'annule pour aucune valeur de φ : la valeur de r reste bornée. En fait, on peut facilement déterminer les valeurs extrémales de r : le minimum $r_{\min}$ est atteint quand $\cos \varphi$ est maximal ($\cos \varphi = 1$ pour $\varphi = 0$), et le maximum $r_{\max}$ est atteint quand $\cos \varphi$ est minimal ($\cos \varphi = -1$ pour $\varphi = \pi$). On obtient :

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - e}. \quad (5.46)$$

La trajectoire est une ellipse. Ce cas est étudié dans les sections 5.3.3 et 5.3.4. Dans le cas particulier $e = 0$ (ce qui correspond à $E = -U_0$), alors $r = p$ pour tout angle φ : la trajectoire est circulaire. (Le cercle est un cas particulier d'ellipse.)

Si $e > 1$ (ce qui correspond à $E > 0$), alors le dénominateur dans (5.44) s'annule pour $\cos \varphi = -1/e$, c'est-à-dire pour $\varphi = \pm \arccos(-1/e)$. Quand φ tend vers l'une ou l'autre de ces valeurs, la distance r tend vers l'infini. Physiquement, l'objet « vient de l'infini » avec l'angle $\varphi = -\arccos(-1/e)$, atteint la distance minimale $r_{\min} = p/(1+e)$ pour $\varphi = 0$, puis repart vers l'infini avec l'angle $\varphi = +\arccos(-1/e)$. **La trajectoire est une hyperbole.** Ce cas est étudié section 5.3.5.

Mathématiquement, le cas $e = 1$ correspond à une parabole (r est infini pour $\varphi = \pi$), mais physiquement, e sera soit très légèrement inférieur à 1 (ellipse), soit très légèrement supérieur à 1 (hyperbole), mais jamais exactement égal à 1.

La famille de courbes décrites par (5.44) (ellipse, parabole, hyperbole) constitue ce qu'on appelle **les coniques**, parce que ce sont les courbes que l'on obtient en prenant l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan.

5.3.3 Propriétés des ellipses

Voici quelques caractérisations des ellipses, illustrées par la figure 5.2 :

- L'ensemble des points du plan de coordonnées cartésiennes (x, y) tels que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.47)$$

avec $a \geq b$, est une ellipse centrée sur l'origine $(0, 0)$, de grand axe horizontal $2a$ et de petit axe vertical $2b$. C'est, littéralement, un cercle aplati : si le point (X, Y) appartient au cercle de rayon a , alors le point $(x = X, y = \frac{b}{a}Y)$ appartient à l'ellipse dont on vient de donner l'équation. Par conséquent, sa surface est $\frac{b}{a} \times \pi a^2$:

$$[\text{aire de l'ellipse}] = \pi ab. \quad (5.48)$$

On appelle a le **demi-grand axe** et b le **demi-petit axe**.

- Si on choisit deux points F et F' dans le plan et une longueur ℓ supérieure à la distance FF' , l'ensemble de tous les points M tels que

$$FM + F'M = \ell \quad (5.49)$$

est une ellipse. Les points F et F' s'appellent les **foyers** de l'ellipse. En considérant les deux points de l'ellipse sur l'axe (FF') , on voit que l'on doit avoir

$$\ell = 2a. \quad (5.50)$$

- On introduit la **distance focale** c comme la distance entre F et le centre de l'ellipse. Si l'on considère les deux points de l'ellipse sur la médiatrice de $[FF']$, on voit que l'on doit avoir

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (5.51)$$

- En coordonnées polaires, l'équation de l'ellipse s'écrit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (5.52)$$

avec $0 \leq e < 1$ l'**excentricité** et $p > 0$ le **paramètre**, mais :

! Dans la description (5.52) de l'ellipse, le centre du repère polaire est le foyer F de l'ellipse, pas le centre de l'ellipse.

- Le point le plus proche de F sur l'ellipse s'appelle de manière générique le **périapse** et est noté P . La distance FP est $r_{\min}$.
- Le point le plus éloigné de F sur l'ellipse s'appelle de manière générique l'**apoapse** et est noté A . La distance FA est $r_{\max}$.

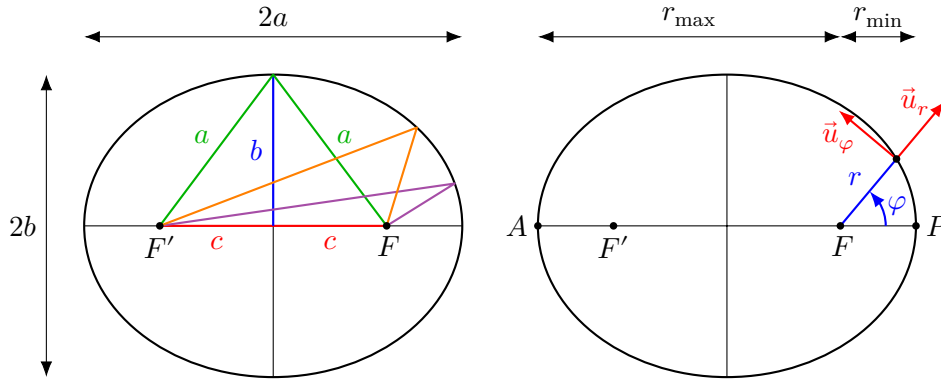


FIGURE 5.2 – Ellipse de demi-axes a et b , et position des foyers. À gauche : la longueur totale des lignes vertes, ou celle des lignes oranges, ou celle des lignes violettes est égale à $2a$. En choisissant l'origine au centre de l'ellipse, l'équation cartésienne de l'ellipse est $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. À droite : en choisissant l'origine des axes au foyer F , l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires est $r = p/(1 + e \cos \varphi)$. Pour l'ellipse de la figure, on a $a = 2,5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 1,5$ cm, $p = 1,6$ cm et $e = 0,6$.

Encadré 5.7

Une ellipse peut être caractérisée soit par a et b , soit par p et e , soit par $r_{\min}$ et $r_{\max}$. Il faut savoir écrire les relations entre ces quantités.

- À partir de (5.52), on obtient $r_{\min}$ et $r_{\max}$ en fonction de p et e en minimisant et maximisant $r(\varphi)$, voir texte avant (5.46) :

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}. \quad (5.53)$$

- Il est clair géométriquement que

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-e^2}, \quad (5.54)$$

et que

$$c = a - r_{\min} = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = \frac{pe}{1-e^2} = ea. \quad (5.55)$$

(On peut aussi, de manière équivalente, partir de $2c = r_{\max} - r_{\min}$.)

- On obtient enfin b par Pythagore :

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) = ap = \frac{p^2}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (5.56)$$

- On peut inverser ces relations et obtenir p et e en fonction de a et b (exercice) ; on trouve ceci :

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (5.57)$$

5.3.4 Trajectoires elliptiques

Pour deux corps en interaction gravitationnelle, on a trouvé que le mobile fictif a une trajectoire $\vec{r}(t)$ de type conique. Lorsque les corps restent à distance finie l'un de l'autre, cette trajectoire est une ellipse. À partir de $\vec{r}(t)$, on remonte aux positions des deux corps dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, voir (5.6) :

$$\vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = -\frac{m}{m_1} \vec{r}, \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = \frac{m}{m_2} \vec{r}. \quad (5.58)$$

Chacun des deux corps a donc une trajectoire elliptique dont le foyer F coïncide avec le centre de masse C du système, mais avec une valeur de p modifiée (l'ellipse décrite par chaque corps est plus petite que l'ellipse décrite par $\vec{r}$).

Dans le cas particulier où $m_1 \gg m_2$, comme dans le cas du Soleil et d'une planète telle la Terre, on a $\frac{m}{m_1} \simeq 0$ et $\frac{m}{m_2} \simeq 1$ si bien que $\vec{r}_1^* \simeq \vec{0}$ et $\vec{r}_2^* \simeq \vec{r}$. Le Soleil est alors presque immobile, confondu avec le centre de masse, et on obtient la *première loi de Kepler* :

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers.

(Cette loi est approximative : c'est le centre de masse qui occupe un foyer. Par ailleurs les trajectoires de chaque planète sont perturbées par l'attraction exercée par les autres corps du système solaire.)

Cette loi se généralise à un système planète-satellite (naturel ou artificiel).

Nous avons déjà énoncé la *deuxième loi de Kepler*, ou *loi des aires*, voir (5.19) ; passons maintenant à la *troisième loi de Kepler*, qui relie la période T de révolution au demi-grand axe a de l'orbite elliptique. La loi des aires (5.19) intégrée sur une période T donne que l'aire de l'ellipse est $\frac{L}{2m}T$. Par ailleurs, l'aire de l'ellipse est πab , voir (5.48). En écrivant l'égalité du carré de ces deux expressions, et en utilisant la relation $p = \frac{L^2}{m\alpha}$, voir (5.43), on obtient

$$\pi^2 a^2 b^2 = T^2 \frac{L^2}{4m^2} = T^2 \frac{p\alpha}{4m}. \quad (5.59)$$

Par ailleurs, on a $p = b^2/a$, voir (5.57), ce qui permet de simplifier les b . En mettant les a et les T à gauche et le reste à droite, on arrive à

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha/m}{4\pi^2}. \quad (5.60)$$

Dans le cas de la gravitation, on a $\alpha = Gm_1m_2$. Par définition, la masse réduite est $m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. On a donc $\alpha/m = G(m_1 + m_2)$ et donc

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}. \quad (5.61)$$

Encore une fois, dans le cas d'une planète du système solaire, la masse m_1 du Soleil est très grande devant la masse m_2 de la planète, et donc $m_1 + m_2 \simeq m_1$. Le membre de droite de (5.61) est donc approximativement une constante, et on obtient la troisième loi de Kepler, ou *loi des périodes* :

Le carré de la période de révolution d'une planète du système solaire est proportionnel au cube du demi-grand axe.

(La constante de proportionnalité qui est égale à T^2/a^3 dépend de la masse de l'étoile autour de laquelle gravitent les planètes. Par ailleurs, cette loi est approximative, puisque cette « constante » de proportionnalité dépend un peu de la masse de chaque planète.)

Pour terminer, énonçons quelques propriétés utiles et une remarque de vocabulaire :

- Le vecteur position est $\vec{r} = r\vec{u}_r$ et le vecteur vitesse est $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$. Les seuls points où $\vec{r}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux sont tels que $\dot{r} = 0$, c'est-à-dire quand $r = r_{\min}$ ou $r = r_{\max}$. En ces points, on a $L = mrv$.
- De l'expression (5.43), on obtient que

$$\frac{e^2 - 1}{p} = \frac{2E}{\alpha}. \quad (5.62)$$

Mais d'après (5.54), le membre de gauche (5.62) est $-1/a$. On en déduit que

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (\text{pour une ellipse}). \quad (5.63)$$

- **Périapside** et **péricentre** sont deux synonymes de périapse. **Apoapside** et **apocentre** sont deux synonymes de apoapse.
- Pour un corps orbitant autour du Soleil, on appelle souvent ces deux points l'**aphélie** et le **périhélie** (basé sur Hélios, le Soleil), au lieu de apoapse et périapse.
- Pour un corps orbitant autour de la Terre, on appelle souvent ces deux points l'**apogée** et le **périgée**.
- Il y a des mots pour des orbites autour de chaque astre, mais les autres sont peu usités. En pratique, les mots « apogée/aphélie/apoapse/apoapside/apocentre » et « périgée/périhélie/périapse/périapside/péricentre » sont souvent utilisés de manière interchangeable, quel que soit l'objet autour duquel le corps orbite. On peut également les utiliser hors de la mécanique céleste, par exemple pour décrire la trajectoire de deux particules chargées.

5.3.5 Trajectoires hyperboliques

Considérons toujours le problème de Kepler avec le potentiel attractif (5.29), mais dans le cas où $E > 0$, et donc $e > 1$. Dans ce cas, la courbe décrite par l'équation (5.44) est une branche d'hyperbole qui contourne son foyer F , centre du champ de force.

Une branche d'hyperbole est une courbe avec deux asymptotes, voir figure 5.3. La courbe est symétrique, et le point de la courbe le plus proche du foyer est le **sommet** S de l'hyperbole, qui est sur l'axe de symétrie. Notons θ_0 l'angle entre l'axe de symétrie et les asymptotes.

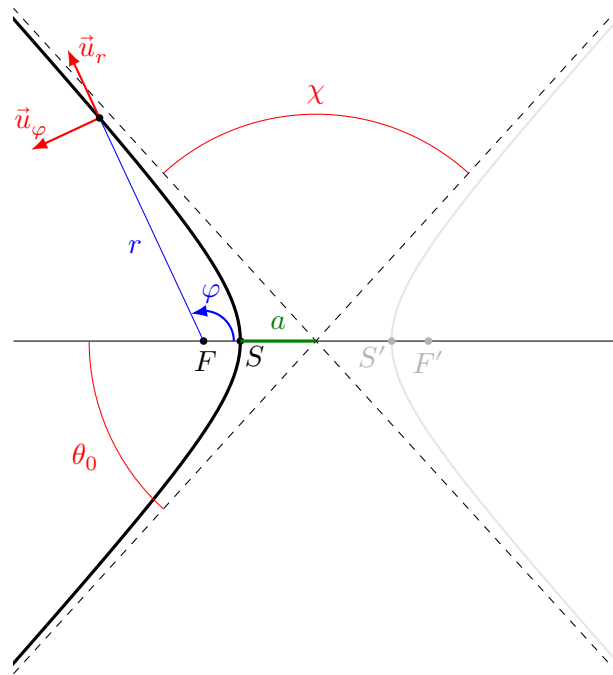


FIGURE 5.3 – Branche d'hyperbole tournant autour de son foyer F dans le cas d'un potentiel attractif en $1/r$. L'équation polaire de cette branche par rapport au foyer F est $r = p/(e \cos \varphi + 1)$. Le sommet S est le point où r est minimal, obtenu pour $\varphi = 0$. L'axe horizontal est un axe de symétrie, et θ_0 est l'angle entre cet axe et les asymptotes (en pointillés). L'angle $\chi = \pi - 2\theta_0$ est l'angle de déviation de la particule. La courbe représentée en gris clair est la deuxième branche de l'hyperbole ; elle ne nous intéresse pas pour le potentiel attractif.

L'équation de la trajectoire en coordonnées polaires par rapport au point F est encore donnée par l'équation (5.44), à savoir $r = p/(e \cos \varphi + 1)$, mais l'angle φ ne varie que dans l'intervalle de valeurs où le dénominateur est positif, à savoir

$$-\arccos \frac{1}{e} < \varphi < \arccos \frac{1}{e}. \quad (5.64)$$

(Voir aussi la section 5.3.2.) La distance r varie donc entre $r_{\min} = p/(1+e)$, au sommet S lorsque $\varphi = 0$, et $+\infty$ pour $\varphi \rightarrow \pm \arccos(-1/e)$. (Dans un contexte de mécanique céleste, le sommet est le périapse/périgée/périhélie ; il n'y a pas d'apoapse/apogée/aphélie.)

Par définition de l'angle θ_0 entre asymptote et axe de symétrie, on voit par ailleurs que φ varie entre $-(\pi - \theta_0)$ et $\pi - \theta_0$. On a donc $\pi - \theta_0 = \arccos(-1/e)$, ce qui implique que

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{e}. \quad (5.65)$$

On note χ l'angle de déflexion de la particule, c'est-à-dire l'angle entre la direction d'arrivée et la direction finale de la particule. On a clairement $\chi = \pi - 2\theta_0$.

Remarque : on peut caractériser une hyperbole de manière similaire à ce qui a été fait pour l'ellipse dans la section précédente : l'équation d'une hyperbole en cartésien peut s'écrire $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; c'est l'ensemble de tous les points M tels que $F'M - FM = 2a$, où $2a$ est la distance FF' entre les deux foyers ; on peut relier les paramètres a et b aux paramètres e et p . Dans ce cours, on ne rentre pas dans ces détails techniques, mais on a placé a sur la figure, et on peut mentionner l'équivalent de (5.63) pour les hyperboles :

$$E = \frac{|\alpha|}{2a} \quad (\text{pour une hyperbole}), \quad (5.66)$$

que α soit négatif (force attractive, comme dans cette section) ou positif (force répulsive ; voir section 5.3.6).

5.3.6 Potentiel répulsif en $1/r$ et diffusion de Rutherford

Considérons maintenant le cas d'un potentiel répulsif en $1/r$:

$$E_p(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0. \quad (5.67)$$

Par exemple, si $\alpha = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$, c'est le potentiel électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 de même signe.

Comme illustré dans la partie droite de la figure 5.1, le potentiel effectif $E_p^{\text{eff}}(r)$ est maintenant une fonction monotone décroissante, et l'énergie E est forcément positive. On peut refaire les calculs de la section 5.3.1 et on trouve (comme déjà mentionné) une expression très similaire à (5.44), mais avec le 1 du dénominateur changé en -1 :

$$r = \frac{p}{e \cos \varphi - 1}. \quad (5.68)$$

Les quantités e et p ont toujours les mêmes expressions (5.43). En particulier, puisque $E > 0$, on a $e > 1$.

L'équation (5.68) décrit la deuxième branche de l'hyperbole de la figure 5.3 ; voir la figure 5.4.

L'angle φ varie dans le domaine où le dénominateur de (5.68) reste positif, c'est-à-dire que

$$-\arccos \frac{1}{e} \leq \varphi \leq \arccos \frac{1}{e}. \quad (5.69)$$

Par ailleurs, par définition de θ_0 (angle entre l'axe de symétrie et les asymptotes), l'angle φ varie entre $-\theta_0$ et $+\theta_0$. On a donc $\theta_0 = \arccos(1/e)$ et, comme dans le cas attractif,

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{e}. \quad (5.70)$$

L'angle de déviation χ est lui aussi donné par la même formule que dans le cas précédent : $\chi = \pi - 2\theta_0$.

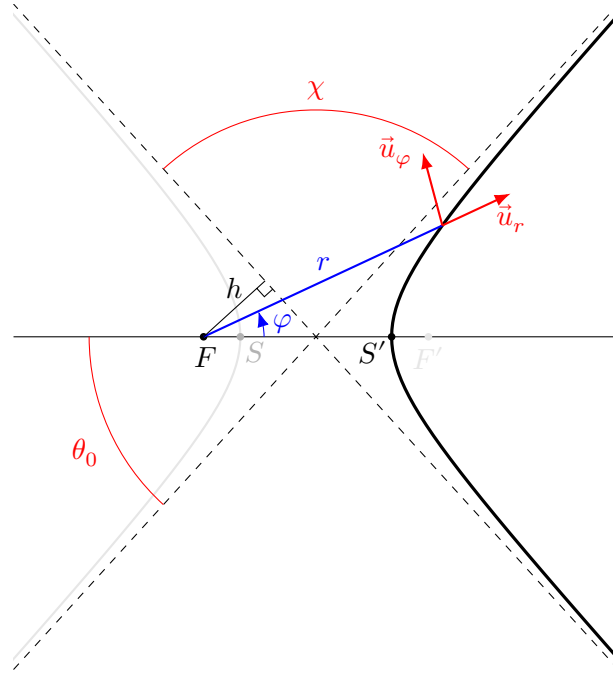


FIGURE 5.4 – Dans le cas d'un potentiel répulsif, c'est la branche de l'hyperbole extérieure au centre de force qui représente la trajectoire physique. χ est l'angle de déflexion d'une particule suivant cette trajectoire. (On imagine que la particule vient du coin inférieur droit et repart par le coin supérieur droit.) h est le *paramètre d'impact* : ce serait la distance minimale entre le centre F et la particule si celle-ci n'était pas déviée.

La distance minimale au centre de force F est obtenue pour $\varphi = 0$ et vaut

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1}. \quad (5.71)$$

On souhaite maintenant exprimer l'angle de déflexion en fonction de deux paramètres physiques importants :

La vitesse à l'infini v_∞ , qui est la norme de la vitesse de la particule lorsque r est très grand, c'est-à-dire longtemps avant l'approche de F ou longtemps après.

Le paramètre d'impact h , qui est la distance minimale qu'il y aurait eu entre la particule et le centre d'attraction si la particule n'avait pas été déviée, voir figure 5.4.

(Remarque : on peut aussi définir ces quantités dans le cas attractif.)

Lorsque r tend vers l'infini, le potentiel est nul et l'énergie est purement cinétique. On a donc

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2. \quad (5.72)$$

(Lorsque la particule se rapproche du centre, $E_p(r)$ augmente, donc E_c et v diminuent.)

Toujours lorsque r est très grand, le mobile est sur l'asymptote à l'hyperbole et sa vitesse est dirigée selon cette asymptote. On en déduit que la norme L du moment cinétique est donnée ^{*5}

5. L'argument donné est simple, mais pas très rigoureux. Voici un argument compliqué mais rigoureux. Notons c la distance entre F et le centre de la figure, là où les asymptotes se croisent. On a alors $h = c \sin \theta_0$. On prend un repère cartésien $(F, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ centré en F , avec $\vec{u}_x$ orienté vers la droite sur la figure et $\vec{u}_y$ vers le haut. L'équation cartésienne de l'asymptote allant de haut-gauche à bas-droite est $Y = -\tan \theta_0(X - c)$ ou, de manière équivalente, $Y + \tan \theta_0 X = c \tan \theta_0$. Les coordonnées cartésiennes d'un point sur la courbe sont $x = r \cos \varphi$ et $y = r \sin \varphi$. On doit avoir, par définition d'une asymptote, $y + \tan \theta_0 x \rightarrow c \tan \theta_0$ quand $\varphi \rightarrow -\theta_0$. Vérifions le en écrivant $\varphi = -\theta_0 + \varepsilon$. En se souvenant que $\cos \theta_0 = \frac{1}{e}$, on obtient que $r \simeq \frac{p}{\varepsilon \tan \theta_0}$, puis que $y + \tan \theta_0 x = r[\sin \varphi + \tan \theta_0 \cos \varphi] = \frac{r \sin(\varphi + \theta_0)}{\cos \theta_0} \simeq \frac{r \varepsilon}{\cos \theta_0} \simeq \frac{p}{\sin \theta_0}$. On a donc que $c \tan \theta_0 = \frac{p}{\sin \theta_0}$, c'est-à-dire $h = c \sin \theta_0 = p \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \frac{p/e}{\sqrt{1-(1/e)^2}} = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. On remplace p et e par leur expression (5.43), on remplace E par $\frac{1}{2}mv_\infty^2$ et on trouve $h = m/(Lv_\infty)$, comme indiqué.

par

$$L = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\| = hmv_\infty. \quad (5.73)$$

On voit donc que, connaissant h , v_∞ et α , on peut calculer le paramètre p et l'excentricité e de l'hyperbole. Pour l'excentricité, en utilisant (5.43),

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{hmv_\infty^2}{\alpha}\right)^2}. \quad (5.74)$$

Calculons l'angle θ_0 entre les asymptotes de l'hyperbole et l'axe de symétrie. On a

$$\theta_0 = \arccos \frac{1}{e} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{hmv_\infty^2}{\alpha}\right)^2}}, \quad (5.75)$$

ou, plus simplement,

$$\theta_0 = \arctan \frac{hmv_\infty^2}{\alpha}. \quad (5.76)$$

Pour cette dernière expression, on a utilisé la relation de trigonométrie $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$ démontrée à l'aide d'un dessin, figure 5.5.

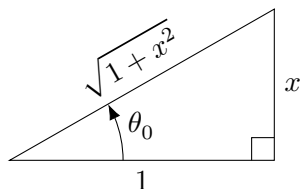


FIGURE 5.5 – Un triangle rectangle de petits côtés 1 et x , d'après Pythagore, une hypoténuse égale à $\sqrt{1+x^2}$. Avec l'angle θ_0 défini sur la figure, on a $\cos \theta_0 = 1/\sqrt{1+x^2}$ et $\tan \theta_0 = x$. On en déduit que $\theta_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$.

En 1909, Hans Geiger, Ernest Marsden et Ernest Rutherford ont fait une expérience importante en envoyant des particules alpha (des noyaux d'hélium) sur une feuille d'or. Au voisinage immédiat d'un noyau d'or, les particules alpha, de charge $q_2 = 2q_e$, interagissent avec les noyaux d'or, de charge $q_1 = 79q_e$, selon une interaction électrostatique répulsive ^{*6} $E_p(r) = \alpha/r$ avec

$$\alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{2q_e \times 79q_e}{4\pi\epsilon_0} = 3,6 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m}, \quad (5.77)$$

où $q_e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ est la charge élémentaire, et $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

Les particules alpha sont envoyées avec une énergie d'environ $5 \text{ MeV} \simeq 5 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} = 8 \times 10^{-13} \text{ J}$. On a donc

$$mv_\infty^2 \simeq 1,6 \times 10^{-12} \text{ J}. \quad (5.78)$$

(Nota : on confond la masse réduite m avec la masse de la particule alpha parce que le noyau d'or est beaucoup plus lourd.)

En combinant ces deux résultats, on calcule $\alpha/(mv_\infty^2)$ et on obtient donc avec (5.76) que

$$\theta_0 \simeq \arctan \frac{h}{2,3 \times 10^{-14} \text{ m}}. \quad (5.79)$$

Pour la grande majorité des particules alpha envoyées, le paramètre d'impact h était grand devant $2,3 \times 10^{-14} \text{ m}$. L'angle θ_0 est alors l'arctangente d'un nombre très grand, et vaut presque $\pi/2$. L'angle de déviation $\chi = \pi - 2\theta_0$ est presque nul.

6. À plus grande distance d'un noyau d'or, l'énergie potentielle décroît plus rapidement qu'en $1/r$ en raison des électrons entourant ce noyau et des autres atomes d'or.

Cependant, une petite fraction des particules alpha furent très déviées, parfois à plus de 90° . Pour avoir $\chi \geq \frac{\pi}{2}$, il faut que $\theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$, et donc $h \leq 2,3 \times 10^{-14} \text{ m}$ puisque $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. Ce qui est intéressant, c'est que le paramètre d'impact est forcément plus grand que l'objet qui dévie la particule alpha ⁷. C'est à la suite de cette expérience que Rutherford a émis l'hypothèse que la charge positive d'un atome occupait un très faible espace, de l'ordre de 10^{-14} m ou moins : c'est ce qu'on appelle le noyau atomique.

La diffusion de Rutherford est un cas de collision, comme au chapitre 3 : une particule alpha vient de l'infini de manière rectiligne uniforme, et repart vers l'infini de manière rectiligne uniforme. Quand la particule alpha et le noyau sont proches, l'interaction électrostatique modifie les vitesses des deux particules, mais l'impulsion et l'énergie totales du système sont conservées. Dans le chapitre 3, sans connaître le potentiel d'interaction, on n'avait qu'une information partielle sur les vitesses après la collision. Ici, on peut calculer l'angle de déviation.

7. Plus précisément, c'est $r_{\min}$ qui doit être plus grand que l'objet, mais $r_{\min}$ et h ont le même ordre de grandeur. On peut démontrer par exemple que $r_{\min} = h \sin \theta_0 / (1 - \cos \theta_0)$. Pour $\theta_0 = \pi/4$, cela donne $r_{\min} \simeq 2,4h$.

Deuxième partie

Relativité restreinte

Chapitre 6

Postulats de la relativité restreinte et transformations de Lorentz

6.1 Relativité galiléenne — rappels

Cette première partie consiste en un rappel des notions de changements de référentiel et de la relativité en mécanique dite newtonienne ou classique. Ces notions sont *a priori* déjà connues, et doivent être maîtrisées pour la suite du cours.

6.1.1 Mécanique newtonienne et transformations de Galilée

Rappelons la première loi de Newton, encadré 1.8

Encadré 6.1

N1 : principe d'inertie Il existe des référentiels, dits *inertiels* ou *galiléens*, dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne et uniforme.

La mécanique Newtonienne suppose que de tels référentiels existent. Dans ces référentiels, on peut écrire le *principe fondamental de la dynamique (PFD)*, $m\vec{a} = \vec{F}$.

Voici deux autres postulats importants de la mécanique newtonienne :

Encadré 6.2 : Postulats de la mécanique newtonienne

Principe de relativité

- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est également un référentiel galiléen.
- Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels galiléens.

Postulat du temps absolu

- Le temps qui s'écoule entre deux événements est indépendant du référentiel galiléen dans lequel on le mesure.

(La mécanique relativiste remet en cause le postulat du temps absolu.)

On peut associer à chaque référentiel $\mathcal{R}$ un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe dans $\mathcal{R}$, le jeu de coordonnées d'espace correspondant (x, y, z) et une coordonnée de temps (t) qui serviront à décrire des phénomènes physiques dans le référentiel choisi. Par exemple, le mouvement d'une masse donnée est décrit par trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Plus simplement, un référentiel et son repère permet de décrire un *événement*.

Encadré 6.3 : Notion d'événement

Un **événement** est un phénomène se produisant en un point et à un instant donné.

Dans un référentiel donné muni d'un repère, les **coordonnées d'un événement** sont quatre nombres réels (x, y, z, t) , où (x, y, z) donne la position et t la date de l'événement.

Un événement est donc un « point » de l'**espace-temps**, qui est un « espace » au sens mathématique du terme à *quatre dimensions*.

Exemple 6.1 : Voici quelques exemples d'événements :

- E_1 : « la lampe qui est *ici* s'allume à *tel instant*. »
- E_2 : « le détecteur qui est *là-bas* reçoit la lumière à *tel autre instant*. »
- E_3 : « M. Dupont s'endort *dans son siège* au moment où le train démarre. »
- E_4 : « À l'instant $t_4 = 0$, on lâche une bille au point $(x_4 = 0, y_4 = 0, z_4 = 2 \text{ m})$. »

Chacun de ses événements définit un point de l'espace et un instant.



Les coordonnées d'un événement dépendent du référentiel et du repère choisi, ainsi que du choix de l'origine des temps dans ce référentiel.

Si on se donne un deuxième référentiel $\mathcal{R}'$, avec son repère $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ fixe dans $\mathcal{R}'$, on pourra décrire un événement donné de deux manières différentes, selon le référentiel choisi : par exemple, l'événement en question aura pour coordonnées (x, y, z, t) dans $\mathcal{R}$, et (x', y', z', t') dans $\mathcal{R}'$. On appelle **transformations** les opérations appliquées à ces jeux de coordonnées pour passer d'un référentiel à un autre, c'est-à-dire pour exprimer les coordonnées (x, y, z, t) dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées (x', y', z', t') dans $\mathcal{R}'$, ou vice-versa.

Écrivons ces transformations dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en **translation rectiligne uniforme** avec une vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ (constante) par rapport à $\mathcal{R}$; les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont fixes dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Pour simplifier les calculs, on choisit alors de prendre $\vec{u}_{x'} = \vec{u}_x, \vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$. On oriente $\vec{u}_x$ selon $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, de manière à avoir $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$. On choisit O' de manière à ce que O et O' soient confondus à l'instant $t = 0$ dans $\mathcal{R}$. Enfin, on choisit l'origine des temps dans $\mathcal{R}'$ de façon à ce que $t' = 0$ lorsque $O = O'$.

Dans toute la suite ce cours, sauf indication contraire, on considère toujours le même changement de référentiel entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, qui est celui que l'on vient de décrire. En résumé :

- $\mathcal{R}$ est muni du repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,
- $\mathcal{R}'$ muni du repère $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ (avec une origine différente mais les mêmes vecteurs),
- la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ (qui est bien sûr la vitesse de O' dans $\mathcal{R}$) est $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$,
- à l'instant $t = 0$ dans $\mathcal{R}$ et $t' = 0$ dans $\mathcal{R}'$, les points O et O' sont confondus.

On exprime maintenant (x', y', z', t') en fonction de (x, y, z, t) dans le cadre de la mécanique newtonienne ; tout d'abord, le temps s'écoule de la même façon quel que soit le référentiel considéré, et donc $t' = t$. Comme le point O' se déplace à la vitesse $V\vec{u}_x$ dans $\mathcal{R}$ et se trouve à l'origine à $t = 0$, on a

$$\overrightarrow{OO'} = Vt\vec{u}_x. \quad (6.1)$$

En notant M le point dont les coordonnées sont (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ et (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$ à l'instant $t = t'$, on a

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z, \\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z, \end{cases} \quad (6.2)$$

et on arrive à

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (\text{ce résultat est incorrect en relativité restreinte}) \quad (6.3)$$

Ces équations sont appelées la **transformation de Galilée**.

Si on note $\vec{v}$ la vitesse du point M dans $\mathcal{R}$, et $\vec{v}'$ sa vitesse dans $\mathcal{R}'$, on sait que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, voir l'encadré 2.4. En coordonnées,

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad (\text{ce résultat est incorrect en relativité restreinte}) \quad (6.4)$$

(On pouvait aussi obtenir ce résultat en dérivant (6.3) par rapport au temps.) Le résultat (6.4) exprime le **principe d'additivité des vitesses de Galilée**, valable en mécanique classique et qui jouera un rôle essentiel dans la remise en cause des transformations de Galilée par la théorie de la relativité restreinte.

Enfin, on peut vouloir transformer l'accélération du point M en utilisant les transformations de Galilée. En dérivant $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ par rapport au temps, on obtient $\vec{a} = \vec{a}'$. L'accélération est donc invariante (c'est la même dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$) par les transformations de Galilée. En particulier, supposons $\mathcal{R}$ est galiléen, et considérons un point M isolé ; son accélération $\vec{a}$ dans $\mathcal{R}$ est nulle, donc son accélération $\vec{a}'$ dans $\mathcal{R}'$ est nulle, et donc $\mathcal{R}'$ est galiléen. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

6.1.2 Signification du postulat de relativité

Dans le postulat de relativité, que veut-on dire par « Les lois de la physique sont *identiques* dans tous les référentiels galiléens. » ?

Cette phrase veut dire que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux référentiels galiléens, alors les lois de la physique, et donc les équations les décrivant, s'écrivent exactement de la même manière dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Une conséquence de ce postulat est qu'il n'est pas possible à un observateur A enfermé dans un vaisseau spatial sans fenêtre de faire des expériences qui lui permettent de déterminer s'il est en mouvement uniforme par rapport à un observateur B situé en dehors du vaisseau. En ouvrant les fenêtres du vaisseau, l'observateur A pourra certainement voir s'il est en mouvement par rapport à l'observateur B mais ce mouvement est nécessairement relatif car il n'y a aucune expérience permettant de trancher si c'est A qui bouge par rapport à B ou B qui bouge par rapport à A . Le principe de relativité stipule qu'il n'y a pas de vitesse absolue, c'est-à-dire de vitesse par rapport à un référentiel privilégié.

Si on reprend le cas de deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (donc, nécessairement, en translation rectiligne uniforme), le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point M de masse m s'écrit sous la même forme dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \text{dans } \mathcal{R}, \quad \vec{F}' = m \vec{a}' \quad \text{dans } \mathcal{R}'. \quad (6.5)$$

Or, on a montré plus haut que

$$\vec{a}' = \vec{a}. \quad (6.6)$$

On peut donc écrire que

$$\vec{F}' = \vec{F}. \quad (6.7)$$

La force qui s'exerce sur M est identique (en norme et en direction) dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. C'est tout du moins la prédiction de la mécanique newtonienne. Prédiction que l'on peut tester expérimentalement.

6.2 Problèmes liés à la propagation de la lumière en mécanique classique

6.2.1 Nature ondulatoire de la lumière

En 1864, Maxwell publie son étude sur la nature ondulatoire de la lumière, décrite comme une onde électromagnétique. Par exemple, dans le vide, la lumière peut être décrite par un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, tous les deux oscillants à la même fréquence dans une direction transverse à la direction de propagation de l'onde que l'on repère par le vecteur d'onde $\vec{k}$ (cf. figure 1.2).

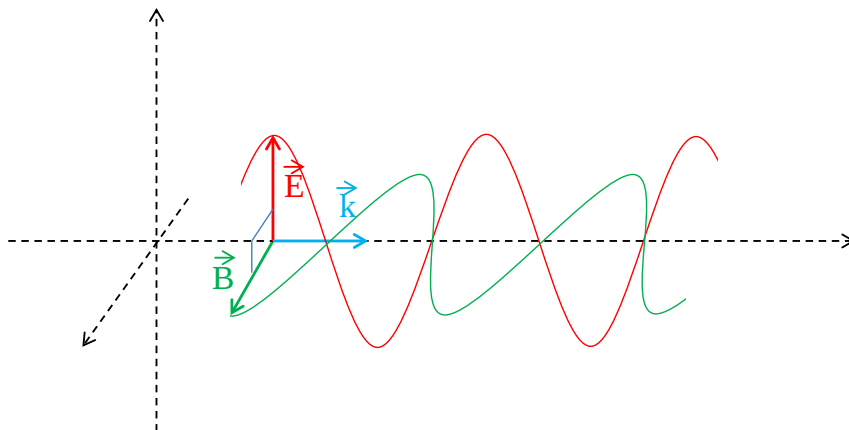


FIGURE 6.1 – Représentation d'une onde électromagnétique dans le vide.

L'onde est régie par quatre équations, les *équations de Maxwell* qui couplent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ entre eux et avec les propriétés du milieu dans lequel l'onde se propage (permittivité électrique, perméabilité magnétique, densité de charges libres, etc.). Au final, pour décrire l'onde lumineuse, on se contente souvent de décrire le champ $\vec{E}$, sachant que $\vec{B}$ pourra être déduit de $\vec{E}$ grâce aux équations de Maxwell. (Ce n'est pas le but du cours de rentrer dans le détail des lois de l'électromagnétisme, qui sont vues par ailleurs dans une autre UE. On rappellera juste ici quelques résultats que l'on confrontera à la relativité galiléenne et au principe de relativité.)

L'un des résultats de la théorie de Maxwell est que l'onde électromagnétique se propage, dans le vide, à la célérité, notée c , donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

où ε_0 est la permittivité du vide et μ_0 la perméabilité du vide, deux grandeurs associées au milieu de propagation, et donc indépendantes du référentiel de description.

Ce qui est remarquable ici, c'est que, contrairement aux ondes mécaniques (vibrations sur une corde, onde sonore...), l'onde électromagnétique, donc la lumière, peut se propager dans le vide.

6.2.2 Hypothèse de l'éther

Si on se place dans le cadre des transformations de Galilée, l'onde lumineuse ne peut se propager à la vitesse c que dans un unique référentiel d'inertie $\mathcal{R}_0$. Dans tout autre référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ animé d'une vitesse $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, le principe d'additivité des vitesses s'applique et donc la vitesse de propagation doit obligatoirement être différente de c . Comme la vitesse de propagation de la lumière dans le vide est une conséquence directe de la formulation des

équations de Maxwell, cela implique que ces équations, et donc les lois de l'électromagnétisme, ne sont vraies que dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. C'est en désaccord direct avec le principe de relativité énoncé plus haut.

Ainsi, à la fin du XIX^e siècle, a été posée l'hypothèse de l'éther. L'éther serait un milieu hypothétique dans lequel se déplacerait la lumière à la vitesse c . Maxwell postule ainsi que la lumière serait le résultat de la déformation élastique de ce milieu, un peu à l'image d'une onde mécanique (par exemple une déformation transversale d'une corde, ou encore une onde sonore qui est une déformation élastique de l'air se propageant). **L'hypothèse de l'éther implique que les relations de Maxwell ne seraient valables que dans le référentiel où l'éther est immobile.** En particulier, ce n'est que dans ce référentiel que la vitesse de la lumière est égale à c . On introduit donc la notion de référentiel absolu, ce qui brise là encore le principe de relativité où tous les référentiels d'inertie sont censés être équivalents.

6.2.3 L'expérience de Michelson-Morley

L'hypothèse de l'éther a été testée expérimentalement. L'un des premiers test expérimentaux est l'expérience de Michelson-Morley (1887), dont le but était de mesurer la vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel de l'éther.

L'expérience est la suivante : dans le référentiel terrestre, un faisceau lumineux est séparé à l'aide d'une lame séparatrice en deux faisceaux (notés (1) et (2)), orthogonaux l'un à l'autre. Chaque faisceau est réfléchi par un miroir et renvoyé vers la lame séparatrice après avoir chacun parcouru la même distance $2d$, voir figure 6.2.

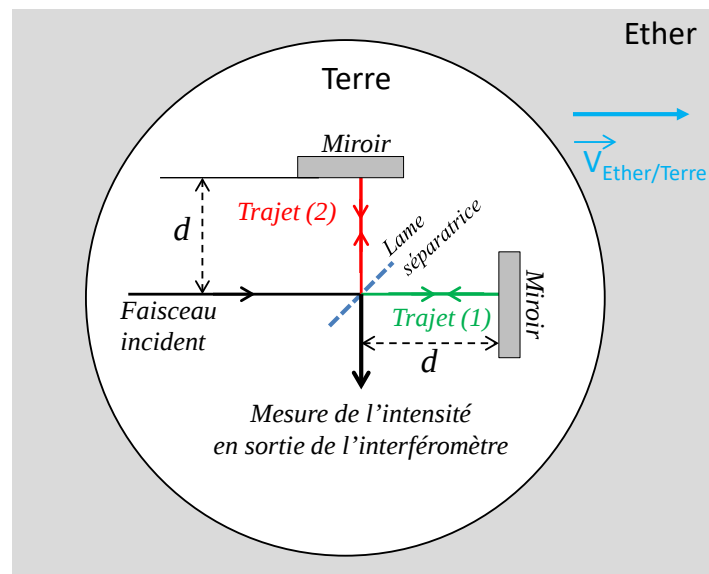


FIGURE 6.2 – Schéma de principe de l'expérience de Michelson-Morley.

Les deux faisceaux peuvent interférer au moment de leur recroisement sur la lame séparatrice, et ainsi l'intensité lumineuse finale mesurée en sortie dépend du déphasage entre les faisceaux (1) et (2), c'est-à-dire de la différence de temps de trajet entre les faisceaux (1) et (2) au moment où ils se recombinaient sur la séparatrice. Sans poser les calculs, on peut en effet comprendre que l'intensité finale de l'onde totale dépend du retard entre les deux ondes (1) et (2) que l'on va supposer sinusoïdales, cf. figure 6.3. L'interféromètre de Michelson-Morley permet ainsi, par la mesure de l'intensité lumineuse en sortie, de mesurer le retard de la propagation de la lumière entre les trajets (1) et (2).

Dans le problème, on s'arrange à ce que le faisceau (1) soit dans la direction de rotation de la Terre, et le faisceau (2) dans une direction transverse.

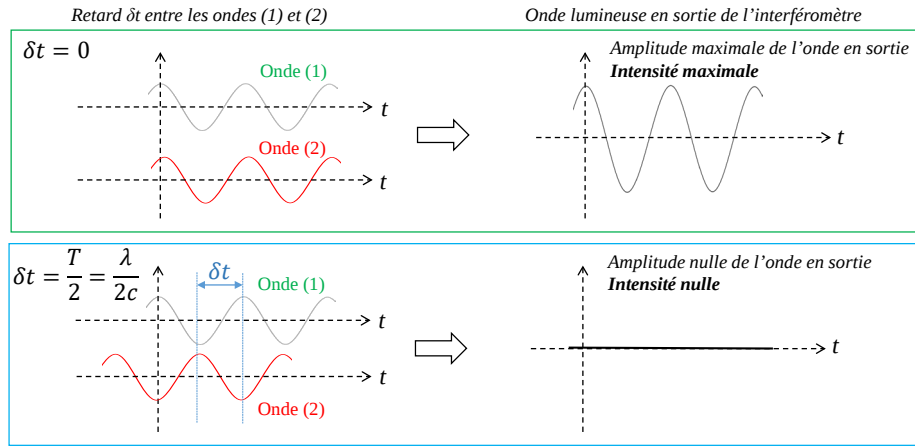


FIGURE 6.3 – l'onde lumineuse en sortie de l'interféromètre est issue de la somme des deux ondes ayant parcouru les trajets (1) et (2). l'amplitude de cette onde, et donc son intensité, dépend donc du retard de propagation δt entre les deux trajets. On représente ici deux cas extrêmes où les deux ondes arrivent en même temps (intensité maximale), ou avec un retard entre les deux de $\frac{T}{2}$ (intensité minimale).

Pour prévoir les résultats de cette expérience, on va se placer dans le cadre des transformations de Galilée, et de l'hypothèse de l'éther. L'éther étant fixe un référentiel absolu $\mathcal{R}_e$, on considère que la Terre se déplace dans $\mathcal{R}_e$ avec la vitesse $\vec{V}_{T/e}$, supposée constante pendant la durée de l'expérience. (Si l'éther est immobile dans le référentiel de Copernic, cette vitesse est en gros la vitesse de la Terre par rapport au Soleil, soit 30 km/s en norme.) Cela revient à dire que l'éther se déplace par rapport à la Terre avec la vitesse constante $\vec{V}_{e/T} = -\vec{V}_{T/e}$.

Si on note $\vec{v}_{/T}$ la vitesse des photons constituant un faisceau lumineux dans $\mathcal{R}_T$ (par rapport à la Terre), et $\vec{v}_{/e}$ la vitesse du même faisceau lumineux dans $\mathcal{R}_e$ par rapport à l'éther, on a par composition des vitesses

$$\vec{v}_{/T} = \vec{v}_{/e} + \vec{V}_{e/T}. \quad (6.8)$$

Par définition de l'éther, $\|\vec{v}_{/e}\| = c$ puisque les lois de Maxwell sont supposées correctes dans $\mathcal{R}_e$.

Déterminons à l'aide du principe d'additivité des vitesses (6.8) les temps d'aller-retour mis par les faisceaux lumineux afin de parcourir les trajets (1) et (2) de la figure 6.2 dans le référentiel de la Terre $\mathcal{R}_T$. On se donne une base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ choisie de manière à avoir $\vec{V}_{e/T} = V_{e/T} \vec{u}_x$ et on oriente le dispositif pour que le trajet 1 soit selon $\vec{u}_x$ et le trajet 2 selon $\vec{u}_y$.

Trajet (1) Dans ce trajet, les vitesses $\vec{v}_{/T}$ et $\vec{v}_{/e}$ sont également selon $\vec{u}_x$. On obtient pour l'aller :

$$\vec{v}_{/e} = c \vec{u}_x, \quad \text{et donc} \quad \vec{v}_{/T} = (c + V_{e/T}) \vec{u}_x. \quad (6.9)$$

Pour le retour, on a :

$$\vec{v}_{/e} = -c \vec{u}_x, \quad \text{et donc} \quad \vec{v}_{/T} = -(c - V_{e/T}) \vec{u}_x. \quad (6.10)$$

Donc, au final, le temps d'une aller-retour sur le trajet (1) est :

$$t_1 = \frac{d}{c + V_{e/T}} + \frac{d}{c - V_{e/T}} = \frac{2dc}{c^2 - V_{e/T}^2}$$

Trajet (2) Dans le cas du trajet (2), la vitesse $\vec{v}_T$ est selon $\vec{u}_y$. On écrit

$$\vec{v}_{/e} = \vec{v}_{/T} - \vec{V}_{e/T}. \quad (6.11)$$

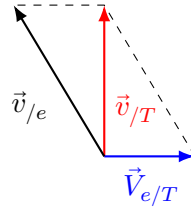


FIGURE 6.4 – Vitesses à l’aller du trajet 2

Comme les deux vecteurs à droite sont orthogonaux, on a par Pythagore, voir figure 6.4,

$$\|\vec{v}_e\|^2 = \|\vec{v}_T\|^2 + \|\vec{V}_{e/T}\|^2. \quad (6.12)$$

Le membre de gauche est c^2 , et on arrive donc à

$$\|\vec{v}_T\| = \sqrt{c^2 - V_{e/T}^2}. \quad (6.13)$$

La norme de $\vec{v}_T$ est la même à l’aller et au retour. On obtient alors le temps de parcours total sur le trajet (2) :

$$t_2 = \frac{2d}{\|\vec{v}_T\|} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - V_{e/T}^2}}$$

Bilan Ainsi, dans le cadre des transformations de Galilée, les temps de parcours des trajets (1) et (2) sont différents. Si on calcule la différence de temps de trajet entre (1) et (2) :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2d \left[\frac{c}{c^2 - V_{e/T}^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - V_{e/T}^2}} \right] = \frac{2d}{c^2 - V_{e/T}^2} \left(c - \sqrt{c^2 - V_{e/T}^2} \right).$$

Comme $c > V_{e/T}$, alors on a que $\Delta t > 0$. Le trajet (1) est donc le trajet qui prend le plus de temps. L’appareil de Michelson-Morley devrait donc, dans le cadre de la mécanique classique, pouvoir mesurer une intensité totale en sortie qui correspond à ce retard.

La figure 6.5 montre deux figures de l’article original de Michelson et Morley paru dans the American Journal of Science, volume **34**, page 333 en 1887. La figure de gauche est un dessin représentant leur interféromètre monté sur une pierre massive le tout flottant sur un bain de mercure qui permet de faire tourner le dispositif. La figure de droite montre les résultats qu’ils ont obtenus. Ils sont spectaculaires et sans appel ! En traits pleins, le déplacement des franges d’interférences (la quantité Δt déterminée plus haut multipliée par c) mesurée en fonction de l’orientation d’un des bras de l’interféromètre. En traits pointillés, 1/8 du déplacement théoriquement attendu par théorie éther et transformation galiléenne des vitesses ! Les résultats expérimentaux (traits pleins) et théoriques (pointillés) sont absolument incompatibles ! Depuis cette expérience pionnière, ce constat a été vérifié par beaucoup d’autres expériences comparables réalisées plus tard (et même de nos jours avec des instruments de très haute sensibilité).

Et c’est là où il faut bien comprendre que la physique est par nature une science expérimentale. Aussi belle et cohérente que semble être une théorie et dans notre cas celle de l’éther et de la relativité galiléenne, elle n’est physiquement pas acceptable si elle ne rend pas compte, si elle ne prédit pas, les résultats expérimentaux observés.

La démarche du physicien est donc de remettre en cause les fondements (les postulats) de la théorie invalidée par l’expérience et d’en proposer de nouveaux et de construire une autre théorie capable de rendre compte des faits expérimentaux.

C’est ce que va faire Einstein en proposant sa théorie de la relativité restreinte que nous exposons dans la suite de ce cours.

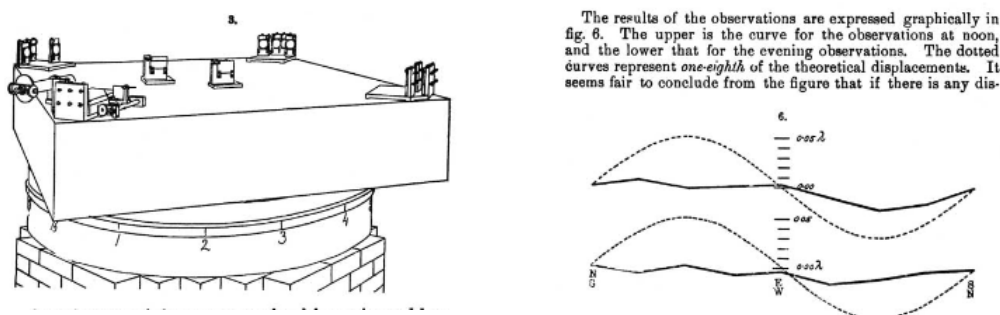


FIGURE 6.5 – Figures issues de l'article original de Michelson et Morley (*Am. J. Sci.*, **34**,333 (1887)). À gauche, schéma de l'interféromètre. À droite les résultats de l'expérience : déplacement des franges ($c\Delta t$) en unités d'une longueur d'ondes de référence (raie jaune du sodium) en fonction de l'orientation d'un des bras de l'interféromètre Nord/Sud Est/Ouest Sud/Nord. Traits pleins : la mesure, Traits pointillés : $1/8$ du déplacement attendu dans le modèle éther et transformation galiléenne des vitesses.

6.3 Postulats de la relativité restreinte

6.3.1 Postulats d'Einstein

En 1905 dans son célèbre article *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sur l'électrodynamique des corps en mouvement), *Annalen der Physik* **17**, 891-921 (1905), Einstein pose les postulats sur lesquels il fonde la théorie de la relativité restreinte. Il réaffirme le principe de relativité et élève au rang de postulat l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels d'inertie. De ce fait, les lois de l'électromagnétisme de Maxwell deviennent universelles et ne dépendent plus d'un référentiel en particulier et les transformations de Galilée sont remises en cause. Pour cela, il faut néanmoins abandonner l'idée d'un temps absolu. On arrive donc à

Encadré 6.4 : Postulats de la mécanique relativiste

Principe de relativité

- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est également un référentiel galiléen.
- Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels galiléens.

Postulat d'invariance de la vitesse de la lumière

- La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens

À comparer avec l'encadré 6.2.

C'est le postulat d'invariance de la vitesse de la lumière qui est conceptuellement radicalement nouveau car il remet en cause les transformations de Galilée en s'opposant au principe d'additivité galiléenne des vitesses solidement établi à l'époque.

Il faut donc trouver de nouvelles transformations permettant de passer de la description d'un événement dans un référentiel donné à un autre.

6.3.2 Transformations de Lorentz

Afin de satisfaire aux postulats d'Einstein, on doit établir de nouvelles transformations des coordonnées pour passer d'un référentiel galiléen à un autre.

Remarque importante : la théorie de la relativité restreinte ne traite que des transformations entre deux référentiels galiléens. Le cas des référentiels accélérés fait intervenir une théorie plus élaborée qui est la théorie de la relativité générale.

Les transformations entre deux référentiels galiléens doivent obéir à plusieurs contraintes.

- D'une part, elles doivent laisser invariante la vitesse de la lumière dans le vide. La vitesse est définie comme un rapport d'une distance et d'une durée. Comme les changements de référentiels en mouvement font nécessairement intervenir un changement des coordonnées spatiales, cela implique donc que la coordonnée temporelle est également modifiée.
- D'autre part, comme les référentiels galiléens doivent être tous équivalents, les formules décrivant la transformation d'un référentiel $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ ne doit dépendre que de la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. En particulier, pour écrire la transformation de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$, il doit suffire de changer le signe de la vitesse.

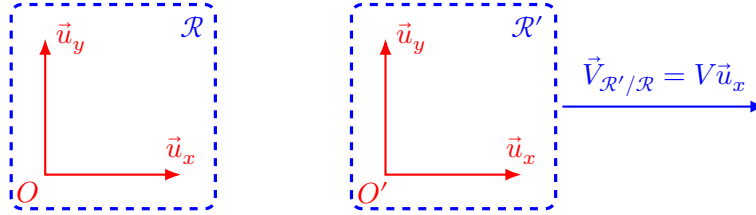


FIGURE 6.6 – Représentation des deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

On introduit deux référentiels galiléens, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, dans la même configuration que celle utilisée pour établir la transformation de Galilée (6.3), à savoir : $\mathcal{R}$ est muni du repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, $\mathcal{R}'$ muni du repère $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ (avec une origine différente mais les mêmes vecteurs), la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ (qui est bien sûr la vitesse de O' dans $\mathcal{R}$) est $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V \vec{u}_x$, les points O et O' sont confondus à l'instant $t = 0$ dans $\mathcal{R}$ et $t' = 0$ dans $\mathcal{R}'$, voir la figure 6.6. Ceci implique que les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{cases} x_{O'} = Vt \\ y_{O'} = 0 \\ z_{O'} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{R} \text{ à l'instant } t. \quad (6.14)$$

On considère un événement quelconque de coordonnées (x, y, z, t) dans $\mathcal{R}$ et (x', y', z', t') dans $\mathcal{R}'$. On cherche à exprimer (x', y', z', t') en fonction de (x, y, z, t) . Pour simplifier la discussion, on commence par supposer que $y = z = 0$, ce qui implique par symétrie que $y' = z' = 0$, et on cherche à exprimer (x', t') en fonction de (x, t) .

La transformation la plus générale possible pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ s'écrit

$$\begin{cases} x' = g(x, t) \\ t' = h(x, t), \end{cases} \quad (6.15)$$

où les fonctions g et h dépendent également de la vitesse V . Cependant, un argument simple basé sur l'homogénéité de l'espace ^{*1} implique que la transformation est, en fait, linéaire. On écrit donc

$$\begin{cases} x' = ax + bt, \\ t' = ex + ft, \end{cases} \quad (6.16)$$

1. Dans $\mathcal{R}$, considérons une expérience où l'on suit le mouvement d'une particule subissant des forces exercées par une machine. La particule part de $(x = 0, t = 0)$ et arrive en (x_1, t_1) . La même particule vue dans $\mathcal{R}'$ part de $(x' = 0, t' = 0)$ et arrive en (x'_1, t'_1) avec $x'_1 = g(x_1, t_1)$ et $t'_1 = h(x_1, t_1)$.

où les coefficients a , b , e et f dépendent de V .

Dans la suite, on va chercher à exprimer les coefficients a , b , e et f afin de satisfaire aux contraintes que l'on a exprimées plus haut.

Par définition, la vitesse d'un objet suivant x dans $\mathcal{R}$ est :

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Dans $\mathcal{R}'$:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(ax + bt)}{d(ex + ft)} = \frac{a dx + b dt}{e dx + f dt} = \frac{a \frac{dx}{dt} + b}{e \frac{dx}{dt} + f} = \frac{av_x + b}{ev_x + f}$$

On va utiliser cette relation sur quelques points particuliers (O et O').

Vitesse de O' Dans $\mathcal{R}$, O' est animé de la vitesse V selon x . Dans $\mathcal{R}'$, O' est immobile et donc sa vitesse est nulle. Si on remplace dans l'équation précédente :

$$0 = \frac{aV + b}{eV + f}, \quad \text{ce qui donne} \quad aV + b = 0 \quad (6.17)$$

Vitesse de O Dans $\mathcal{R}$, O est immobile et donc sa vitesse est nulle. Dans $\mathcal{R}'$, O se déplace à la vitesse $-V$ (vers les x négatifs).

$$-V = \frac{a \times 0 + b}{e \times 0 + f}, \quad \text{ce qui donne} \quad -V = \frac{b}{f} \quad (6.18)$$

Invariance de c Si $v_x = c$ dans $\mathcal{R}$, alors $v'_x = c$ dans $\mathcal{R}'$:

$$c = \frac{ac + b}{ec + f}, \quad \text{ce qui donne} \quad ac + b = ec^2 + fc \quad (6.19)$$

Bilan Des équations (6.17) et (6.18), on tire :

$$f = a, \quad b = -Va.$$

En injectant cela dans l'équation (6.19), on arrive à :

$$e = -\frac{V}{c^2}a$$

On peut ainsi réécrire les transformations en fonction du seul paramètre a :

$$\begin{cases} t' = a \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = a(x - Vt) \end{cases} \quad (6.20)$$

Maintenant, on recommence la même expérience, mais décalée dans l'espace et le temps : la particule part de (X, T) et arrive en $(X + x_1, T + t_1)$; en effet, on a également décalé la machine, donc la particule est dans le même environnement et suit la même trajectoire, mais décalée dans l'espace de X et dans le temps de T . Pour la même expérience décalée dans $\mathcal{R}'$, la particule part de (X', T') avec $X' = g(X, T)$ et $T' = h(X, T)$, et arrive en $(X' + x'_1, T' + t'_1)$ parce que, là encore, la trajectoire dans $\mathcal{R}'$ est simplement décalée. Mais on doit également avoir $X' + x'_1 = g(X + x_1, T + t_1)$ et $T' + t'_1 = h(X + x_1, T + t_1)$. Finalement, on obtient que

$$g(X + x_1, T + t_1) = g(X, T) + g(x_1, t_1), \quad h(X + x_1, T + t_1) = h(X, T) + h(x_1, t_1).$$

Ces relations, valables pour tout X, T, x_1 et t_1 , impliquent que g et h sont linéaires.

Pour déterminer a , on utilise le fait qu'une transformation de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$, s'écrit de la même façon que celle de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, à condition de changer la vitesse V en $-V$; en effet : $\vec{V}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -V\vec{u}_x$. On peut donc écrire ^{*2}

$$\begin{cases} t = a\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = a(x' + Vt') \end{cases} \quad (6.21)$$

Ainsi, si on effectue deux transformations à la suite de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ puis de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$, on doit retomber sur le jeu de coordonnées de départ dans $\mathcal{R}$. Par exemple, pour x :

$$x = a(x' + Vt') = a\left[a\left(x - Vt\right) + Va\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\right] = a^2\left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)x\right] \quad \text{et donc } a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

On obtient alors un jeu de transformations à une dimension spatiale et une dimension temporelle entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ qui garantit la validité des postulats d'Einstein.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.22)$$

Pour déterminer la loi de transformation de la coordonnée spatiale y , on considère, dans le référentiel $\mathcal{R}$, un flash lumineux partant de $(x = 0, y = 0, z = 0, t = 0)$ et arrivant en $(x_1, y_1, z_1 = 0, t_1)$. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le même flash lumineux part de $(x' = 0, y' = 0, z' = 0, t' = 0)$ et arrive en $(x'_1, y'_1, z'_1 = 0, t'_1)$.

La vitesse de la lumière étant la même (en norme!) dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a :

$$c^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{t_1^2} = \frac{x_1'^2 + y_1'^2}{t_1'^2}, \quad (6.23)$$

qui conduit à :

$$x_1^2 + y_1^2 - c^2 t_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 - c^2 t_1'^2. \quad (6.24)$$

En utilisant les transformations des coordonnées x'_1 et t'_1 données par les équations (6.22), on arrive à :

$$x_1^2 + y_1^2 - c^2 t_1^2 = \gamma^2(x_1 - Vt_1)^2 + y_1'^2 - c^2 \gamma^2(t_1 - Vx_1/c^2)^2 \quad (6.25)$$

Après quelques lignes de calculs que vous pouvez faire pour vous entraîner et en remarquant que $\gamma^2(1 - \frac{V^2}{c^2}) = 1$, on montre que :

$$y_1' = y_1 \quad (6.26)$$

Pour la coordonnée spatiale y , la transformation qui garantit la validité des postulats d'Einstein est donc simple : $y = y'$. Un raisonnement équivalent sur la coordonnée spatiale z conduit à $z' = z$. On arrive alors aux **transformations de Lorentz** :

2. N'oublions pas que a dépend de la vitesse entre les deux référentiels. Plus précisément, il dépend de la *norme* de cette vitesse, parce que toutes les directions dans l'espace sont équivalentes. Comme les vitesses $V\vec{u}_x$ et $-V\vec{u}_x$ ont la même norme, on a bien le *même* coefficient a dans les équations passant de (x, t) à (x', t') et celles passant de (x', t') à (x, t) .

Encadré 6.5 : Transformation de Lorentz

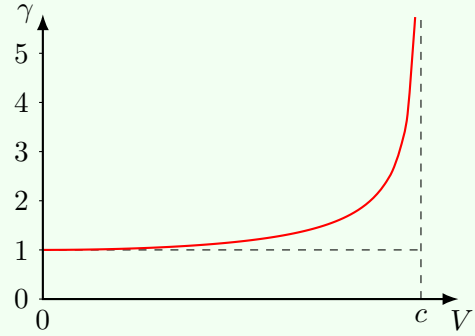
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens, avec $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un repère lié à $\mathcal{R}$ et $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un repère lié à $\mathcal{R}'$. On suppose que la vitesse (constante) de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$ et que les origines O et O' sont confondues à l'instant $t = 0$ dans $\mathcal{R}$ et $t' = 0$ dans $\mathcal{R}'$.

Alors les coordonnées (x', y', z', t') dans $\mathcal{R}'$ d'un événement de coordonnée (x, y, z, t) dans $\mathcal{R}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.27)$$

La quantité γ s'appelle le **facteur de Lorentz**. C'est une fonction de V , représentée ci-contre, qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\gamma > 1$ dès que $V \neq 0$,
- $\gamma \simeq 1$ si $V \ll c$,
- γ est une fonction croissante de V ,
- $\gamma \rightarrow \infty$ quand $V \rightarrow c$



Les transformations de Lorentz sont le résultat le plus important du cours. Tous les résultats dont nous parlerons par la suite sont des conséquences plus ou moins directes de ces transformations ! Leur signification profonde est déroutante même pour le physicien expérimenté. Mais leur application mathématique est simple et tout problème de relativité restreinte peut se traiter en se rapportant à ces transformations.

Les transformations inverse qui permettent de trouver les coordonnées dans $\mathcal{R}$ quand on connaît celles dans $\mathcal{R}'$, se trouvent en faisant dans (6.27) les substitutions $x' \leftrightarrow x$, $y' \leftrightarrow y$, $z' \leftrightarrow z$, $t' \leftrightarrow t$ et $V \rightarrow -V$. On arrive à :

$$\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (6.28)$$

Les transformations de Lorentz s'écrivent sous la forme donnée dans l'encadré si on suppose que O et O' sont confondus aux temps $t = t' = 0$. C'est le plus commode et le plus parlant. On peut cependant bien évidemment écrire les transformations de Lorentz dans le cas général où l'événement $(x = 0, y = 0, z = 0, t = 0)$ dans $\mathcal{R}$ a pour coordonnées (x'_0, y'_0, z'_0, t'_0) dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} t' - t'_0 = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' - x'_0 = \gamma (x - Vt) \\ y' - y'_0 = y \\ z' - z'_0 = z \end{cases} \quad (6.29)$$

Les transformations de Lorentz s'écrivent souvent avec la variable ct plutôt que t . L'avantage est alors que ct est de la même dimension que x , y et z , et que la transformation devient plus symétrique ; en n'écrivant que les lignes concernant x et t , (6.27) devient

$$\begin{cases} ct' = \gamma \left(ct - \frac{V}{c} x \right), \\ x' = \gamma \left(x - \frac{V}{c} ct \right). \end{cases} \quad (6.30)$$

Enfin, comme la transformation de Lorentz est linéaire, on peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Pour un événement donné repéré dans un référentiel donné, les coordonnées spatio-temporelles forment un **vecteur à quatre composantes**. Le *même événement* dans un autre référentiel est caractérisé par un autre vecteur à quatre composantes, que l'on obtient à partir du premier vecteur grâce à la matrice ci-dessus.

Ces vecteurs à quatre composantes qui se transforment lors d'un changement de référentiel grâce à la matrice donnée dans (6.31) s'appellent des **quadrivecteurs**. Nous y reviendrons au chapitre 9.

Chapitre 7

Conséquences des transformations de Lorentz : simultanéité, transformations des longueurs et des durées

7.1 Relativité du temps et de la simultanéité

Le point le plus curieux et le plus intrigant des transformations de Lorentz (6.27) est certainement le fait que $t \neq t'$. Les transformations de Lorentz impliquent que la coordonnée de temps n'est plus commune à tous les référentiels en translation uniforme. Chaque référentiel possède sa propre échelle de temps, le temps s'écoule différemment dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Il ne fait aucun doute que cette notion est difficile à intégrer lorsqu'on la rencontre pour la première fois mais c'est bien ce que disent les transformations de Lorentz !

Une conséquence de cela est la suivante :

Encadré 7.1

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux référentiels galiléens en mouvement l'un par rapport à l'autre avec une vitesse selon $\vec{u}_x$, alors deux événements simultanés dans $\mathcal{R}$ mais ayant des abscisses x différentes **ne peuvent pas** être simultanés dans $\mathcal{R}'$.

7.1.1 Définition de la simultanéité

Deux événements E_1 et E_2 ayant lieu dans des endroits distincts sont simultanés dans un référentiel donné s'ils ont lieu au même instant dans ce référentiel. On pourrait se satisfaire de cette phrase comme définition de la simultanéité mais elle manque de précision pour le physicien.

Le physicien veut répondre à la question : « comment puis-je mesurer, c'est-à-dire réaliser une expérience, qui me permette de savoir si deux événements sont simultanés ou non ? De manière plus générale, comment puis-je déterminer la date d'un événement donné ? »

Prenons un exemple : depuis son observatoire dans la montagne, un physicien observe un éclair frappant une tour située dans la vallée. Le physicien, qui dispose d'une horloge ultra-précise, veut savoir la date précise à laquelle l'éclair a frappé. Pour cela, il relève la date t_0 à laquelle il a reçu le flash de l'éclair, et il soustrait le temps de propagation de la lumière, à savoir : (distance entre lui et la tour)/(vitesse de la lumière). (Il pourrait aussi mesurer la date $\tilde{t}_0$ à laquelle il reçoit le bruit du tonnerre, et soustraire le temps de propagation du son, mais c'est plus difficile parce que la vitesse de propagation du son dépend de la température, du vent, etc.). Si un autre physicien sur la montagne d'en face fait la même mesure, les deux physiciens trouveront la même date pour l'événement « l'éclair frappe la tour ».

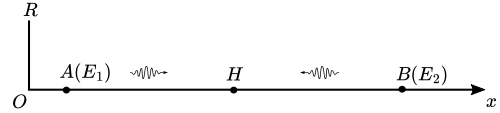
Encadré 7.2

Dans un référentiel donné $\mathcal{R}$ muni d'une origine des temps, il est donc possible de **définir sans ambiguïté la date d'un événement**, et de la mesurer. En particulier, il est possible de **déterminer si deux événements sont simultanés** ou non, et il est possible d'avoir des horloges identiques immobiles dans le référentiel qui restent synchronisées.

Exemple 7.1 : Une manière simple et directe de déterminer si deux événements E_1 et E_2 sont simultanés dans un référentiel donné est la suivante : on place un observateur H au milieu du segment liant le point A , coordonnée spatiale de l'événement E_1 , et le point B , coordonnée spatiale de l'événement E_2 .

À l'instant où a lieu l'événement E_1 , un flash lumineux part de A en direction de H . À l'instant où a lieu l'événement E_2 , un flash lumineux part de B en direction de H . Les événements E_1 et E_2 sont simultanés dans $\mathcal{R}$ si les flashes lumineux issus de A et B arrivent simultanément en H .

Si on remplit l'espace d'horloges identiques et fixes, on peut en suivant ce protocole les synchroniser entre elles, de manière à ce que les événements de type « l'horloge 12843 a son aiguille qui indique 13h17 » soient simultanés pour toutes les horloges. Le temps dans $\mathcal{R}$ est alors l'indication donnée par ces horloges situées en tout point de l'espace où l'on veut dater un événement.



7.1.2 Relativité de la simultanéité et donc du temps

Considérons deux événements E_1 et E_2 dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) . On suppose que les événements sont simultanés dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que $t_1 = t_2$. (On vient de voir que cette notion avait un sens dans un référentiel donné.) Par contre, les événements ne sont pas au même endroit, et en particulier on suppose $x_1 \neq x_2$.

Si on calcule les instants de ces deux événements dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme avec une vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$, on obtient d'après la transformation de Lorentz

$$t'_1 = \gamma(t_1 - Vx_1/c^2), \quad t'_2 = \gamma(t_2 - Vx_2/c^2). \quad (7.1)$$

Comme $t_2 = t_1$, on obtient $t'_2 - t'_1 = \gamma V(x_1 - x_2)/c^2$. Les deux événements E_1 et E_2 ne sont pas simultanés dans $\mathcal{R}'$. Illustrons ce point avec un exemple.

Exemple 7.2 : Dans un train, on a repéré trois points A, B, C au plafond, alignés dans le sens de la marche avec B au milieu de $[AC]$. On allume une lampe à la verticale du point B . On note E_A l'événement « la lumière arrive en A », et de même les événements E_B et E_C .

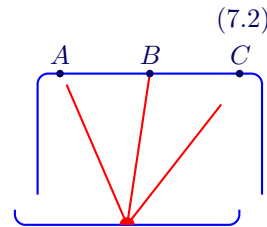
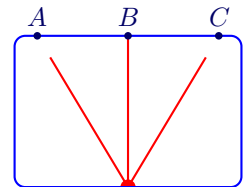
Sur la figure ci-contre, on a représenté la situation dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train à l'instant t'_B où la lumière atteint le point B . Les points A et C n'ont pas encore été illuminés, puisque la lumière a plus de chemin à parcourir. (Les trois traits rouges de la figure ont la même longueur.) Il est clair que l'on a, dans $\mathcal{R}'$,

$$t'_A = t'_C > t'_B. \quad (7.2)$$

On regarde la même situation dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié aux rails. Dans $\mathcal{R}$, le train se déplace vers la droite, et on suppose qu'il se déplace à *très* grande vitesse (environ $0,15c$, vue la figure). Entre le moment où la lumière est émise par la lampe, et le moment où elle atteint le point B , le train a eu le temps de se déplacer un peu. Imaginons qu'un observateur fixe par rapport aux rails observe l'expérience à travers une fenêtre. Dans la figure ci-contre, la partie basse montre la position de la fenêtre et de la lampe à l'instant elle commence à émettre la lumière ; la partie haute montre la position de la fenêtre et des trois points à l'instant t_B où B reçoit la lumière. La lumière n'a pas encore atteint A ou C . (Les trois traits rouges ont la même longueur.) Clairement, dans $\mathcal{R}$,

$$t_C > t_A > t_B. \quad (7.3)$$

Les événements A et C , simultanés dans $\mathcal{R}'$, ne le sont plus dans $\mathcal{R}$. En fait, si le train allait encore plus vite, on pourrait même avoir $t_C > t_B > t_A$: l'événement E_A serait postérieur à E_B dans $\mathcal{R}'$, mais antérieur à E_B dans $\mathcal{R}$!

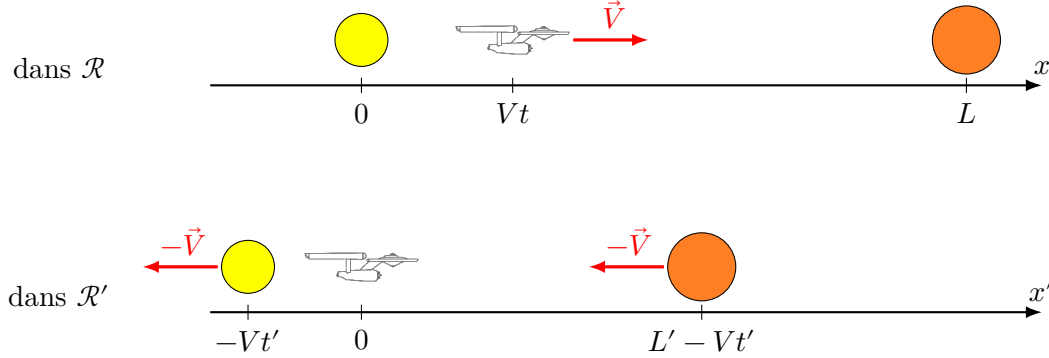


7.2 Dilatation des durées et contraction des longueurs

La simultanéité des événements étant une notion relative (qui dépend du référentiel), la durée séparant deux événements dépend donc elle aussi du référentiel. Nous allons voir que, de même, les longueurs des objets dépendent du référentiel.

7.2.1 Premier exemple

On considère un voyage sidéral depuis le Soleil (à gauche) vers une étoile voisine (à droite).



Dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$, le point de départ du voyage (le Soleil) est fixe à la position $x = 0$, et le point d'arrivée (l'étoile voisine) est également fixe à la position $x = L$. La distance L entre les deux étoiles est ici **mesurée dans le référentiel où ces deux étoiles sont immobiles**. On dit, par définition que c'est la **distance propre** entre les deux étoiles.

Toujours dans le référentiel $\mathcal{R}$, on choisit l'origine des temps de manière à ce que le départ du voyage ait lieu à l'instant $t = 0$. Le vaisseau arrive à l'instant $t = T$ à destination, où T est donc la durée du voyage dans le référentiel $\mathcal{R}$. (Si les voyageurs envoient un signal « Nous sommes arrivés » au terme de leur voyage, ce signal atteint donc la Terre à la date $T + L/c$, ce qui permet aux terriens, connaissant L , d'en déduire T .)

On a donc deux événements importants : le départ et l'arrivée du vaisseau, dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont

$$E_{\text{départ}}^{\mathcal{R}}(x = 0, t = 0), \quad E_{\text{arrivée}}^{\mathcal{R}}(x = L, t = T). \quad (7.4)$$

On suppose que le vaisseau se déplace à vitesse constante V dans le référentiel $\mathcal{R}$. (Il y a peut-être une phase d'accélération au départ, et une phase de décélération à la fin, mais on suppose que ces phases sont d'une durée courte et négligeable devant la durée totale du voyage.) Clairement, on a

$$V = L/T. \quad (7.5)$$

On note $\mathcal{R}'$ le référentiel lié au vaisseau. En appliquant les transformations de Lorentz (6.27), on obtient les coordonnées des deux événements dans $\mathcal{R}'$:

$$E_{\text{départ}}^{\mathcal{R}'}(x' = 0, t' = 0), \quad E_{\text{arrivée}}^{\mathcal{R}'}(x' = 0, t' = T') \quad \text{avec } T' = \frac{1}{\gamma}T. \quad (7.6)$$

En effet, pour $E_{\text{arrivée}}$, on a $x' = \gamma(L - VT) = 0$ et $t' = \gamma(T - VL/c^2) = \gamma T(1 - V^2/c^2) = \gamma T/\gamma^2$. Le résultat $x' = 0$ était évident : la coordonnée spatiale de l'événement « le vaisseau arrive » dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est forcément la position du vaisseau qui, par définition, est $x' = 0$. Le résultat $T' = T/\gamma$ est plus intéressant : **le voyage du point de vue du vaisseau dure un temps T' inférieur à T** . Ce temps T' serait effectivement le temps affiché par l'horloge du vaisseau, et le temps du voyage ressenti par les voyageurs. Ce temps T' , mesurée par une horloge dans le référentiel où elle est immobile, s'appelle le **temps propre**, ou **durée propre**. Le temps T du voyage mesuré dans le référentiel $\mathcal{R}$ où les voyageurs sont en mouvement est alors un temps « impropre ».

Revenons maintenant à la distance entre les deux étoiles, mais du point de vue des voyageurs. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le vaisseau est immobile et les étoiles se déplacent à la vitesse V . (Le Soleil s'éloigne à la vitesse V , et l'étoile voisine se rapproche à vitesse V). À l'instant $t' = 0$, le soleil est juste à côté du vaisseau. À l'instant $t' = T'$, c'est l'étoile voisine qui est à côté du vaisseau. Puisqu'il faut (de leur point de vue) un temps T' pour que les étoiles à la vitesse V passent devant eux, du Soleil à l'étoile voisine, les voyageurs en déduisent que la distance entre les astres est $L' = VT' = VT/\gamma = L/\gamma$. Cette distance L' est une distance impropre, puisqu'elle est mesurée dans un référentiel où les deux extrémités de la distance sont en mouvement.

7.2.2 Résultats

Encadré 7.3

- La **durée propre**, ou **temps propre**, entre deux événements est la durée mesurée dans un référentiel où les deux événements sont à la même position, et où la mesure est faite par une horloge qui est immobile à cette position.
- La durée entre deux événements dans tout autre référentiel est une **durée impropre**. Si γ est le facteur de Lorentz correspondant au passage entre ces deux référentiels, alors

$$(\text{durée impropre}) = \gamma (\text{durée propre}). \quad (7.7)$$

On a donc $(\text{durée impropre}) > (\text{durée propre})$; on parle de **dilatation de la durée** (sous entendu : par rapport à la durée propre).

- La **longueur propre** d'un objet rigide (une règle, un train, l'écartement entre deux étoiles fixes) est la longueur de l'objet mesurée dans le référentiel où il est immobile.
- La longueur d'un objet mesurée dans un référentiel où il est en mouvement est une **longueur impropre**. Si l'objet est en mouvement dans l'axe de sa longueur et si γ est le facteur de Lorentz correspondant au passage entre ces deux référentiels, alors

$$(\text{longueur impropre}) = \frac{1}{\gamma} (\text{longueur propre}). \quad (7.8)$$

On a donc $(\text{longueur impropre}) < (\text{longueur propre})$; on parle de **contraction des longueurs** (sous entendu : par rapport au longueurs propres).

La relation entre durées propres et impropres se démontre facilement : Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$. On considère deux événements E_1 et E_2 tels que, dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les événements ont lieu au même endroit :

$$E_1^{\mathcal{R}'}(x', t'_1), \quad E_2^{\mathcal{R}'}(x', t'_2) \quad (\text{c'est le même } x' \text{ pour } E_1^{\mathcal{R}'} \text{ et } E_2^{\mathcal{R}'}). \quad (7.9)$$

Le temps $\tau' = t'_2 - t'_1$ est la durée propre entre les deux événements.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, les dates t_1 et t_2 des deux événements sont, en utilisant les transformations de Lorentz,

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{Vx'}{c^2} \right), \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{Vx'}{c^2} \right). \quad (7.10)$$

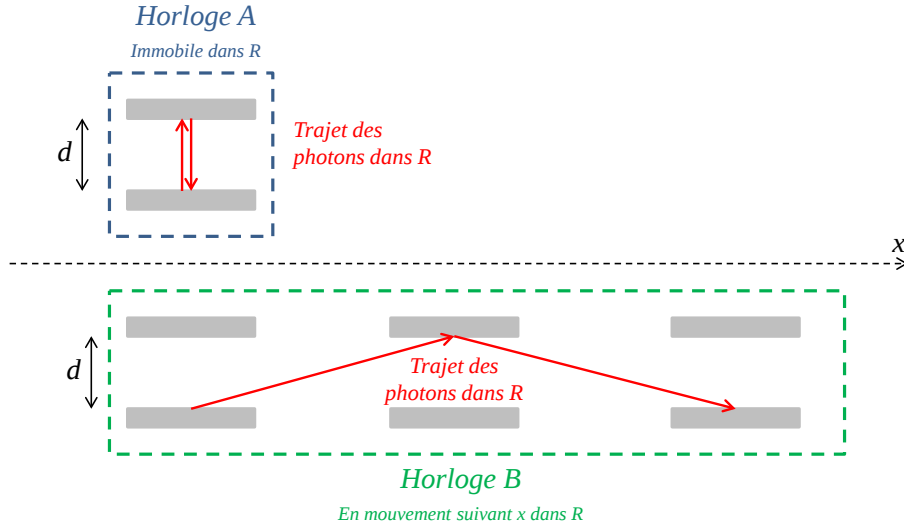
(Attention au signe : la vitesse de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ est $-V\vec{u}_x$.) La durée impropre τ entre les deux événements est donc

$$\tau = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\tau', \quad (7.11)$$

comme annoncé dans (7.7). La relation (7.8) est expliquée dans l'exemple 7.4 ci-dessous.

Exemple 7.3 : Pour mieux comprendre pourquoi le temps s'écoule de manière différente entre deux référentiels, on peut considérer l'exemple suivant où l'on prend deux horloges, l'une immobile et l'autre en mouvement à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. Appelons A l'horloge immobile et B l'horloge en mouvement. On note $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à l'horloge en mouvement.

On va supposer que ce sont des horloges un peu particulières : il s'agit de deux miroirs parallèles espacés d'une distance d , et entre lesquels un photon fait, dans le référentiel lié à l'horloge, des allers-retours dans une direction orthogonale à $\vec{V}$. Les durées sont alors mesurées par le nombre d'allers-retours que fait le photon.



Pour un observateur fixe dans $\mathcal{R}$, le temps d'un aller-retour pour l'horloge A (fixe dans $\mathcal{R}$) est $\tau_A = \frac{2d}{c}$. Pour l'horloge B , les miroirs étant en déplacement constant dans $\mathcal{R}$, le photon doit parcourir une distance d_B plus grande que d dans $\mathcal{R}$. Or, sa vitesse est toujours c ; l'observateur dans $\mathcal{R}$ mesure alors un temps caractéristique sur l'horloge B (en mouvement dans $\mathcal{R}$) $\tau_B = \frac{2d_B}{c} > \tau_A$.

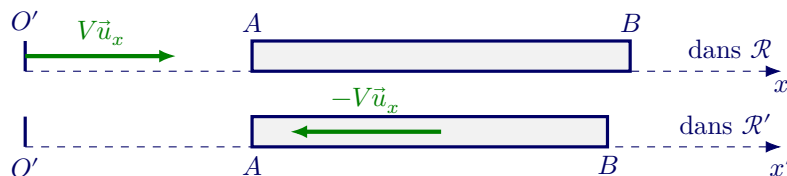
Les deux horloges sont identiques, et le problème est symétrique ; si maintenant on considère un observateur fixe dans $\mathcal{R}'$, cet observateur doit mesurer dans ce référentiel des temps caractéristiques τ'_A et τ'_B tels que $\tau'_B = \tau_A$ (temps d'une horloge immobile dans le référentiel de mesure) et $\tau'_A = \tau_B$ (temps d'une horloge en mouvement). On a donc simultanément $\tau_B > \tau_A$ et $\tau'_A > \tau'_B$! La durée mesurée par une horloge au repos dans le référentiel de mesure est toujours inférieure à celle donnée par une horloge en mouvement. Si on mesure le temps en comptant une succession de durées égales (principe de l'horloge), alors le temps s'écoule plus lentement dans le référentiel où l'horloge est en mouvement que dans le référentiel où l'horloge est au repos.

La **durée propre** d'un aller-retour de photon est la durée mesurée dans le référentiel où l'horloge est au repos ; il s'agit donc de la durée τ_A pour l'horloge A (mesurée dans $\mathcal{R}$) ou τ'_B pour l'horloge B (mesurée dans $\mathcal{R}'$) : durée propre = $\tau_A = \tau'_B$. L'autre durée, $\tau'_A = \tau_B$, mesurée pour chaque horloge dans le référentiel où elle est en mouvement, est la durée impropre. On retrouve bien (durée impropre) $>$ (durée propre).

On peut retrouver facilement dans cet exemple la relation (7.7) par un calcul direct du temps de trajet du photon dans l'horloge en mouvement ; à faire en exercice.

Exemple 7.4 : Dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, il est facile de mesurer la longueur selon x d'un objet immobile : on mesure la position x_A de l'extrémité gauche, la position x_B de l'extrémité droite, et la longueur est $L = x_B - x_A$. Une manière pratique d'effectuer ces mesures est d'utiliser, tout simplement une règle. Cette longueur L mesurée dans le référentiel où l'objet est au repos est la **longueur propre** de l'objet.

Mesurer la longueur d'un objet en mouvement est plus délicate à formaliser. Considérons donc un référentiel $\mathcal{R}'$ de vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, notre objet a une vitesse $-V\vec{u}_x$.



On place un observateur immobile dans $\mathcal{R}'$, à l'origine O' de ce référentiel. Cet observateur voit passer devant lui le point A de l'objet à l'instant t'_A et le point B à l'instant t'_B . Le temps de passage $\tau' = t'_B - t'_A$ est le temps propre, puisqu'il est mesuré par un observateur immobile. Cet observateur, qui a vu que l'objet mettait un temps τ' à passer devant lui à la vitesse V , conclut que la longueur de l'objet est $L' = V\tau'$.

Un autre observateur, immobile dans $\mathcal{R}$, observe la scène. Il voit le point O' (qui, de son point de vue, se déplace vers la droite à la vitesse V) passer devant les extrémités A et B de l'objet aux temps t_A et t_B . Le temps $\tau = t_B - t_A$ que met le point O' à passer devant l'objet est un temps impropre (les événements « O' passe devant A » et « O' passe devant B » n'ont pas lieu dans $\mathcal{R}$ au même endroit). L'observateur dans $\mathcal{R}$ conclut que l'objet a une longueur $L = V\tau$.

Les deux observateurs en $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ont donc respectivement trouvé des longueurs L et L' données par

$$L = V\tau, \quad L' = V\tau'. \quad (7.12)$$

On rappelle que τ' est la durée propre entre les événements « O' passe devant A » et « O' passe devant B », et que τ est la durée impropre entre les mêmes événements. On a donc

$$\tau = \gamma\tau', \quad \text{ce qui implique} \quad L' = \frac{1}{\gamma}L. \quad (7.13)$$

Dans cet exemple, L est la longueur propre et L' la longueur impropre. On a bien retrouvé le résultat annoncé dans (7.8).

Pour l'instant, nous n'avons raisonné que sur des longueurs qui étaient mesurées uniquement selon la coordonnées x , qui est parallèle à la vitesse $\vec{V}$ entre les deux référentiels étudiés. Si on généralise à trois dimensions d'espace, la longueur propre d'un objet quelconque s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}(x, y, z, t)$ où il est immobile :

$$L_{\text{propre}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (7.14)$$

Dans tout autre référentiel $\mathcal{R}'(x', y', z', t')$ en mouvement suivant x par rapport à $\mathcal{R}$, seul les coordonnées de la longueur suivant x est modifiée. On appliquera donc la contraction des longueurs seulement à Δx . La même longueur mesurée dans $\mathcal{R}'$ est donc :

$$L_{\text{impropre}} = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\gamma}\right)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (7.15)$$

7.3 Intervalle d'espace-temps Δs

7.3.1 Invariant relativiste Δs^2

En mécanique newtonienne, la durée séparant deux événements ou la longueur d'un objet sont invariantes par changement de référentiel. Nous venons de voir que cela n'est plus vraie en relativité restreinte.

Nous nous posons donc la question suivante : existe-t-il une quantité impliquant les coordonnées spatio-temporelles (coordonnées d'espace-temps) de deux événements E_1 et E_2 qui soit invariante dans le cadre de la relativité restreinte, c'est-à-dire invariante par transformations de Lorentz ? Nous allons voir qu'une telle quantité existe.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels d'inertie en mouvement relatif avec la vitesse V constante suivant x . Dans $\mathcal{R}$ on note (x_1, t_1) les coordonnées de E_1 et (x_2, t_2) les coordonnées de E_2 . (x'_1, t'_1) et (x'_2, t'_2) sont donc les coordonnées dans $\mathcal{R}'$.

On calcule $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ et $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ en fonction de $\Delta t = t_2 - t_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - Vt_2) - \gamma(x_1 - Vt_1) = \gamma(\Delta x - V\Delta t) \quad (7.16)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left[\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right) - \left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right)\right] = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) \quad (7.17)$$

On peut faire apparaître c afin d'obtenir des relations similaires :

$$\Delta x' = \gamma \left(\Delta x - \frac{V}{c} c \Delta t \right) \quad c \Delta t' = \gamma \left(c \Delta t - \frac{V}{c} \Delta x \right) \quad (7.18)$$

Si on combine $\Delta x'^2$ et $c^2 \Delta t'^2$, on peut faire apparaître le facteur γ^2 :

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 &= \gamma^2 \left(c^2 \Delta t^2 + \frac{V^2}{c^2} \Delta x^2 - 2 \Delta x \frac{V}{c} c \Delta t - \Delta x^2 - \frac{V^2}{c^2} c^2 \Delta t^2 + 2 c \Delta t \frac{V}{c} \Delta x \right), \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2), \\ &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Cette quantité, calculée dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$, conduit donc au même résultat. (Concrètement, si on mesure dans $\mathcal{R}$ l'intervalle spatio-temporel Δs^2 et qu'il vaut -8 m^2 , alors sa mesure dans $\mathcal{R}'$ donnera aussi $\Delta s'^2 = -8 \text{ m}^2$.) En généralisant à trois dimensions d'espace :

Encadré 7.4

Soient deux événements $E_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $E_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$. On note $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, etc. On définit

$$\Delta s^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (7.20)$$

Cette quantité s'appelle le **carré de l'intervalle spatio-temporel** ou **carré de l'intervalle d'espace-temps** entre les deux événements E_1 et E_2 .

Le carré de l'intervalle spatio-temporel Δs^2 est un **invariant relativiste**. Cela signifie que sa valeur est indépendante du référentiel galiléen choisi pour la calculer.

Remarque 1 : étrangement, Δs^2 peut être positif, nul ou négatif... Quand il n'est pas négatif, on notera $\Delta s = \sqrt{\Delta s^2}$ l'intervalle spatio-temporel.

Remarque 2 : si les événements E_1 et E_2 sont infiniment proches, c'est-à-dire si $t_2 = t_1 + dt$, $x_2 = x_1 + dx$, etc., alors le carré de l'intervalle spatio-temporel est infiniment petit et s'écrit $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

7.3.2 Signe de Δs^2 et causalité

Le carré de l'intervalle spatio-temporel est un invariant relativiste : tout raisonnement fondé sur la valeur de cet invariant est donc valide quelque soit le référentiel. On verra dans la suite que, pour comparer deux événements E_1 et E_2 , on peut se baser sur le signe du Δs^2 qui les sépare.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on s'intéresse à des événements ayant une seule coordonnée spatiale x et on considère la quantité :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (7.21)$$

Si $\Delta s^2 < 0$

Dans ce cas, c'est la partie spatiale du carré de l'intervalle Δx^2 qui donne le signe à l'expression : **on parle d'intervalle de type « espace »**.

Les événements E_1 et E_2 ne peuvent pas être reliés par lien de « cause à effet ». En effet, l'information voyageant entre les deux événements devrait se propager à la vitesse moyenne $v = \Delta x / \Delta t$. Comme $\Delta s^2 < 0$, cela implique que $v > c$, ce qui est interdit par les postulats de la relativité restreinte. Ainsi, aucune information ne peut être échangée entre les événements E_1 et E_2 et **les deux événements ne peuvent pas être reliés par des relations de cause à effet**.

Δt^2 peut être nul dans ce type d'intervalle. Ainsi, on peut trouver un référentiel où les événements E_1 et E_2 sont simultanés. On peut de même intervertir l'ordre temporel entre E_1 et E_2 par changement de référentiel. Δx^2 , par contre, ne peut pas être nul dans le cas $\Delta s^2 < 0$: il n'existe pas de référentiel d'inertie où les deux événements E_1 et E_2 ont lieu au même endroit.

Si $\Delta s^2 > 0$

Cette fois, c'est la partie temporelle du carré de l'intervalle Δt^2 qui impose le signe de Δs^2 .

On parle d'intervalle de type « temps ».

Δx^2 peut être nul dans ce type d'intervalle. Ainsi, on peut trouver un référentiel où les événements E_1 et E_2 ont lieu au même endroit. Δt^2 , par contre, ne peut pas être nul dans ce type d'intervalle : il n'existe aucun référentiel dans lequel les deux événements sont simultanés.

Montrons maintenant qu'il est impossible de trouver un référentiel d'inertie qui inverse l'ordre temporel de E_1 et E_2 . On a vu qu'il existait un référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel $\Delta x=0$ (avec $\Delta t \neq 0$). Dans n'importe quel référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, on peut écrire $\Delta t'$ l'intervalle temporel entre les deux événements, en fonction de Δt grâce aux transformations de Lorentz :

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t. \quad (7.22)$$

Or ici, $\gamma > 1$, donc, quelque soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, le signe de Δt est le même que celui de $\Delta t'$: on voit bien que les changements de référentiel ne peuvent pas, dans le cas $\Delta s^2 > 0$, modifier l'ordre temporel entre les événements E_1 et E_2 .

Dire que les événements E_1 et E_2 peuvent être reliés par relation de cause à effet dans ce cas revient à estimer, comme précédemment, quelle vitesse moyenne v devrait avoir une information pour passer de E_1 à E_2 . Dans le cas où $\Delta s^2 > 0$:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c \quad (7.23)$$

Ceci est évidemment autorisé par la relativité restreinte : **les deux événements séparés par un intervalle $\Delta s^2 > 0$ peuvent être reliés par cause à effet.** Mais, comme on ne peut en aucune façon trouver un référentiel dans lequel l'ordre temporel entre E_1 et E_2 s'inverse, alors, on ne peut dans le cadre de la relativité restreinte se retrouver dans des cas de paradoxe où la cause aurait lieu après la conséquence.

Si $\Delta s^2 = 0$

Le cas limite où $\Delta s^2 = 0$ correspond à deux événements qui pourraient être reliés uniquement par une information voyageant à la vitesse $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$, c'est-à-dire par un signal lumineux. **On parle donc d'intervalle de type « lumière ».**

En résumé :

Encadré 7.5

Soit E_1 et E_2 deux événements différents et Δs^2 le carré de l'intervalle spatio-temporel entre ces deux événements.

- Si $\Delta s^2 < 0$, l'intervalle entre E_1 et E_2 est de **type espace**. On peut trouver un référentiel où les deux événements se passent en même temps à des endroits différents. Il est impossible d'envoyer un signal entre E_1 et E_2 ; ces événements ne peuvent pas être reliés par une relation de cause à effet, et l'ordre temporel dans lequel les événements arrivent dépend du référentiel choisi.
- Si $\Delta s^2 > 0$, l'intervalle entre E_1 et E_2 est de **type temps**. On peut trouver un référentiel où les deux événements se passent au même endroit à des instants différents. Il est possible d'envoyer un signal entre E_1 et E_2 ; ces événements peuvent être reliés par une relation de cause à effet, et l'ordre temporel dans lequel les événements arrivent est indépendant du référentiel choisi.
- Si $\Delta s^2 = 0$, l'intervalle entre E_1 et E_2 est de **type lumière**. Il n'existe aucun référentiel où les événements sont au même endroit ou au même instant. Seul un signal lumineux peut transmettre une information entre E_1 et E_2 ; ces événements peuvent être reliés par une relation de cause à effet, et l'ordre temporel dans lequel les événements arrivent est indépendant du référentiel choisi.

7.3.3 Cônes de lumière

Choisissons, dans un référentiel $\mathcal{R}$ particulier, un événement E_0 quelconque. On peut alors délimiter des zones de l'espace-temps pouvant contenir tous les événements $E(x, y, z, t)$ susceptibles d'influencer ou d'être influencé par E_0 (zone où $\Delta s^2 > 0$) et une zone où l'ensemble des événements E ne peut influencer ou être influencé par l'événement E_0 (zone où $\Delta s^2 < 0$). Ces zones d'espace-temps sont alors délimitées par les lignes de lumières, c'est-à-dire les lignes correspondantes à $\Delta s^2 = 0$.

Pour simplifier la représentation, on va fixer E_0 comme l'origine du référentiel ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$ et $t_0 = 0$). Si on ne considère qu'une seule dimension d'espace x , dans un espace (x, t) , les lignes de lumières auront l'équation :

$$\Delta s^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 = 0 \quad (7.24)$$

Mais on a supposé $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$, et on obtient donc $x^2 = c^2 t^2$ qui se simplifie en

$$x = \pm ct. \quad (7.25)$$

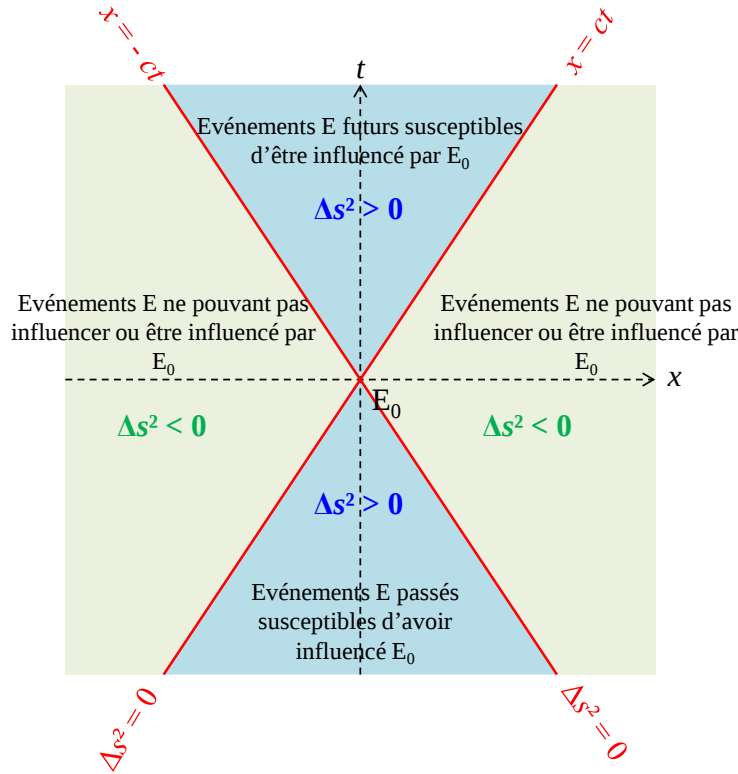


FIGURE 7.1 – Cône de lumière à une dimension d'espace

On obtient alors la figure 7.1. On a ainsi fait apparaître deux zones $\Delta s^2 > 0$, une vers les t positifs et une vers les t négatifs. Ces zones sont appelées « cône de lumière futur » et « cône de lumière passé » de l'événement E_0 , et contiennent l'ensemble des événement pouvant être influencé par E_0 ou pouvant influencer E_0 .

L'appellation « cône » se justifie dans le cas où on ajoute des dimensions d'espace. À deux dimensions d'espace, les zones limitrophes $\Delta s^2 = 0$ sont définies dans l'espace (x, y, t) par :

$$c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad ct = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.26)$$

On reconnaît ici l'équation d'un cône. Une représentation graphique des cônes de lumière passé et futur est donc possible dans l'espace (x, y, t) .

À trois dimensions d'espace, il n'est plus possible de représenter les cônes de lumière : cela nécessiterait une représentation à quatre dimensions (x, y, z, t) . On parle cependant toujours, un peu abusivement, de « cône ».

Chapitre 8

Transformation des vitesses et effet Doppler

8.1 Composition des vitesses

On a vu dans le chapitre 6 que la loi de composition des vitesses issues des transformations de Galilée n'est pas acceptable car elle ne respecte pas l'invariance de c par changement de référentiel. Nous allons maintenant établir les lois relativistes de composition des vitesses par changement de référentiel d'inertie à l'aide des transformations de Lorentz.

Considérons deux référentiels galiléens, toujours dans la même configuration : un référentiel $\mathcal{R}$ muni du repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et un référentiel $\mathcal{R}'$ muni du repère $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, tel que $\mathcal{R}'$ est animé d'une vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. On choisit O' et les origines des temps de manière à ce que $O = O'$ à $t = 0$ dans $\mathcal{R}$ et à $t' = 0$ dans $\mathcal{R}'$.

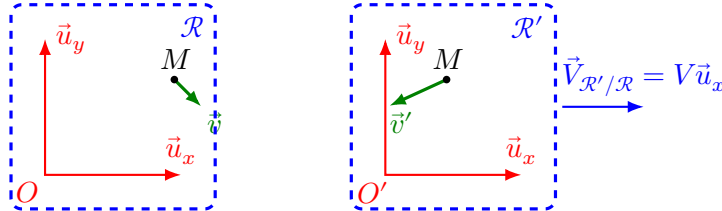


FIGURE 8.1 – Dessin dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ du point M et de son vecteur vitesse.

Soit un point $M(x, y, z)$ animé d'une vitesse $\vec{v}$ quelconque dans $\mathcal{R}$. On cherche à exprimer sa vitesse $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$ grâce aux transformations de Lorentz.

On considère deux événements infiniment proches le long de la trajectoire de M , dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement (x, y, z, t) et $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$. Les composantes dans $\mathcal{R}$ de la vitesse $\vec{v}$ du mobile M à l'instant t sont alors, par définition,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8.1)$$

On considère les mêmes événements dans $\mathcal{R}'$, et on note naturellement leurs coordonnées (x', y', z', t') et $(x' + dx', y' + dy', z' + dz', t' + dt')$. Les composantes de la vitesse $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$ sont alors

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (8.2)$$

La transformation de Lorentz permet de passer de (x, y, z, t) à (x', y', z', t') et de $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ à $(x'+dx', y'+dy', z'+dz', t'+dt')$. Par linéarité, elle permet donc de passer

de (dx, dy, dz, dt) à (dx', dy', dz', dt') :

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right), \quad dx' = \gamma (dx - V dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz. \quad (8.3)$$

On reporte dans (8.2), d'abord pour v'_x :

$$v'_x = \frac{\gamma(dx - V dt)}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2} dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \times \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \quad (8.4)$$

puis pour v_y (v_z est similaire) :

$$v'_y = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2} dx)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2} \times \frac{dx}{dt})} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{V v_x}{c^2})} \quad (8.5)$$

Encadré 8.1 : Composition des vitesses

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$. On considère un point M de vitesse $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$ dans $\mathcal{R}$. Sa vitesse dans $\mathcal{R}'$ est alors $\vec{v} = v'_x \vec{u}_x + v'_y \vec{u}_y + v'_z \vec{u}_z$ avec

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{V v_x}{c^2})}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{V v_x}{c^2})}. \quad (8.6)$$

Remarque 1 : Attention, la formule pour v'_x est assez différente des deux autres : soustraction au numérateur, pas de γ au dénominateur.

Remarque 2 : Il ne faut pas confondre ici V qui est la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, et v_x, v_y et v_z qui sont les coordonnées de la vitesse du point M dans $\mathcal{R}$.

Vérifions sur un exemple que ces transformations laissent bien c invariante. Supposons que le point M se déplace à la vitesse $\vec{v} = c \vec{u}_x$ dans le référentiel $\mathcal{R}$; alors, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ allant à $\vec{V} = V\vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$, sa vitesse $\vec{v}'$ a pour composantes

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = c \frac{1 - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} = c, \quad , \quad v'_y = v'_z = 0 \quad (8.7)$$

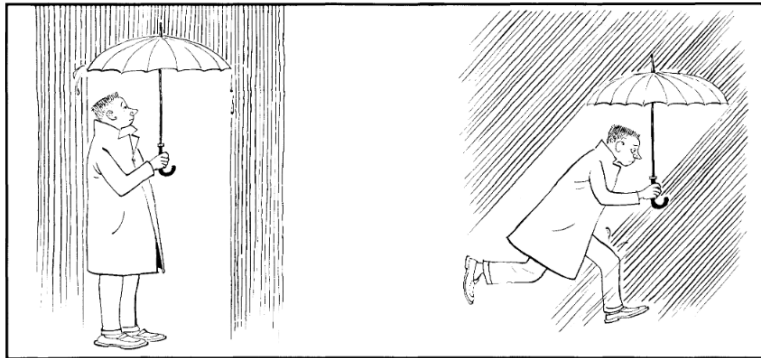


FIGURE 8.2 – Figure issue de *Berkeley Physics Course vol.1 : Mechanics* (Kittel/Knight/Ruderman). Légende originale (in english of course) : A homely example of aberration. This student is caught in rain coming straight down. If he stands still under his umbrella, he keeps dry. But If he runs for it... he gets wet. In his new reference frame the rain has horizontal velocity $-\mathbf{v}$, where $\mathbf{v}$ is his velocity with respect to the ground.

8.2 Aberrations — Transformations des angles

La loi de composition des vitesses permet de déterminer simplement la loi de transformations des angles en passant de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$. Ce phénomène connu sous le nom d'aberrations est très bien illustré par la figure 8.2 issue du cours de physique de Berkeley. Un homme au repos sous son parapluie n'est pas mouillé par la pluie qui tombe selon l'axe de son parapluie. Il se met en mouvement et se mouille. Dans le référentiel lié à l'homme, la pluie a maintenant une composante horizontale de vitesse non nulle et l'angle sous lequel la pluie arrive est changé.

8.2.1 Formule générale

Nous allons considérer le cas suivant. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ on émet depuis l'origine des coordonnées un signal qui se propage avec le vecteur vitesse $\vec{v}$ faisant un angle θ avec l'axe (Ox), voir figure 8.3. On cherche à déterminer l'angle θ' que fait le vecteur $\vec{v}'$ avec l'axe (Ox') dans le référentiel $\mathcal{R}'$ qui est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ avec la vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$.

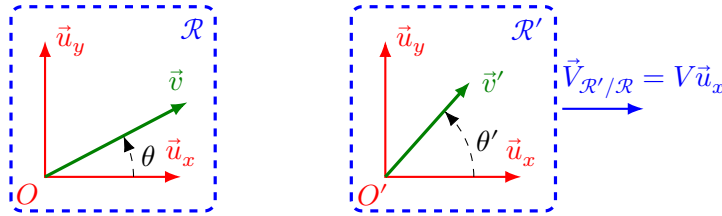


FIGURE 8.3 – Notations pour le calcul des formules de transformations des angles

Dans $\mathcal{R}$, on a :

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad (8.8)$$

et dans $\mathcal{R}'$

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} \quad (8.9)$$

En appliquant la loi de composition des vitesses on trouve :

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \frac{(1 - v_x V/c^2)}{v_x - V} = \frac{v_y}{\gamma v_x (1 - V/v_x)}. \quad (8.10)$$

En remarquant que $\frac{v_y}{v_x} = \tan \theta$ et que $v_x = v \cos \theta$, on arrive à une formule des transformation des angles :

$$\tan \theta' = \frac{\tan \theta}{\gamma(1 - \frac{V}{v \cos \theta})} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \frac{V}{v})}. \quad (8.11)$$

En exercice, vous pouvez montrer que les transformations de Galilée mènent à une formule de transformation des angles (incorrecte) qui diffère de l'expression (8.11) par l'absence du facteur γ .

8.2.2 Aberrations optiques

Un cas d'intérêt particulier est celui où le signal émis en O est un signal lumineux. Dans ce cas, $v = c$ et en notant $\beta = V/c$, on arrive à la formule de transformations des angles pour les signaux lumineux (aberrations *optiques*) :

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)}. \quad (8.12)$$

Cette formule peut s'écrire également sous la forme

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (8.13)$$

(Pour une aberration optique uniquement. On obtient ces expressions en écrivant $v'_x = c \cos \theta'$, $v'_y = c \sin \theta'$ et $v_x = c \cos \theta$, $v_y = c \sin \theta$ directement dans (8.6).)

Sur la partie gauche de la figure 8.4 sont représentées les angles θ' en fonction des angles θ pour $\beta = 0,9$. On voit que pour des angles $0 < \theta < \pi$, les angles θ' se rapprochent de π .

Dans le cas où $\beta \rightarrow 1$, quelles que soient les directions d'émission des rayons lumineux dans $\mathcal{R}$ (à part $\theta = 0$), un observateur dans $\mathcal{R}'$ voit les rayons se propager au voisinage de la direction $-\vec{u}_x$, voir partie droite de la figure. Autrement dit, les rayons arrivent de face.

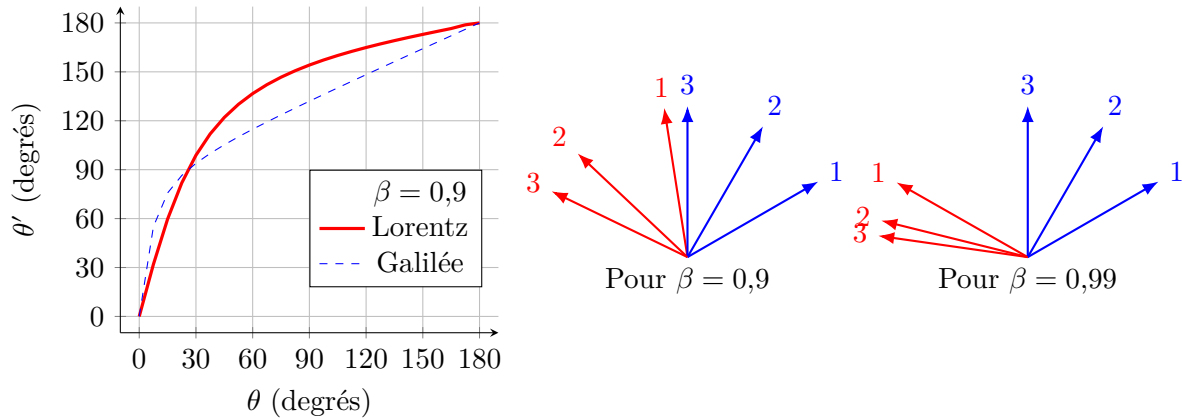


FIGURE 8.4 – Partie gauche : $\theta' = f(\theta)$ pour $\beta = 0,9$. Traits pleins : résultat (correct) obtenu à partir des transformations de Lorentz. Traits pointillés : résultat (incorrect) donné par les transformations de Galilée. Partie droite : Pour deux valeurs de β proches de 1, pour des rayons émis à 30° , 60° et 90° dans $\mathcal{R}$ (en bleu), la direction des rayons dans $\mathcal{R}'$ (en rouge) se concentrent dans la direction $-\vec{u}_x$.

En particulier, un observateur dans vaisseau spatial en direction des étoiles lointaines qui accélère soudainement dans la direction des étoiles les verra se concentrer vers l'avant du faisceau et certainement pas fuir vers l'arrière.

8.3 Effet Doppler

Si la source d'un signal périodique et l'observateur de ce signal sont en mouvement relatif, la fréquence du signal observé est différente de la fréquence du signal émis. Ce phénomène appelé « effet Doppler » est observé dans la vie de tous les jours. Par exemple, un observateur sur le bord de la route perçoit le son de la sirène d'une ambulance qui s'approche de lui comme plus aigu que le son entendu par le conducteur de l'ambulance.

Nous voulons déterminer la relation existant entre les fréquences émises et observées dans le cadre de la relativité restreinte.

Pour cela, nous considérons nos deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ avec $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$ avec V une constante positive. On choisit l'origine des temps t et t' telle que, à $t = t' = 0$, les origines des coordonnées des deux référentiels soient confondues.

8.3.1 Effet Doppler sonore

Intéressons-nous tout d'abord à un effet Doppler sonore. Nous ne traiterons que de l'effet Doppler longitudinal (ou colinéaire), c'est-à-dire lorsque la direction de propagation du signal périodique coïncide avec la direction du vecteur vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$.

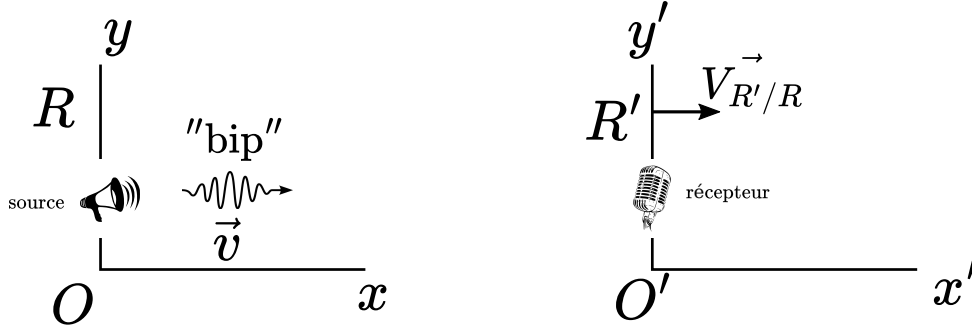


FIGURE 8.5 – Notations pour le calcul transformations des fréquences : effet Doppler

Une source sonore (une langue, un haut parleur) est fixe dans $\mathcal{R}$ en O et un détecteur sonore (une oreille, un microphone) est fixe dans $\mathcal{R}'$ en O' .

On considère les événements suivants :

- E_0** : la source (en $x = 0$) émet un « bip » sonore vers les x positifs à $t = 0$. Les coordonnées de E_0 dans $\mathcal{R}$ sont $(x_0 = 0, t_0 = 0)$.
- E_1** : le récepteur (en $x' = 0$) reçoit le premier « bip » émis par la source. Mais à $t = 0$ le récepteur est au niveau de la source car $x_O = x_{O'}$ et donc il reçoit instantanément ce premier « bip ». Les coordonnées de E_1 dans $\mathcal{R}$ sont $(x_1 = 0, t_1 = 0)$; en fait, E_0 et E_1 sont le même événement.
- E_2** : la source (en $x = 0$) émet un second « bip » sonore vers les x positifs à $t = T$. Les coordonnées de E_2 dans $\mathcal{R}$ sont $(x_2 = 0, t_2 = T)$.
- E_3** : le récepteur (en $x' = 0$) reçoit le second « bip » émis par la source. On note (x_3, t_3) les coordonnées de E_3 dans $\mathcal{R}$ qu'on cherche à déterminer.

Pour déterminer les coordonnées de E_3 , on notera v la vitesse de propagation du signal (ici du son dans un milieu, l'air par exemple). On fait l'hypothèse que l'air est au repos dans $\mathcal{R}$ et que $v > V$ ^{*1}.

Le deuxième bip sonore part de la source à $t = T$ et se propage vers les x à la vitesse v . Son équation de propagation dans $\mathcal{R}$ est donc :

$$x_{\text{bip}}(t) = v(t - T) \quad (8.14)$$

L'équation de propagation dans $\mathcal{R}$ du récepteur fixe en O' est :

$$x_{\text{rec}}(t) = Vt. \quad (8.15)$$

Pour déterminer t_3 , il suffit de résoudre l'équation $x_{\text{bip}}(t_3) = x_{\text{rec}}(t_3)$. Puis x_3 suit immédiatement car $x_3 = Vt_3$. On trouve :

$$t_3 = T \frac{v}{v - V} \quad \text{et} \quad x_3 = VT \frac{v}{v - V} \quad (8.16)$$

t_3 est le temps auquel arrive le deuxième bip dans $\mathcal{R}$. Calculons t'_3 , le temps auquel arrive le deuxième bip dans $\mathcal{R}'$, pour un observateur fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$t'_3 = \gamma(t_3 - Vx_3/c^2) = \gamma(t_3 - VVt_3/c^2) = t_3/\gamma, \quad (8.17)$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$.

1. Que la vitesse de translation du référentiel soit supérieure à celle de la propagation du signal ($V > v$) est une possibilité pour le son dans un milieu (choc supersonique des avions supersoniques) mais pas pour la lumière dans le vide.

Le premier bip est reçu par le récepteur en O' à $t'_1 = t'_0 = 0$. La durée qui sépare la réception des deux bips en O' est donc :

$$T' = t'_3 - t'_1 = t_3/\gamma - 0 = \frac{1}{\gamma} T \frac{v}{v - V} \quad (8.18)$$

T est la période du signal émis dans $\mathcal{R}$. T' est la période du signal détecté dans $\mathcal{R}'$. On passe aux fréquences ; $f = 1/T$ est la fréquence du signal émis, $f' = 1/T'$ étant la fréquence du signal détecté. On trouve donc que les fréquences émises et reçues sont liées par la relation :

$$f' = \gamma f \frac{v - V}{v} = f \gamma \left(1 - \frac{V}{v}\right). \quad (8.19)$$

Cette relation entre la fréquence sonore perçue par l'observateur f' et celle émise par la source f correspond au cas où le récepteur sonore est en mouvement par rapport au milieu de propagation et la source fixe. On laissera à l'étudiant consciencieux le soin de déterminer la formule pour l'effet Doppler sonore dans le cas où la source est en mouvement par rapport au milieu et le récepteur fixe.

8.3.2 Effet Doppler optique

Le bip périodique émis par la source peut être lumineux et non sonore. Par exemple, une source fixe dans $\mathcal{R}$ émet à fréquence f un flash lumineux. Le signal se propage alors à la vitesse $v = c$ et contrairement au cas sonore, *il peut se propager dans le vide*.

Déterminons donc l'effet Doppler dans ce cas d'un signal lumineux se propageant dans le vide.

On repart de l'expression (8.19), valable pour n'importe quel vitesse v , et on remplace v par c . On trouve que la fréquence lumineuse f' perçue par le récepteur est liée à la fréquence lumineuse f émise par la source par la relation

$$f' = f \gamma \left(1 - \frac{V}{c}\right) = f \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (8.20)$$

où $\beta = V/c$.

Cette formule (8.20) a été établie dans le cas où **la source lumineuse est fixe et le récepteur s'éloigne** à la vitesse $V = \beta c$, c'est-à-dire, au choix : a) le récepteur est à droite de la source et a une vitesse $V \vec{u}_x$ ou b) le récepteur est à gauche de la source et a une vitesse $-V \vec{u}_x$.

Dans ce cas, la fréquence perçue par le récepteur est inférieure à celle émise par la source : $f' < f$. Si le signal lumineux est celle d'une onde électromagnétique monochromatique, alors les fréquences f et f' sont reliées aux longueurs d'onde émise λ et reçue λ' par $\lambda = c/f$ et $\lambda' = c/f'$. On en déduit l'expression de l'effet Doppler sur les longueurs d'onde.

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (8.21)$$

On vérifie que si c'est le récepteur qui est fixe et que la source s'éloigne à la vitesse V , le résultat reste inchangé.

Si maintenant source et récepteur se rapprochent, l'un étant fixe et l'autre ayant une vitesse $V = \beta c$, alors il suffit de changer le signe de β dans (8.20) et (8.21). Dans ce cas, $f' > f$ et $\lambda' < \lambda$.

En résumé :

Encadré 8.2 : Effet Doppler optique

On considère une source et un récepteur qui s'éloignent ou se rapprochent, l'un étant fixe et l'autre ayant une vitesse de norme $V = \beta c$. On suppose que la source émet un signal périodique se propageant à la vitesse de la lumière c , et on note f la fréquence du signal émis par la source, et f' la fréquence du signal reçu par le récepteur. Alors

$$\begin{cases} f' = f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} & \text{si source et récepteur se rapprochent,} \\ f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} & \text{si source et récepteur s'éloignent.} \end{cases} \quad (8.22)$$

En particulier, si la source émet une lumière de longueur d'onde λ , alors le récepteur reçoit une lumière de longueur d'onde λ' avec

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} & \text{si source et récepteur se rapprochent,} \\ \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} & \text{si source et récepteur s'éloignent.} \end{cases} \quad (8.23)$$

Remarque 1 : pour ne pas se tromper sur les signes, on se souvient que les étoiles, qui s'éloignent, ont leur lumière décalée vers le rouge (*redshift*, voir la section suivante.) On a donc $\lambda' > \lambda$ dans le cas « source et récepteur s'éloignent », et on reconstitue les signes à mettre.

Remarque 2 : La lumière se propageant dans le vide et non dans un milieu comme les ondes sonores, il n'y a pas de différence, pour l'effet Doppler optique, entre les cas « source en mouvement » et « récepteur en mouvement ». Les deux configurations mènent au même résultat.

Remarque 3 : Imaginons maintenant que la source et le récepteur bouge tous les deux : la source a une vitesse $V_S \vec{u}_x = \beta_S c \vec{u}_x$ et le récepteur une vitesse $V_R \vec{u}_x = \beta_R c \vec{u}_x$. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la source, le récepteur a une vitesse $V \vec{u}_x$ avec $V = (V_R - V_S)/(1 - V_R V_S/c^2)$. En écrivant $V = \beta c$, on obtient $\beta = (\beta_R - \beta_S)/(1 - \beta_R \beta_S)$. Si on suppose que le récepteur est à droite de la source, alors, quel que soit le signe de β ,

$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta_R - \beta_S}{1 - \beta_R \beta_S}}{1 + \frac{\beta_R - \beta_S}{1 - \beta_R \beta_S}}} = f \sqrt{\frac{(1 - \beta_R)(1 + \beta_S)}{(1 + \beta_R)(1 - \beta_S)}}. \quad (8.24)$$

Si le récepteur est à gauche de la source, il faut inverser tous les signes devant les β .

8.3.3 Une application de l'effet Doppler optique : le *redshift* en astrophysique

Le décalage de fréquence entre le référentiel d'une source lumineuse et le référentiel de l'observateur est quelque chose de régulièrement rencontré en astrophysique. Beaucoup d'observations astronomiques ne consistent pas uniquement qu'à faire des images des objets (astres, galaxies, ...). La majorité du temps, la lumière qui nous parvient est analysée spectralement, c'est-à-dire que l'on analyse la structure en longueur d'onde (ou fréquence) du rayonnement observé (en d'autres mots on analyse les spectres de la lumière détectée). On constate alors que les longueurs d'onde associées à l'émission ou l'absorption d'éléments connus sont différentes de celle que l'on obtient en faisant le spectre expérimental de ces mêmes éléments en laboratoire.

Pour exprimer ce décalage de longueur d'onde, on utilise le ***redshift* Z** . Il est défini comme suit :

$$Z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{p}}}{\lambda_{\text{p}}}.$$

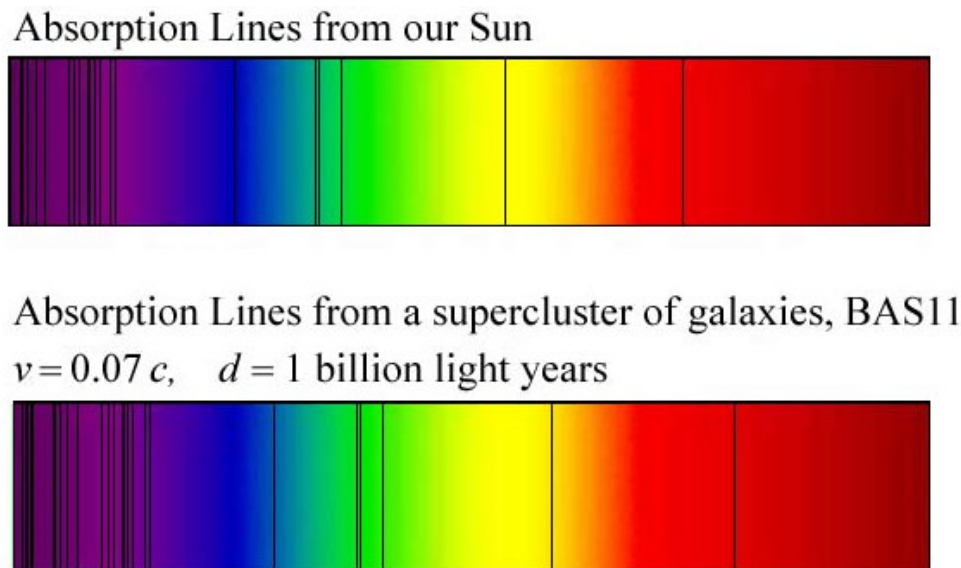


FIGURE 8.6 – Simulation du spectre d’absorption de notre soleil et d’un amas de galaxie lointaine. Toutes les raies d’absorption de l’amas de galaxie sont décalées vers le rouge par rapport à celle de notre étoile locale. L’amas de galaxie s’éloigne de nous. Image et simulation : Harold T. Stokes, Department of Physics and Astronomy, Brigham Young University, Utah, USA

où λ_{obs} est la longueur d’onde de la transition observée, et λ_p la longueur d’onde propre de cette même transition, c’est-à-dire mesurée dans un référentiel où la source est au repos. En pratique λ_p est déterminée en laboratoire par des mesures dites de spectroscopie.

- Si $Z > 0$, alors $\lambda_{\text{obs}} > \lambda_p$: le *redshift* positif se traduit donc par un décalage vers le rouge, correspondant à un éloignement entre source et récepteur.
- Si $Z < 0$, alors $\lambda_{\text{obs}} < \lambda_p$: le *redshift* négatif se traduit donc par un décalage vers le bleu, correspondant à un rapprochement entre source et récepteur.

Les *redshifts* observés peuvent être de différente origines, que nous allons maintenant passer en revue.

Le *redshift* dû à l’expansion de l’univers

Des observations conduisent à dire que l’univers observable est en expansion. Cela revient à dire que plus l’objet observé est lointain (donc vieux car la lumière a mis plus de temps à nous parvenir), et plus les longueurs d’onde qui nous parviennent sont décalées vers le rouge car, entre temps, nous nous sommes beaucoup éloigné de cet objet. On traduit cet effet d’expansion par la **loi empirique de Hubble** qui est une conséquence directe de la formule de l’effet Doppler :

$$Z = H_0 \frac{d}{c}$$

où d est la distance nous séparant de l’objet en question, et H_0 est un paramètre appelé « constante » de Hubble. Ce n’est en réalité pas une constante à proprement parlé car, comme l’expansion de l’univers s’accélère, la vitesse entre l’objet et la Terre évolue en fonction du temps, et donc la valeur de H_0 dépend de la vitesse d’expansion à un instant donné.

Quoi qu’il en soit, comme la distance entre l’objet observé et la Terre évolue en fonction du temps, **on observera les objets les plus anciens (donc les plus lointain) à des grands *redshifts* Z . L’expansion induit toujours des *redshift* positifs. La mesure de Z permet donc de dater les objets astrophysiques.**

Exemples de valeurs de *redshifts* :

- Plus ancien rayonnement détecté sur Terre : **le fond diffus cosmologique (ou Cosmic Microwave Background CMB)** : $Z \approx 1000$. Ce rayonnement date de l'époque où l'univers primordial (environ 380 000 ans après le bigbang), initialement ionisé (gaz d'électrons et de protons) devient principalement neutre (électrons liés aux protons), ce qui a conduit le rayonnement à pouvoir être émis librement dans toutes les directions de l'espace. Initialement, ce rayonnement était dans le domaine des rayons X, mais on l'observe maintenant dans le domaine micro-onde/centimétrique ($0,1 < \lambda_{\text{obs}} < 100 \text{ cm}$) à cause de l'expansion.
- Premières étoiles : on ne les détecte pas, mais les modèles cosmologiques prédisent un *redshift* de $Z \approx 30$.
- Plus vieilles galaxies détectées : on les observe avec un *redshift* $Z \approx 8$.

Le *redshift* cinétique

Ce *redshift* est directement dû au mouvement relatif des astres entre eux, et par rapport à la Terre. Il peut-être positif pour des objets s'éloignant, ou négatif pour des objets se rapprochant : c'est très exactement l'effet Doppler tel qu'il est décrit plus tôt dans ce chapitre.

Un très bon exemple est le *redshift* observé sur la lumière qui nous provient de la galaxie d'Andromède : on observe toujours un décalage vers le bleu ($Z < 0$) d'environ $Z \simeq -0,001$. Cette observation nous a conduit à déterminer qu'en effet la galaxie se rapproche de nous (à une vitesse de l'ordre de 300 km/s), et rentrera en collision avec la voie lactée d'ici quelques milliards d'années.

Souvent, ce *redshift* s'ajoute à celui dû à l'expansion. Ainsi, on peut observer le mouvement relatif, par exemple de gaz atomique chaud, dans une galaxie à haut *redshift*, en comparant le *redshift* des étoiles (« fixes ») et celui du gaz.

Le *redshift* gravitationnel

On ne s'étendra pas trop sur ce point qui relève purement de la relativité générale. Dans le cadre de cette théorie, on montre qu'une masse très importante induit également une dilatation des durées, et donc des fréquences. Cela se traduit également par un *redshift*, souvent observé pour les objets à proximité d'amas stellaires, galactique, ou de trous noirs (centre galactique, par exemple).

Chapitre 9

Énergie et quantité de mouvement

9.1 De nouvelles expressions pour E et $\vec{p}$

En mécanique newtonienne, la quantité de mouvement (ou impulsion) d'un corps est $\vec{p} = m\vec{v}$, et son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. En relativité restreinte, ces expressions doivent être changées : on va montrer dans ce chapitre que, pour respecter les principes de la relativité restreinte, on doit avoir les résultats suivants :

Encadré 9.1 : Énergie et impulsion relativistes

- L'impulsion $\vec{p}$ et l'énergie E d'un corps de masse m et de vitesse $\vec{v}$ sont données par

$$\vec{p} = \gamma_v m \vec{v}, \quad E = \gamma_v mc^2 \quad \text{avec} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.1)$$

- Ces formules impliquent la relation suivante

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (9.2)$$

- L'énergie se décompose en une énergie interne E_{int} et une énergie cinétique E_c :

$$E = E_{\text{int}} + E_c \quad \text{avec} \quad E_{\text{int}} = mc^2 \quad \text{et} \quad E_c = (\gamma_v - 1)mc^2. \quad (9.3)$$

- L'expression $E_{\text{int}} = mc^2$ signifie qu'il y a **équivalence entre masse et énergie interne**.
- Lors d'un choc, l'impulsion totale et l'énergie totale d'un système sont conservées. Si le choc est inélastique, l'énergie *cinétique* totale n'est pas conservée, donc l'énergie *interne* totale non plus, et donc *la masse totale des constituants du système n'est pas conservée*.
- Lorsqu'un système n'est pas isolé, sa quantité de mouvement totale varie. Par définition, la dérivée de la quantité de mouvement est la force totale extérieure $\vec{F}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d(\gamma_v \vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (9.4)$$

- Une particule de masse nulle, comme le photon, *doit* avoir une vitesse égale à c , sinon elle aurait une énergie nulle. La relation (9.2) devient

$$E = pc \quad (\text{pour une particule de masse nulle}). \quad (9.5)$$



- La vitesse v qui intervient dans γ_v est la vitesse de la particule dans le référentiel de travail ; ce n'est pas, comme dans le facteur de Lorentz γ , la vitesse d'un référentiel par rapport à un autre référentiel.
- La masse m d'un corps est indépendante de sa vitesse v .

Remarque : Certains vieux livres définissent parfois une masse au repos m_0 et une masse en mouvement $m_v = \gamma_v m_0$, ce qui permet d'écrire $\vec{p} = m_v \vec{v}$ et $E = m_v c^2$. Il est alors dit que la « masse » m_v augmente avec la vitesse. Dans ce cours, on utilise exclusivement l'approche moderne, où la masse m est indépendante de la vitesse. (C'est la masse au repos m_0 des vieux livres.)

On constate que la norme p de la quantité de mouvement et l'énergie cinétique E_c divergent lorsque la vitesse v tend vers c : il est difficile pour une particule massive d'avoir une vitesse v proche de c , et il est impossible que sa vitesse atteigne c , puisqu'elle aurait alors une énergie infinie. Lorsque $v \ll c$, on vérifie que l'on a bien $p \simeq mv$ et $E_c \simeq \frac{1}{2}mv^2$, voir la figure 9.1.

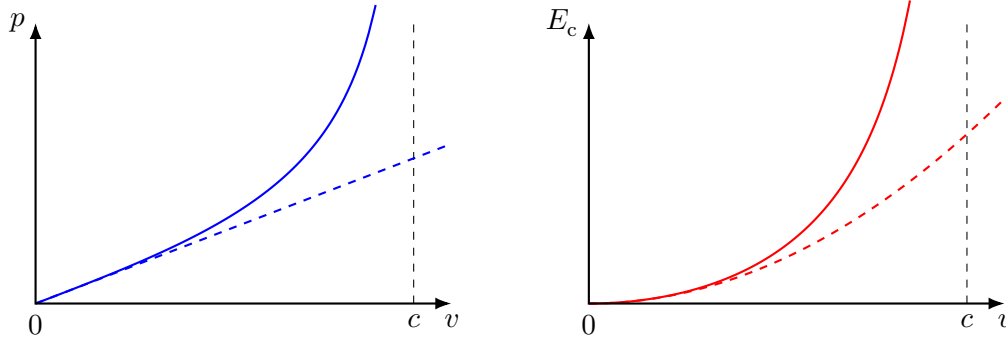


FIGURE 9.1 – Norme de la quantité de mouvement et énergie cinétique en fonction de la vitesse. Les traits pleins correspondent aux formules (9.1) et (9.3) de la relativité restreinte, et les pointillés correspondent aux formules de la mécanique newtonienne (mv et $\frac{1}{2}mv^2$).

Nous allons montrer que les résultats de l'encadré 9.1 sont les *seuls résultats possibles qui satisfont au principe de relativité*, puis nous en explorerons quelques conséquences.

9.2 Lois de conservation et principe de relativité

9.2.1 Énoncé du problème

Considérons un système isolé de deux corps dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, de quantités de mouvement initiales respectives $\vec{p}_{1,i}$ et $\vec{p}_{2,i}$ et d'énergies initiales respectives $E_{1,i}$ et $E_{2,i}$. Ces deux corps subissent un choc, après lequel les quantités de mouvement finales sont $\vec{p}_{1,f}$ et $\vec{p}_{2,f}$ et les énergies $E_{1,f}$ et $E_{2,f}$. Les lois de conservation, valable en mécanique newtonienne et relativiste, impliquent que la quantité de mouvement et l'énergie totales se conservent :

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}, \quad E_{1,i} + E_{2,i} = E_{1,f} + E_{2,f}. \quad (9.6)$$

L'énergie qui apparaît ici est l'énergie totale du système, somme des énergies cinétique et interne. Lorsque le choc est *élastique*, les énergies internes ne sont pas modifiées, et on peut remplacer les énergies totales par les énergies cinétiques.

D'après le *principe de relativité*, cette loi physique doit s'écrire de la même façon dans tous les référentiels galiléens. Dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, les corps ont des quantités de mouvement différentes $\vec{p}'_{1,i}$, $\vec{p}'_{2,i}$, $\vec{p}'_{1,f}$, $\vec{p}'_{2,f}$ et des énergies différentes $E'_{1,i}$, $E'_{2,i}$, $E'_{1,f}$, $E'_{2,f}$, mais on doit toujours avoir

$$\vec{p}'_{1,i} + \vec{p}'_{2,i} = \vec{p}'_{1,f} + \vec{p}'_{2,f}, \quad E'_{1,i} + E'_{2,i} = E'_{1,f} + E'_{2,f}. \quad (9.7)$$

Cette propriété est évidemment vraie en mécanique newtonienne (vérification à faire en exercice) ; elle doit également être vraie en relativité restreinte. Mais si on prenait $\vec{p} = m\vec{v}$, qu'on se mettait dans une situation où (9.6) est vraie, alors après changement de référentiel (selon la transformation de Lorentz, pas de Galilée !), on écrirait $\vec{p}' = m\vec{v}'$ avec $\vec{v}'$ donné par les formules (8.6), et on se rendrait compte que (9.7) n'est *pas vérifiée* (exercice). Cela signifie que, en

relativité restreinte, la quantité de mouvement $\vec{p}$ ne peut pas être donnée par $m\vec{v}$, mais par une formule plus compliquée qui garantit le *principe de relativité*.

On cherche donc une nouvelle formule pour la quantité de mouvement, ainsi que pour l'énergie. La quantité de mouvement doit être une quantité orientée comme la vitesse, et proportionnelle à la masse. De manière générale, on écrit

$$\vec{p} = mf(v)\vec{v}, \quad (9.8)$$

et on cherche l'expression de $f(v)$.

Nous allons construire une quantité de mouvement de la forme (9.8) qui satisfait le principe de relativité, ainsi qu'une expression pour l'énergie. Pour cela, nous allons d'abord introduire la notion de *quadrivecteur*.

9.2.2 Quadrivecteurs

Considérons deux événements infiniment proches suivant la trajectoire d'un corps en mouvement. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, ces événements ont pour coordonnées (x, y, z, t) et $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, ce qui signifie que, dans $\mathcal{R}$, le corps était en (x, y, z) à l'instant t et en $(x + dx, y + dy, z + dz)$ à l'instant $t + dt$. La vitesse dans $\mathcal{R}$ du corps au temps t est le vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$.

Comme la transformation de Lorentz est linéaire, les quantités dx, dy, dz et dt se transforment de la même manière que x, y, z, t lors d'un changement de référentiel, à l'aide de la transformation de Lorentz. Sous sa forme matricielle, voir (6.31), on peut donc écrire

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

(C'est-à-dire : dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le corps se déplace de (dx', dy', dz') pendant le temps dt' . On a déjà écrit de manière implicite des équations similaires dans le chapitre 8.)

L'interprétation de (9.9) est la suivante :

- Il existe une quantité physique dX qui représente le « déplacement spatio-temporel » entre les deux événements infiniment proches que l'on considère.
- Les vecteurs $dX^{\mathcal{R}} = (c dt, dx, dy, dz)$ et $dX^{\mathcal{R}'} = (c dt', dx', dy', dz')$ sont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ de cette quantité dX .
- On obtient les coordonnées $dX^{\mathcal{R}'}$ dans $\mathcal{R}'$ à partir des coordonnées $dX^{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{R}$ en appliquant la transformation de Lorentz (9.9).

On dit que la quantité dX est un *quadrivecteur*.

Encadré 9.2 : Quadrivecteurs

Un *quadrivecteur* Q est une quantité physique dont les coordonnées $Q^{\mathcal{R}}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ s'écrivent comme un vecteur à quatre composantes, et tel que les coordonnées $Q^{\mathcal{R}'}$ de Q dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ s'obtiennent en appliquant la transformation de Lorentz :

$$Q^{\mathcal{R}'} = \Lambda Q^{\mathcal{R}}, \quad (9.10)$$

où Λ est la *même matrice* que celle qui permet de transformer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ d'un événement en les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ du même événement.

La première coordonnée d'un quadrivecteur s'appelle la *coordonnée temporelle*. Les trois autres coordonnées, souvent écrites comme un vecteur, sont les *coordonnées spatiales*.

Exemple 9.1 : Le quadrivecteur « déplacement spatio-temporel » a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$

$$dX^{\mathcal{R}} = (c dt, dx, dy, dz). \quad (9.11)$$

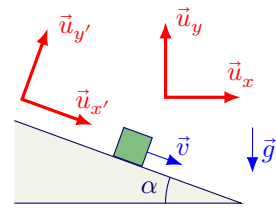
La première coordonnée, $c dt$ est la coordonnée temporelle; elle correspond ici au déplacement dans le temps. Les trois dernières coordonnées dx, dy, dz sont les coordonnées spatiales; ce sont les coordonnées dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ du vecteur habituel « déplacement infinitésimal » $\overline{dM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$. Pour alléger les notations, on écrira

$$dX^{\mathcal{R}} = (c dt, \overline{dM}). \quad (9.12)$$

La notion de quadrivecteur généralise la notion de vecteur. En mécanique classique, un vecteur est une quantité physique qui, dans une *base* $\mathcal{B}$ donnée, s'écrit à l'aide de trois nombres. Le *même vecteur* dans une *autre base* $\mathcal{B}'$ s'écrit à l'aide de trois autres nombres que l'on obtient en multipliant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ par une *matrice de rotation*. (On suppose les deux bases fixes.)

Exemple 9.2 : Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{g}$ a pour coordonnées $(0, -g)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$. Le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(v \cos \alpha, -v \sin \alpha)$ dans $\mathcal{B}$, et $(v, 0)$ dans $\mathcal{B}'$. On vérifie que les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ d'un vecteur quelconque s'obtiennent en multipliant ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ par la même matrice de rotation :

$$\begin{pmatrix} g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ -v \sin \alpha \end{pmatrix}.$$



Énonçons quelques propriétés des quadrivecteurs :

Encadré 9.3 : Propriétés des quadrivecteurs

- Si A et B sont deux quadrivecteurs, alors $A + B$ est un quadrivecteur; les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $A + B$ sont $A^{\mathcal{R}} + B^{\mathcal{R}}$.
- Si A est un quadrivecteur et que λ est un **invariant relativiste**, alors λA est un quadrivecteur; les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de λA sont $\lambda A^{\mathcal{R}}$.
- Si un quadrivecteur A s'écrit $A^{\mathcal{R}} = (\alpha, \vec{a})$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, alors

$$\alpha^2 - \vec{a}^2 \text{ est un invariant relativiste; } \quad (9.13)$$

c'est-à-dire que, si A s'écrit $A^{\mathcal{R}'} = (\alpha', \vec{a}')$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$, alors $\alpha^2 - \vec{a}^2 = \alpha'^2 - \vec{a}'^2$.

On rappelle qu'un **invariant relativiste**, aussi appelé **quadriscalaire**, est une quantité qui a la même valeur dans tous les référentiels galiléens. Par exemple, la vitesse de la lumière est un invariant relativiste. La troisième propriété de l'encadré appliquée au quadrivecteur dX permet d'affirmer que ds^2 défini par

$$ds^2 = (c dt)^2 - \overline{dM}^2 = (c dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (9.14)$$

est un invariant relativiste. Cette quantité est le carré de l'intervalle d'espace temps entre deux événements infiniment proches, voir la section 7.3. (C'est la même expression que (7.20), mais avec des différences infinitésimales dx, dy, dz, dt et ds plutôt que des différences finies $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ et Δs .)

Démontrons la première propriété de l'encadré 9.3; si A et B sont deux quadrivecteurs, alors par définition $A^{\mathcal{R}'} = \Lambda A^{\mathcal{R}}$ et $B^{\mathcal{R}'} = \Lambda B^{\mathcal{R}}$, avec Λ la matrice qui code le passage de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, comme dans (9.9). Par linéarité, on a alors $(A^{\mathcal{R}'} + B^{\mathcal{R}'}) = \Lambda(A^{\mathcal{R}} + B^{\mathcal{R}})$. On voit bien que $A^{\mathcal{R}} + B^{\mathcal{R}}$ est un vecteur de quatre nombres qui sont les coordonnées d'un quadrivecteur que l'on nomme $A + B$. La deuxième propriété se démontre de la même manière. Pour la troisième, on la démontre dans le cas général de la même manière que l'on a démontré dans la section 7.3 que Δs^2 est un invariant relativiste; à faire en exercice.

9.2.3 Quadrivitesse

Comme dans la section 9.2.2, on considère deux événements infiniment proches le long de la trajectoire d'un corps, et on s'intéresse au quadrivecteur dX entre ces deux événements ; dans $\mathcal{R}$, les coordonnées de dX sont $dX^{\mathcal{R}} = (c dt, dx, dy, dz)$.

Si l'on divise ces coordonnées par dt , on obtient les quatre nombres (c, v_x, v_y, v_z) . Ces quatre nombres *ne sont pas les coordonnées d'un quadrivecteur*, parce qu'ils ne se transforment pas selon la transformation de Lorentz. (On a écrit la transformation permettant d'obtenir les composantes v'_x, v'_y et v'_z dans $\mathcal{R}'$ dans le chapitre 8 ; cette transformation n'est même pas linéaire !) Ici, on a multiplié $dX^{\mathcal{R}}$ par $1/dt$, mais $1/dt$ n'est pas un invariant relativiste, et on ne peut pas appliquer le résultat de l'encadré 9.3.

On peut néanmoins construire un quadrivecteur qui « ressemble » à la vitesse de la particule en utilisant l'invariant relativiste ds entre les deux événements infiniment proches de la trajectoire. Commençons par réécrire ds^2 en fonction de la vitesse du corps. On part de

$$\overrightarrow{dM} = \vec{v} dt = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z. \quad (9.15)$$

En élevant cette quantité au carré, on obtient

$$v^2 dt^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (9.16)$$

On a donc, en reportant dans (9.14),

$$ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2, \quad \Rightarrow \quad ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.17)$$

Posons

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.18)$$

(C'est la même formule que pour le facteur γ qui apparaît dans les transformations de Lorentz, sauf que c'est la vitesse v du corps en mouvement qui apparaît, et pas la vitesse V entre les deux référentiels.)

Finalement, on obtient que l'intervalle d'espace-temps entre deux événements infiniment proches le long de la trajectoire d'un corps s'écrit :

$$ds = \frac{c dt}{\gamma_v}, \quad (9.19)$$

où γ_v est calculé en utilisant la vitesse du corps au point considéré.

L'avantage de la quantité ds , comme on l'a vu dans la section 7.3 est que c'est un ***invariant relativiste*** : si on considère les mêmes événements le long de la trajectoire du corps dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$, et que l'on calcule $c dt' / \gamma_{v'}$, on trouve la même quantité ds que dans $\mathcal{R}$, alors que $dt \neq dt'$ et $v \neq v'$.

Selon la deuxième propriété de l'encadré 9.3, la quantité $\frac{c}{ds} dX = \frac{\gamma_v}{dt} dX$ est un quadrivecteur donc les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont

$$\frac{\gamma_v}{dt} dX^{\mathcal{R}} = \frac{\gamma_v}{dt} (c dt, dx, dy, dz) = \left(\frac{\gamma_v}{dt} c dt, \frac{\gamma_v}{dt} dx, \frac{\gamma_v}{dt} dy, \frac{\gamma_v}{dt} dz \right) = (\gamma_v c, \gamma_v v_x, \gamma_v v_y, \gamma_v v_z). \quad (9.20)$$

Ce quadrivecteur « contient » à un facteur γ_v près la vitesse de l'objet ; on l'appelle la ***quadrivitesse*** du corps étudié.

Encadré 9.4 : Quadrivitesse

La **quadrivitesse** U d'un corps en un point de sa trajectoire est le quadrivecteur dont les composantes dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont

$$U^{\mathcal{R}} = (\gamma_v c, \gamma_v v_x, \gamma_v v_y, \gamma_v v_z), \quad (9.21)$$

où $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$ est la vitesse du corps au point considéré, $v = \|\vec{v}\|$ et

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.22)$$

Pour abréger les notations, on notera souvent les coordonnées de ce quadrivecteur sous la forme

$$U^{\mathcal{R}} = (\gamma_v c, \gamma_v \vec{v}). \quad (9.23)$$

Remarque : Rappelons ce que veut dire « la quadrivitesse est un quadrivecteur ». Si on mesure la vitesse du corps au même point de sa trajectoire dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$, on trouvera un autre vecteur vitesse $\vec{v}' = v'_x \vec{u}_x + v'_y \vec{u}_y + v'_z \vec{u}_z$, et la quadrivitesse U aura d'autres coordonnées : $U^{\mathcal{R}'} = (\gamma_{v'} c, \gamma_{v'} v'_x, \gamma_{v'} v'_y, \gamma_{v'} v'_z)$. Mais on peut calculer directement ces nouvelles coordonnées grâce à la transformation de Lorentz ; en supposons que $\mathcal{R}'$ a une vitesse $V \vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$,

$$\begin{pmatrix} \gamma_{v'} c \\ \gamma_{v'} v'_x \\ \gamma_{v'} v'_y \\ \gamma_{v'} v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v v_x \\ \gamma_v v_y \\ \gamma_v v_z \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

Attention à ne pas confondre γ (qui dépend de V), γ_v et $\gamma_{v'}$. On peut vérifier avec les lois de composition de vitesse que l'égalité (9.24) est vérifiée ; c'est un peu difficile, mais faisable.

9.2.4 Quadri-impulsion

On cherche une nouvelle expression pour la quantité de mouvement $\vec{p}$. Cette expression doit ressembler à $m\vec{v}$ à faible vitesse et avoir de « bonnes » propriétés lors d'un changement de référentiel. Or, les trois dernières coordonnées de la quadrivitesse sont $\gamma_v \vec{v}$, qui est presque égal à $\vec{v}$ à faible vitesse. Il est clair qu'un bon candidat pour la quantité de mouvement relativiste est $\vec{p} = \gamma_v m \vec{v}$. On définit donc le quadrivecteur suivant :

Encadré 9.5 : Quadri-impulsion

On définit le quadrivecteur **quadri-impulsion** par

$$P = mU. \quad (9.25)$$

Les coordonnées de ce quadrivecteur dans $\mathcal{R}$ sont

$$P^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \gamma_v mv_x, \gamma_v mv_y, \gamma_v mv_z). \quad (9.26)$$

Les trois dernières coordonnées de P forment la **quantité de mouvement** relativiste dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{p} = \gamma_v m \vec{v}. \quad (9.27)$$

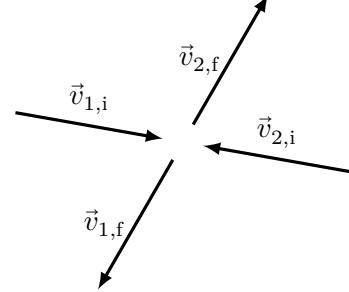
Pour abréger les notations, on notera souvent les coordonnées de ce quadrivecteur sous la forme

$$P^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \vec{p}). \quad (9.28)$$

Vérifions maintenant que cette expression de la quantité de mouvement permet de satisfaire le principe de relativité, et que c'est la seule expression possible.

9.2.5 Étude d'une collision simple

On considère un choc élastique le plus simple possible. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, deux corps de même masse vont l'un vers l'autre avec des vecteurs vitesse initiale $\vec{v}_{1,i}$ et $\vec{v}_{2,i}$ opposés. On note v la norme commune de ces vecteurs. Sans même connaître l'expression de la quantité de mouvement d'une particule, il est clair que la quantité de mouvement totale du système est nulle dans $\mathcal{R}$. Après le choc, la quantité de mouvement doit toujours être nulle ; les vecteurs vitesse finale $\vec{v}_{1,f}$ et $\vec{v}_{2,f}$ des deux corps sont donc toujours opposés, mais dans une autre direction. De plus, puisqu'on suppose le choc élastique, l'énergie cinétique finale doit être égale à l'énergie cinétique initiale, et on en déduit (sans même connaître l'expression de l'énergie cinétique) que la vitesse finale a encore la même norme v que la vitesse initiale.



Les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des deux quadri-impulsions juste avant le choc et des deux quadri-impulsions juste après le choc sont :

$$P_{1,i}^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \vec{p}_{1,i}), \quad P_{2,i}^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \vec{p}_{2,i}), \quad P_{1,f}^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \vec{p}_{1,f}), \quad P_{2,f}^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \vec{p}_{2,f}). \quad (9.29)$$

(On rappelle que $\vec{p}_{1,i}$ n'est pas $m\vec{v}_{1,i}$, mais $m\gamma_v \vec{v}_{1,i}$. C'est le même γ_v qui apparaît dans les quatre expressions puisque les quatre vitesses $\vec{v}_{1,i}$, $\vec{v}_{2,i}$, $\vec{v}_{1,f}$ et $\vec{v}_{2,f}$ ont la même norme v .)

On définit la **quadri-impulsion totale** du système juste avant et juste après le choc par, respectivement, $P_i = P_{1,i} + P_{2,i}$ et $P_f = P_{1,f} + P_{2,f}$. Ces quantités sont des quadrivecteurs puisqu'elles s'écrivent comme une somme de quadrivecteurs. Leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont

$$P_i^{\mathcal{R}} = P_{1,i}^{\mathcal{R}} + P_{2,i}^{\mathcal{R}} = (2\gamma_v mc, \vec{0}), \quad P_f^{\mathcal{R}} = P_{1,f}^{\mathcal{R}} + P_{2,f}^{\mathcal{R}} = (2\gamma_v mc, \vec{0}). \quad (9.30)$$

(on a utilisé $\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{0}$ et $\vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} = \vec{0}$.)

On constate que les deux quadrivecteurs P_i et P_f ont les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$. Donc ces quadrivecteurs sont égaux

$$P_i = P_f. \quad (9.31)$$

Donc, ils ont les mêmes coordonnées dans n'importe quel autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$:

$$P_i^{\mathcal{R}'} = P_f^{\mathcal{R}'}. \quad (9.32)$$

Dans cet autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, les corps ont des vitesses $\vec{v}'_{1,i}$, $\vec{v}'_{2,i}$, $\vec{v}'_{1,f}$, $\vec{v}'_{2,f}$ dont les normes et directions sont en général différentes les unes des autres. Les quatre quadri-impulsions dans $\mathcal{R}'$ s'écrivent donc (comparer avec (9.29))

$$P_{1,i}^{\mathcal{R}'} = (\gamma_{v'_{1,i}} mc, \vec{p}'_{1,i}), \quad P_{2,i}^{\mathcal{R}'} = (\gamma_{v'_{2,i}} mc, \vec{p}'_{2,i}), \quad P_{1,f}^{\mathcal{R}'} = (\gamma_{v'_{1,f}} mc, \vec{p}'_{1,f}), \quad P_{2,f}^{\mathcal{R}'} = (\gamma_{v'_{2,f}} mc, \vec{p}'_{2,f}), \quad (9.33)$$

avec $\vec{p}'_{1,i}$, $\vec{p}'_{2,i}$, $\vec{p}'_{1,f}$ et $\vec{p}'_{2,f}$ les quantités de mouvement dans $\mathcal{R}'$; les facteurs γ sont tous différents puisque les vitesses sont différentes. Les quadri-impulsions totales initiale et finale écrites dans $\mathcal{R}'$ sont donc

$$P_i^{\mathcal{R}'} = ((\gamma_{v'_{1,i}} + \gamma_{v'_{2,i}})mc, \vec{p}'_{1,i} + \vec{p}'_{2,i}), \quad P_f^{\mathcal{R}'} = ((\gamma_{v'_{1,f}} + \gamma_{v'_{2,f}})mc, \vec{p}'_{1,f} + \vec{p}'_{2,f}). \quad (9.34)$$

On en déduit avec (9.32) que

$$(\gamma_{v'_{1,i}} + \gamma_{v'_{2,i}})mc = (\gamma_{v'_{1,f}} + \gamma_{v'_{2,f}})mc, \quad \vec{p}'_{1,i} + \vec{p}'_{2,i} = \vec{p}'_{1,f} + \vec{p}'_{2,f}. \quad (9.35)$$

Ces relations sont vraies dans n'importe quel référentiel galiléen $\mathcal{R}'$. En particulier, la deuxième relation est la conservation de la quantité de mouvement totale lors du choc, ce qui valide la définition (9.27) de la quantité de mouvement en relativité.

Pour aller plus loin : Est-il possible que l'on se soit trompé, que la définition $\vec{p} = m\gamma_v \vec{v}$ fonctionne « par hasard », et que la « vraie » définition de la quantité de mouvement soit différente ? Autrement dit, peut-on définir une quantité $\vec{\tilde{p}}$ de la forme (9.8) (c'est-à-dire $\vec{\tilde{p}} = mf(v)\vec{v}$ pour une certaine fonction f), et qui serait la « vraie » quantité de mouvement ? Si une telle quantité existait, dans l'exemple que nous venons de développer, la conservation de la quantité de mouvement (9.35) dans un référentiel $\mathcal{R}'$ devrait alors s'écrire sous la forme

$$mf(v'_{1,i})\vec{v}'_{1,i} + mf(v'_{2,i})\vec{v}'_{2,i} = mf(v'_{1,f})\vec{v}'_{1,f} + mf(v'_{2,f})\vec{v}'_{2,f}. \quad (9.36)$$

Choisissons un référentiel $\mathcal{R}'$ tel que les vitesses initiales soient égales en norme : $v'_i = v'_{1,i} = v'_{2,i}$, et que les vitesses finales aient des directions différentes (on se convainc qu'il y a une infinité de tels référentiels). Alors, en divisant par $mf(v'_i)$, on obtient

$$\vec{v}'_{1,i} + \vec{v}'_{2,i} = \frac{f(v'_{1,f})}{f(v'_i)}\vec{v}'_{1,f} + \frac{f(v'_{2,f})}{f(v'_i)}\vec{v}'_{2,f}. \quad (9.37)$$

Mais par ailleurs on vient de démontrer que la quantité $\vec{p} = m\gamma_v \vec{v}$ permettait d'écrire (9.35) ; donc, dans ce référentiel où l'on a $v'_i = v'_{1,i} = v'_{2,i}$, on doit aussi avoir

$$\vec{v}'_{1,i} + \vec{v}'_{2,i} = \frac{\gamma_{v'_{1,f}}}{\gamma_{v'_i}}\vec{v}'_{1,f} + \frac{\gamma_{v'_{2,f}}}{\gamma_{v'_i}}\vec{v}'_{2,f}. \quad (9.38)$$

Comme $\vec{v}'_{1,f}$ et $\vec{v}'_{2,f}$ ont des directions différentes, ces deux égalités impliquent $f(v'_{1,f})/f(v'_i) = \gamma_{v'_{1,f}}/\gamma_{v'_i}$. Cette égalité devant être vraie quels que soient $\mathcal{R}'$, les vitesses initiales et l'angle du choc, on voit que l'on doit avoir $f(v)$ proportionnel à γ_v . Mais par ailleurs, $f(0)$ doit valoir 1 (pour retrouver la quantité de mouvement newtonienne à faible vitesse), et on en déduit que $f(v) = \gamma_v$. La définition (9.27) de la quantité de mouvement est donc la seule définition acceptable.

9.2.6 Conservation de la quadri-impulsion

Dans la section précédente, on a considéré le choc de deux corps de même masse et de même vitesse (en norme) faisant un choc élastique. Considérons maintenant un choc un plus général :

- **Juste avant le choc** on a deux corps de masses m_1 et m_2 et de vitesses $\vec{v}_{1,i}$ et $\vec{v}_{2,i}$,
- **Juste après le choc** on a deux corps de masses m_1 et m_2 et de vitesses $\vec{v}_{1,f}$ et $\vec{v}_{2,f}$.

Les quadri-impulsions totales du système de deux corps juste avant et juste après le choc s'écrivent, dans $\mathcal{R}$,

$$\begin{cases} P_i^{\mathcal{R}} = (a_i, \vec{p}_i) & \text{avec } a_i = \gamma_{v_{1,i}}m_1c + \gamma_{v_{2,i}}m_2c \quad \text{et} \quad \vec{p}_i = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i}, \\ P_f^{\mathcal{R}} = (a_f, \vec{p}_f) & \text{avec } a_f = \gamma_{v_{1,f}}m_1c + \gamma_{v_{2,f}}m_2c \quad \text{et} \quad \vec{p}_f = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}. \end{cases} \quad (9.39)$$

Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel galiléen se déplaçant à une vitesse $V\vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Selon la transformation de Lorentz, on a

$$\begin{cases} P_i^{\mathcal{R}'} = \left(\gamma \left(a_i - \frac{V}{c} p_{i,x} \right), \gamma \left(p_{i,x} - \frac{V}{c} a_i \right), p_{i,y}, p_{i,z} \right), \\ P_f^{\mathcal{R}'} = \left(\gamma \left(a_f - \frac{V}{c} p_{f,x} \right), \gamma \left(p_{f,x} - \frac{V}{c} a_f \right), p_{f,y}, p_{f,z} \right), \end{cases} \quad (9.40)$$

(où $p_{i,x}$, $p_{i,y}$, $p_{i,z}$ sont les coordonnées de $\vec{p}_i$, et similairement pour les coordonnées de $\vec{p}_f$).

La conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$ s'écrit $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Pour avoir également conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$, il faut en particulier que l'on ait $\gamma(p_{i,x} - \frac{V}{c}a_i) = \gamma(p_{f,x} - \frac{V}{c}a_f)$, et donc $a_i = a_f$. On voit que pour assurer la conservation de la quantité

de mouvement lors du choc dans tous les référentiels, il faut que *toute* la quadri-impulsion soit conservée. On a donc nécessairement la loi suivante :

Encadré 9.6

Lors d'un choc, la quadri-impulsion totale des corps participant au choc est conservée :

$$P_i = P_f. \quad (9.41)$$

Dans l'exemple du choc des deux corps de masses m_1 et m_2 , l'égalité (9.41) s'écrit donc, dans $\mathcal{R}$,

$$\gamma_{v_{1,i}} m_1 c + \gamma_{v_{2,i}} m_2 c = \gamma_{v_{1,f}} m_1 c + \gamma_{v_{2,f}} m_2 c, \quad \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}. \quad (9.42)$$

9.3 Énergie en relativité restreinte

La conservation de la quadri-impulsion totale nous donne donc la loi de conservation de la quantité de mouvement et une loi de conservation supplémentaire. Cette loi supplémentaire doit être reliée à la conservation de l'énergie, voir (9.6). La quantité γmc n'a pas la dimension d'une énergie, mais si on la multiplie par c , on obtient bien une énergie ; on réécrit la première égalité dans (9.42) sous la forme équivalente

$$\gamma_{v_{1,i}} m_1 c^2 + \gamma_{v_{2,i}} m_2 c^2 = \gamma_{v_{1,f}} m_1 c^2 + \gamma_{v_{2,f}} m_2 c^2. \quad (9.43)$$

L'interprétation de cette équation est claire : $\gamma_{v_{1,i}} m_1 c^2$ et $\gamma_{v_{2,i}} m_2 c^2$ sont les énergies des deux particules avant le choc, le membre de gauche est l'énergie totale du système avant le choc, et cette énergie est égale au membre de droite, qui est l'énergie totale après le choc. On a donc :

Encadré 9.7 : Énergie d'un corps

Dans un référentiel galiléen, l'énergie d'un corps de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est :

$$E = \gamma_v m c^2. \quad (9.44)$$

Par construction, l'énergie totale se conserve lors d'un choc.

9.3.1 Énergie interne et énergie cinétique

L'énergie relativiste ne s'annule pas à vitesse nulle, puisque $\gamma_v = 1$ lorsque $v = 0$. On définit l'énergie interne d'un corps comme son énergie à vitesse nulle, l'énergie restante, $E - E_{\text{int}}$ est alors l'énergie cinétique :

Encadré 9.8 : Énergie interne et énergie cinétique

On décompose l'énergie d'une particule sous la forme

$$E = E_{\text{int}} + E_c, \quad (9.45)$$

avec

$$E_{\text{int}} = m c^2, \quad E_c = (\gamma_v - 1) m c^2. \quad (9.46)$$

E_{int} est l'*énergie interne*, et E_c l'*énergie cinétique* de la particule.

On comprend avec l'expression de $E_{\text{int}} = m c^2$ que la masse d'une particule (ou en fait, d'un système quelconque) est directement proportionnelle à son énergie interne. Cette expression de l'énergie interne montre que l'on ne peut séparer les notions de masse et d'énergie d'un objet : on parle alors d'*équivalence masse-énergie*. On verra dans la suite que cette équivalence a d'importantes conséquences, notamment car elle suppose que l'on peut « transformer » la masse en énergie (et réciproquement) comme c'est le cas par exemple dans les réactions nucléaires.

Exemple 9.3 : On chauffe un litre d'eau de 1°C ; de combien sa masse augmente-t-elle ? On sait que l'on doit fournir une énergie $m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}\Delta T = 4180\text{ J}$ pour obtenir l'augmentation de température souhaitée, où c_{eau} est la capacité thermique de l'eau. L'énergie interne de l'eau (ou plutôt son enthalpie, mais la différence est minime) augmente donc de $\Delta E_{\text{int}} = 4180\text{ J}$, et donc sa masse augmente de $\Delta m = 4180/c^2 = 4,7 \cdot 10^{-14}\text{ kg}$. Ça va être difficile à mesurer...

Considérons maintenant l'énergie cinétique $E_c = (\gamma_v - 1)mc^2$. Cette quantité s'annule à vitesse nulle, comme il se doit. À faibles vitesses $v \ll c$, on obtient

$$E_c = (\gamma_v - 1)mc^2 = mc^2 \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (9.47)$$

On retrouve l'expression newtonienne de l'énergie cinétique.

Pour aller plus loin : On peut aussi déterminer E_c de la manière suivante. On considère un point matériel soumis à une force $\vec{F}$. On doit avoir, simultanément,

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \quad dE_c = \vec{F} \cdot d\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (9.48)$$

La première égalité est la version relativiste de la loi de Newton (voir la section 9.4 plus bas). La deuxième égalité est le théorème de l'énergie cinétique. (Le membre de droite est le travail δW .) En combinant ces deux équations, on doit donc avoir

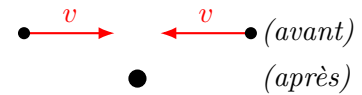
$$dE_c = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{v} dt = d\vec{p} \cdot \vec{v}. \quad (9.49)$$

À ce niveau, si on utilisait $\vec{p} = m\vec{v}$, le membre de droite deviendrait $d(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2)$, et on retrouverait l'énergie cinétique newtonienne. Mais en relativité, $\vec{p} = \gamma_v m\vec{v}$, et le calcul est plus compliqué. Avec un peu d'acharnement, on arrive quand même à montrer à partir de (9.49), de l'expression de $\vec{p}$ et de celle de γ_v que E_c est bien donné par (9.46).

9.3.2 Chocs inélastiques

La conservation de la quadri-impulsion totale, voir l'encadré 9.6, doit être vérifiée même lors de chocs inélastiques, ou quand des particules apparaissent ou disparaissent (par exemple, la désintégration d'un noyau d'uranium, ou la capture d'un électron par un proton pour former un atome d'hydrogène). En effet, comme on l'a vu dans la section 9.2.6, c'est la seule manière d'assurer la conservation de l'impulsion.

Considérons maintenant un exemple de choc inélastique le plus simple possible : deux corps de masse m et ayant des vitesses opposées font un choc, et restent collées l'une à l'autre.



La quadri-impulsion totale avant le choc, écrite dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, est

$$P_i^{\mathcal{R}} = (\gamma_v mc, \gamma_v mv \vec{u}_x) + (\gamma_v mc, -\gamma_v mv \vec{u}_x) = (2\gamma_v mc, \vec{0}). \quad (9.50)$$

La quadri-impulsion du corps résultant obtenu après le choc est donc

$$P_f^{\mathcal{R}} = P_i^{\mathcal{R}} = (2\gamma_v mc, \vec{0}). \quad (9.51)$$

Le corps résultant a bien une quantité de mouvement nulle, et donc une vitesse nulle. Pour que le P_f corresponde à sa définition, on voit que le corps obtenu doit avoir une masse

$$m' = 2\gamma_v m, \quad (9.52)$$

supérieure à la masse $2m$ prédite par la mécanique newtonienne. La masse du corps obtenu dépend de la vitesse des corps incidents ! La raison pour laquelle la masse m' de l'exemple ci-dessus augmente avec la vitesse v d'impact est claire : plus v est importante, plus il y a d'énergie cinétique à absorber, et donc plus l'énergie interne de la particule produite est grande et, finalement, plus sa masse m' est grande. On retiendra :

Encadré 9.9

Lors d'un choc inélastique, la masse totale des constituants d'un système n'est *pas* conservée.

Remarque : Pour un système constitués de deux particules de masses m_1 et m_2 , la « masse totale des constituants du système » est $m_1 + m_2$. Cette masse, non-conservée lors d'un choc, n'est finalement pas très intéressante. On peut définir en mécanique relativiste la « masse du système » par une formule *différente* de $m = m_1 + m_2$, et cette masse a de bonnes propriétés (invariant relativiste conservé lors d'un choc interne), mais nous n'aborderons pas ce point dans ce cours.

9.3.3 Quadri-impulsion, énergie et quantité de mouvement

Avec la définition de l'énergie E , la quadri-impulsion s'écrit

$$P^{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{c} E, \vec{p} \right). \quad (9.53)$$

C'est pour cette raison que la quadri-impulsion est également appelée le quadrivecteur **énergie-impulsion**.

D'après la troisième propriété de l'encadré 9.3, on sait que

$$\frac{1}{c^2} E^2 - p^2 \quad \text{est un invariant relativiste.} \quad (9.54)$$

Dans le référentiel où le corps est au repos, l'énergie est $E = mc^2$ et l'impulsion est $\vec{p} = \vec{0}$, on en déduit que cet invariant est égal à $m^2 c^2$. Finalement, après réorganisation,

Encadré 9.10

Pour un corps quelconque, on a

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (9.55)$$

Vous êtes vivement encouragés à démontrer directement (9.55) à partir des expressions (9.1) de E et de $\vec{p}$.

9.3.4 Énergie et quantité de mouvement du photon

Le photon est un quantum d'énergie lumineuse, on parle parfois d'une « particule ou d'un corpuscule de lumière ». Sa masse est nulle, mais comme sa vitesse est c , il a quand même une énergie et une impulsion.

Encadré 9.11 : Le photon

- La masse du photon est nulle.
- La vitesse du photon dans le vide est égale à c , quel que soit le référentiel.
- L'énergie et la quantité du mouvement du photon vérifient

$$E = pc. \quad (9.56)$$

L'expression (9.56) vient de (9.55) où l'on a simplement mis $m = 0$.

Le photon est toujours en mouvement à la vitesse c ; en particulier, on ne peut pas définir de référentiel lié au photon, dans lequel il serait immobile.

Dans un référentiel donné, la mécanique quantique associe au photon une énergie :

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad (9.57)$$

où $h = 6,626\,070\,15\,10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck, f la fréquence de l'onde électromagnétique associée au photon et λ sa longueur d'onde. L'impulsion du photon a donc une norme

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}; \quad (9.58)$$

c'est la relation de de Broglie.

Exemple 9.4 : Redémontrons en une ligne la formule (8.22) de l'effet Doppler dans le cas d'une source fixe dans $\mathcal{R}$ et d'un récepteur qui s'éloigne à la vitesse $V = \beta c$ selon $\vec{u}_x$. Dans $\mathcal{R}$, en utilisant (9.57) et (9.58), la quadri-impulsion du photon est $P^{\mathcal{R}} = (\frac{hf}{c}, \frac{hf}{c}\vec{u}_x)$. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où le récepteur est immobile, on note f' la fréquence du photon. En appliquant la transformation de Lorentz, la quadri-impulsion du photon dans $\mathcal{R}'$ est

$$P^{\mathcal{R}'} = \left(\frac{hf'}{c}, \frac{hf'}{c}\vec{u}_x \right) \quad \text{avec} \quad \frac{hf'}{c} = \gamma \left(\frac{hf}{c} - \beta \frac{hf}{c} \right) = \frac{hf}{c} \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{hf}{c} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (9.59)$$

Après simplification par h/c , on retrouve bien l'expression (8.22) de f' .

Puisqu'un photon a une quantité de mouvement non nulle, la lumière peut « pousser » la matière.

9.4 Principe fondamental de la dynamique

Lorsque l'on veut traiter le mouvement d'une particule relativiste soumise à une force $\vec{F}$ dans un certain référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il ne faut *pas* utiliser l'accélération. Il faut écrire :

Encadré 9.12 : Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{c'est-à-dire} \quad m \frac{d(\gamma_v \vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (9.60)$$

En effet, seule cette forme garantit la conservation de la quantité de mouvement ; si l'on prend deux particules d'impulsions $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ qui subissent un choc, et que l'on note $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ les forces que ces particules exercent l'une sur l'autre lors du choc, alors on pourra écrire

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{21}, \quad \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12}, \quad \text{et donc} \quad \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0} \quad (9.61)$$

en utilisant la troisième loi de Newton. L'impulsion reste bien constante lors du choc.

9.5 Quelques conséquences et applications

9.5.1 Équivalence masse-énergie, ordres de grandeur

On peut associer la masse m d'un objet à son énergie interne $E_{\text{int}} = mc^2$. En ordre de grandeur, on peut calculer à quelle énergie équivalente correspondent quelques masses usuelles.

Échelle macroscopique, $m = 1 \text{ g}$: Si on fait le calcul, on peut associer à cette masse une énergie au repos de $E_{\text{int}}(1 \text{ g}) = 10^{-3} \times (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{13} \text{ J} \approx 2,5 \cdot 10^7 \text{ kW} \cdot \text{h}$. À titre de comparaison, c'est ce que produit une centrale nucléaire en 24 heures, et c'est la consommation électrique moyenne de 10 000 personnes pendant un an.

La masse au repos peut donc être considérée comme une très importante réserve d'énergie équivalente, pour peu que l'on puisse l'extraire par des processus de désintégration.

Échelle microscopique, $m = 1 \text{ u}$: On rappelle que l'unité de masse atomique u est, en gros, la masse d'un proton ou d'un neutron. Précisément, elle est définie comme un douzième de la masse du carbone 12, et vaut $1 \text{ u} \simeq 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Cette masse correspond à une énergie au repos de $E_{\text{int}}(1 \text{ u}) \simeq 1,66 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 \simeq 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J} \simeq 1 \text{ GeV}$. (On

rappelle que l'électron-volt, eV, est défini comme l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 V, soit $1 \text{ eV} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$ Un calcul plus précis donne

$$E_{\text{int}}(1 \text{ u}) = 1 \text{ u } c^2 = 931,5 \text{ MeV.} \quad (9.62)$$

Ainsi, souvent, on trouve les masses des particules exprimées non pas en unité de masse atomiques, mais en énergie équivalente. Pour information, voici les masses de quelques particules subatomiques en u et en eV/c^2 :

Electron	$m_e \simeq 5,487 \cdot 10^{-3} \text{ u}$	$\simeq 511,1 \text{ keV}/c^2$
Proton	$m_{\text{proton}} \simeq 1,0075 \text{ u}$	$\simeq 938,5 \text{ MeV}/c^2$
Neutron	$m_{\text{neutron}} \simeq 1,0087 \text{ u}$	$\simeq 939,6 \text{ MeV}/c^2$
Muon μ^+	$m_\mu \simeq 0,113 \text{ u}$	$\simeq 105,6 \text{ MeV}/c^2$
Boson de Higgs H^0	$m_{H^0} \simeq 134 \text{ u}$	$\simeq 125 \text{ GeV}/c^2$

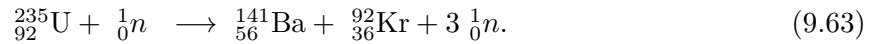
9.5.2 Un exemple de réaction nucléaire : fission de l'uranium-235

À titre d'exemple, nous étudions une réaction nucléaire d'importance industrielle de premier plan puisque c'est une des réactions ayant lieu dans les centrales nucléaires permettant la production d'électricité.

Un neutron entrant en collision avec un noyau d'uranium-235 peut fissionner ce dernier en deux noyaux plus légers tout en émettant des neutrons.

On rappelle qu'un noyau donné se note : ${}^A_Z\text{X}$, où A est le *nombre de masse*, c'est-à-dire le nombre de nucléons (protons et neutrons) composant le noyau. Z est le *nombre de charges*, c'est-à-dire dans le cas d'un noyau, le nombre de protons. Z donne la nature de l'élément dont il est question. Le nombre de neutrons est alors donné par $N = A - Z$. Deux noyaux ayant le même Z , mais des A différents sont deux isotopes du même élément.

Une des réactions de fission de l'uranium 235 est la suivante :



(On note 1_0n ou, plus simplement n pour un neutron.)

Cette réaction conserve le nombre de masse A et le nombre de charge Z . Elle conserve aussi la quantité de mouvement totale, c'est-à-dire que dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné on a :

$$\vec{p}({}^{235}\text{U}) + \vec{p}(n) = \vec{p}({}^{141}\text{Ba}) + \vec{p}({}^{92}\text{Kr}) + \vec{p}(1^{\text{er}} n) + \vec{p}(2^{\text{e}} n) + \vec{p}(3^{\text{e}} n). \quad (9.64)$$

L'énergie totale est également conservée si bien qu'en notant (dans $\mathcal{R}$) E_1 l'énergie totale du noyau d'uranium et du neutron absorbé, et E_2 l'énergie totale des noyaux de baryum et de krypton et des trois neutrons émis, on a :

$$E_1 = E_2. \quad (9.65)$$

Si on sépare l'énergie totale en une partie d'énergie cinétique E_c et une partie d'énergie interne mc^2 où m est la masse totale des particules au repos, on arrive à :

$$E_{c,1} + m_1 c^2 = E_{c,2} + m_2 c^2, \quad (9.66)$$

qui conduit à :

$$E_{c,2} - E_{c,1} = (m_1 - m_2) c^2. \quad (9.67)$$

En pesant les différentes particules au repos, on se rend compte que $m_1 > m_2$; plus précisément, $m_1 - m_2 \simeq 0,185 \text{ u}$. On a donc

$$E_{c,2} - E_{c,1} = (m_1 - m_2) c^2 \simeq 0,185 \text{ u } c^2 \simeq 172,4 \text{ MeV.} \quad (9.68)$$

Cette réaction crée donc une variation d'énergie cinétique qu'on retrouve dans les produits de la réaction.

Cette énergie cinétique peut être transférée, par exemple, à des molécules d'eau qu'on aurait mis dans l'environnement proche des réactifs. L'eau recevant cette énergie peut ensuite se vaporiser et faire tourner une turbine. C'est sur ce principe que fonctionnent les centrales nucléaires générant la majeure partie de l'électricité produite en France.

Il faut bien comprendre que *cette réaction n'a pas créé d'énergie*. Elle a transformé de l'énergie de masse en énergie cinétique.

9.5.3 Création de paire

La création de paire est un effet purement relativiste : il s'agit de la génération spontanée de masse, en l'occurrence la paire d'un électron e^- et d'un positron e^+ , à partir d'un photon suffisamment énergétique (qui est annihilé pendant le processus). On va étudier cette création de paire et mettre en évidence à quelles conditions elle peut avoir lieu, en se basant sur les lois de conservation.

Impossibilité de la création de paire dans le vide à partir d'un seul photon

On pourrait imaginer qu'un photon isolé puisse spontanément se transformer en une paire électron quantité de mouvement, comme sur la figure 9.2, mais c'est impossible.

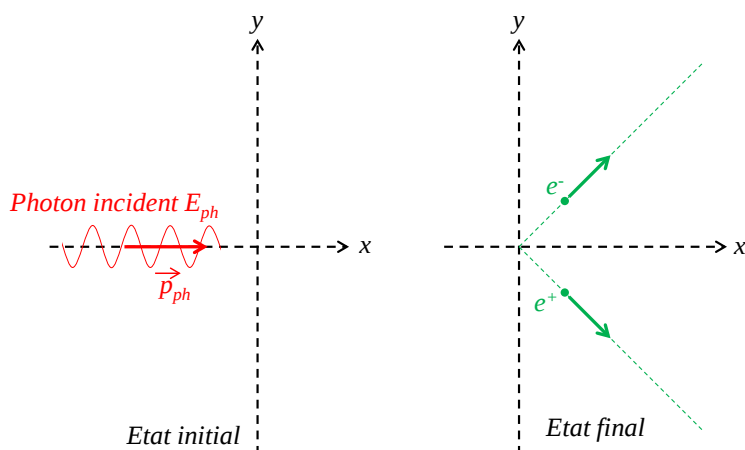


FIGURE 9.2 – Schéma de principe de la création de paire dans le vide

En effet, dans cette situation, on pourrait trouver un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ où les deux particules produites ont une quantité de mouvement totale nulle. (C'est le référentiel de centre de masse.) Par conservation de la quantité de mouvement, le photon incident devrait également avoir une quantité de mouvement nulle dans ce référentiel, ce qui est absurde.

Création de paire dans la matière

La réaction de création de paire à partir d'un photon peut avoir lieu en présence d'un corps annexe de masse M , voir la figure 9.3.

On suppose que la masse M est initialement au repos avant la collision avec le photon, puis est animé d'une quantité de mouvement $\vec{p}_M$ après le choc. Ainsi, son énergie avant collision est son énergie au repos Mc^2 , et son énergie après collision peut s'exprimer en fonction de p_M par $E_M = \sqrt{p_M^2 c^2 + M^2 c^4}$. Si on applique la conservation de l'énergie totale au système (photon +

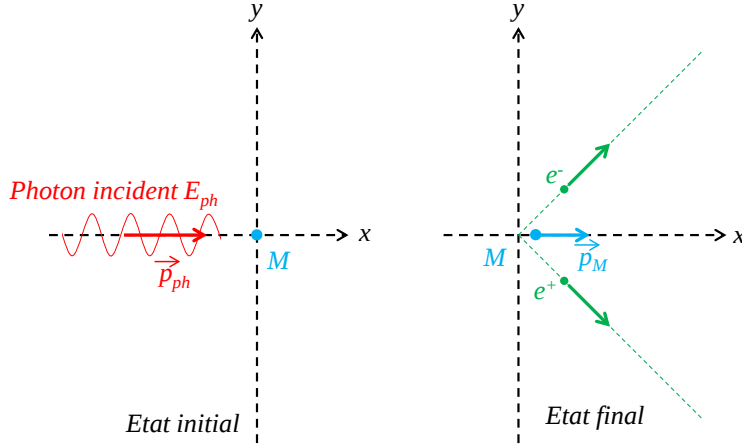


FIGURE 9.3 – Schéma de principe de la création de paire dans la matière

masse M) :

$$E_{\text{ph}} + Mc^2 = \gamma_- mc^2 + \gamma_+ mc^2 + \sqrt{p_M^2 c^2 + M^2 c^4},$$

où γ_+ est le facteur γ du positron (animé d'une vitesse $\vec{v}_+$) et γ_- est le facteur γ de l'électron (animé d'une vitesse $\vec{v}_-$).

Au seuil de la réaction ($E_{\text{ph}} = E_S$), les électrons/positrons sont par définition formés au repos, et donc leur énergie vaut mc^2 . Ainsi, au seuil, on peut écrire :

$$E_S + Mc^2 = 2mc^2 + \sqrt{p_M^2 c^2 + M^2 c^4}$$

Si on applique maintenant la conservation de la quantité de mouvement au seuil de la réaction, on trouve :

$$\vec{p}_{\text{ph}} = \frac{E_S}{c} \vec{u}_x = \vec{p}_M$$

C'est-à-dire que la quantité de mouvement initiale du photon a été transférée à M . On voit ainsi que la présence du corps M permet à la réaction de respecter la conservation de $\vec{p}_{\text{tot}}$.

On peut donc injecter l'expression de p_M dans l'équation de la conservation de l'énergie pour déterminer E_S :

$$E_S + Mc^2 = 2mc^2 + \sqrt{E_S^2 + M^2 c^4}$$

On vérifie que cette équation a une solution dès que $M > 2m$; en pratique la masse M est souvent un atome, et donc $M \gg m$. Dans ce cas, on peut montrer que

$$E_S \approx 2mc^2. \quad (9.69)$$

Ainsi, la création de paire est un processus qui peut avoir lieu dans la matière, à partir du moment où le photon a une énergie supérieure ou égale à $2mc^2$. En pratique, $m = 511 \text{ keV}/c^2$, et donc on observera la création spontanée de paire électron/positron pour des photons d'énergie $E_{\text{ph}} \geq 1,02 \text{ MeV}$.

Remarques : On peut également trouver d'autres processus associés à la création de paire.

- Réaction inverse : Dans ce cas, le processus provient de la recombinaison d'un électron et du positron, pour former un photon. Dans ce cas encore, la conservation de la quantité de mouvement impose la présence d'un troisième corps, et la réaction ne peut pas se faire dans le vide.

- Création de paire par choc photon-photon : Dans ce cas, la paire électron/positron est générée lors d'une collision entre deux photons suffisamment énergétiques. Ce processus peut avoir lieu dans le vide. En cosmologie, on considère qu'il s'agit d'une des premières réactions (dans les premières millisecondes du Big Bang), ayant conduit à l'apparition des premières particules massiques dans l'univers.

Appendice

Appendice A

Compléments mathématiques

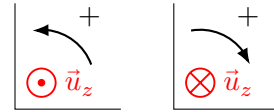
A.1 Produit vectoriel et produit mixte

A.1.1 Définition et calcul du produit vectoriel

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. On définit le **produit vectoriel** $\vec{a} \wedge \vec{b}$ entre ces vecteurs de la manière suivante. On peut toujours trouver une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ telle que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Alors

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \vec{u}_z, \quad (\text{A.1})$$

où $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ est l'angle orienté entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, les angles sont orientés par $\vec{u}_z$, ce qui signifie qu'un tire-bouchon se déplaçant dans le sens de $\vec{u}_z$ doit tourner dans le sens positif.



Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

- le résultat est un vecteur !
- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})|$;
- si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, alors $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$. En particulier, $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{a} = \vec{0}$;
- il est antisymétrique : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$;
- il est compatible avec la multiplication par un scalaire : $(\lambda \vec{a}) \wedge (\mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \wedge \vec{b})$;
- il est distributif par rapport à l'addition entre vecteurs : $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ et $(\vec{b} + \vec{c}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{c} \wedge \vec{a}$ (avec la convention que, comme tout produit, $\wedge$ est prioritaire par rapport à $+$). Attention à ne pas changer l'ordre des facteurs en distribuant !
- il se dérive comme un produit : $\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$. Attention à ne pas changer l'ordre des facteurs en dérivant !

Pour toute base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on a $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$. Par permutation circulaire, on obtient

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \rightarrow \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \rightarrow \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad (\text{A.2})$$

En utilisant les propriétés ci-dessus, on obtient l'expression du produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, de composantes respectives (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) dans une base orthonormée

directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \wedge (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) \\
 &= a_x b_x \underbrace{\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x}_{\vec{0}} + a_x b_y \underbrace{\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y}_{\vec{u}_z} + a_x b_z \underbrace{\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z}_{-\vec{u}_y} \\
 &\quad + a_y b_x \underbrace{\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x}_{-\vec{u}_z} + a_y b_y \underbrace{\vec{u}_y \wedge \vec{u}_y}_{\vec{0}} + a_y b_z \underbrace{\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z}_{\vec{u}_x} \\
 &\quad + a_z b_x \underbrace{\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x}_{\vec{u}_y} + a_z b_y \underbrace{\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y}_{-\vec{u}_x} + a_z b_z \underbrace{\vec{u}_z \wedge \vec{u}_z}_{\vec{0}} \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

On retrouve ces composantes comme ceci, selon la « règle du gamma » :

Composante selon $\vec{u}_x$:

$$\begin{array}{c}
 \cancel{a_x} \quad \cancel{b_x} \\
 a_y \quad b_y \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a_z \quad b_z
 \end{array} = a_y b_z - a_z b_y$$

Composante selon $\vec{u}_y$:

$$\begin{array}{c}
 a_x \quad b_x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \cancel{a_y} \quad \cancel{b_y} \\
 a_z \quad b_z \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a_x \quad b_x
 \end{array} = a_z b_x - a_x b_z$$

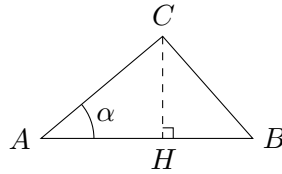
Composante selon $\vec{u}_z$:

$$\begin{array}{c}
 a_x \quad b_x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a_y \quad b_y \\
 \cancel{a_z} \quad \cancel{b_z}
 \end{array} = a_x b_y - a_y b_x$$

Explications :

- On écrit les deux vecteurs en colonne côte-à-côte ;
- Pour chaque composante, on raye mentalement la ligne correspondante ;
- Entre les deux lignes restantes, on effectue l'opération $\begin{array}{c} a_i \quad b_i \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_j \quad b_j \end{array} = a_i b_j - a_j b_i$;
- On ne doit cependant *pas traverser la ligne rayée*. Pour la deuxième composante, on reporte donc la première ligne sous la troisième.

Le produit vectoriel permet de calculer facilement l'aire S d'un triangle (ABC) quelconque.



En prenant (AB) comme base du triangle, la hauteur est $[CH]$, de longueur $HC = AC \sin \alpha$, où α est l'angle non orienté entre les côtés (AB) et (AC) . L'aire du triangle vaut $S = AB \times HC / 2$. Or $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| |\sin(\widehat{AB, AC})| = AB \times AC \sin \alpha$, donc

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|. \tag{A.4}$$

A.1.2 Double produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \tag{A.5}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}. \tag{A.6}$$

Démontrons (A.5). Soit $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{b}$; on peut donc écrire $\vec{b} = b_x \vec{u}_x$. Soit $\vec{u}_y$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}_x$ et tel que $\vec{c}$ soit dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$; on peut donc écrire

$\vec{c} = c_x \vec{u}_x + c_y \vec{u}_y$. Soit $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$ le vecteur tel que $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit une base orthonormée directe. On écrit $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$. On a alors

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge (b_x c_y \vec{u}_z) = -a_x b_x c_y \vec{u}_y + a_y b_x c_y \vec{u}_x. \quad (\text{A.7})$$

Par ailleurs,

$$\vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = b_x \vec{u}_x (a_x c_x + a_y c_y) - (c_x \vec{u}_x + c_y \vec{u}_y) a_x b_x = a_y b_x c_y \vec{u}_x - a_x b_x c_y \vec{u}_y, \quad (\text{A.8})$$

et on retrouve bien l'expression obtenue en (A.7). Pour démontrer (A.6), il suffit d'écrire que $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = -\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$ et d'utiliser (A.5).

Moyen mnémotechnique. On peut se souvenir des résultats (A.5) et (A.6) de la manière suivante :

- le membre de droite est une combinaison linéaire des deux vecteurs dans la parenthèse du membre de gauche ;
- le coefficient de chacun de ces vecteurs est le produit scalaire des deux autres vecteurs, au signe près ;
- ce signe est positif pour le vecteur au milieu du membre de gauche et négatif pour l'autre vecteur dans la parenthèse.

A.1.3 Produit mixte

Le produit mixte entre trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, souvent noté $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, est la quantité scalaire

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}). \quad (\text{A.9})$$

Si on écrit (avec les notations usuelles) les trois vecteurs dans une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, alors le produit mixte est le déterminant de la matrice 3×3 obtenue avec les coordonnées des trois vecteurs :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

(Ceci se démontre en écrivant le déterminant et le produit mixte à l'aide des neuf coordonnées, et en constatant qu'on obtient la même expression.) En particulier, (A.10) implique que le produit mixte est invariant par permutation circulaire des trois vecteurs :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]. \quad (\text{A.11})$$

Le volume du parallélépipède de côtés $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.

Appendice B

Compléments de physique

Les notions présentées dans cet appendice sont des compléments hors-programme.

B.1 Repère de Frenet

Le repère de Frenet est un repère local lié à la trajectoire d'un point matériel qui est parfois pratique dans certains calculs.

On considère un point M décrivant une courbe paramétrée par une variable λ . La variable λ peut être le temps t , mais d'autres variables sont parfois plus commodes, par exemple l'angle φ des coordonnées cylindriques pour un point décrivant une hélice d'axe Oz . Prenons un point A fixe sur la courbe. L'**abscisse curviligne** $s(M)$ du point M est la distance entre A et M le long de la courbe, comptée positivement si $\lambda(M) \geq \lambda(A)$ et négativement sinon.

Entre deux points $M(\lambda)$ et $M(\lambda + d\lambda)$ voisins sur la courbe, on a

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2} d\lambda, \quad (\text{B.1})$$

donc $|ds| = \|d\vec{OM}\|$. On peut calculer l'abscisse curviligne en intégrant ds :

$$s(M) = \int_A^M ds = \int_{\lambda'=\lambda(A)}^{\lambda(M)} \left(\frac{ds}{d\lambda'}\right) d\lambda'. \quad (\text{B.2})$$

Soit

$$\vec{u}_T := \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{d\vec{OM}/d\lambda}{ds/d\lambda} \quad (\text{B.3})$$

le **vecteur tangent** à la courbe en M . Il est par construction unitaire et dirigé vers les valeurs croissantes de λ .

Soit

$$\vec{u}_N := \frac{d\vec{u}_T/ds}{\|d\vec{u}_T/ds\|} = \frac{d\vec{u}_T/d\lambda}{\|d\vec{u}_T/d\lambda\|} \quad (\text{B.4})$$

le **vecteur normal**. Par construction, $\vec{u}_N$ est unitaire. Par ailleurs, $\vec{u}_T$ étant un vecteur de norme constante, $\vec{u}_N$ est perpendiculaire à $\vec{u}_T$. Le point M et les vecteurs $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ forment le **plan osculateur** à la courbe en M . Le vecteur $\vec{u}_N$ est **centripète**^{*1}, c'est-à-dire dirigé vers l'intérieur de la courbure.

La quantité

$$R_c := \frac{1}{\|d\vec{u}_T/ds\|} = \frac{|ds/d\lambda|}{\|d\vec{u}_T/d\lambda\|} \quad (\text{B.5})$$

1. On qualifie à l'inverse de **centrifuge** un vecteur dirigé vers l'extérieur de la courbure.

a la dimension d'une longueur et est appelée **rayon de courbure**. C'est le rayon du **cercle osculateur**, c'est-à-dire du cercle du plan osculateur approchant au mieux la courbe au voisinage de M (son centre est le point C tel que $\overrightarrow{MC} = R_c \vec{u}_N$). Bien sûr, si la trajectoire est circulaire, le rayon de courbure n'est autre que le rayon du cercle ; si la trajectoire est rectiligne, $R_c = \infty$.

Introduisons enfin le **vecteur binormal** $\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$. Le repère orthonormé direct $(M, \vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{u}_B)$ est appelé **repère de Frenet** ou **repère intrinsèque**.

Exprimons la vitesse et l'accélération de M dans ce repère. On a

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad (\text{B.6})$$

d'où

$$\vec{v} = v \vec{u}_T, \quad (\text{B.7})$$

en notant $v = ds/dt$. La quantité v vaut $+\|\vec{v}\|$ si M parcourt la courbe dans le sens des λ croissants et $-\|\vec{v}\|$ sinon.

De même,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad (\text{B.8})$$

d'où

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_N. \quad (\text{B.9})$$

La quantité $a_T = dv/dt$ est l'**accélération tangentielle** et correspond à un changement de la **norme** de la vitesse. La quantité $a_N = v^2/R_c$ est l'**accélération normale** et correspond à un changement de *direction* de la vitesse ; elle est centripète.

B.2 Compléments sur l'axe instantané de rotation

B.2.1 Position de l'axe

Trouvons la position de l'axe instantané de rotation. Pour $A \in \Delta$, décomposons $\overrightarrow{O'A}$ sous la forme

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'A}_{//} + \overrightarrow{O'A}_{\perp}, \quad (\text{B.10})$$

où

$$\overrightarrow{O'A}_{//} = \frac{(\overrightarrow{O'A} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}) \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2} \quad (\text{B.11})$$

est la projection de $\overrightarrow{O'A}$ sur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, donc parallèle à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, et

$$\overrightarrow{O'A}_{\perp} = \overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{O'A}_{//} \quad (\text{B.12})$$

est orthogonal à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. On a

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{O'A}_{//} + \overrightarrow{O'A}_{\perp}) = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A}_{\perp} \quad (\text{B.13})$$

et

$$\begin{aligned} \vec{v}_A \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} &= \vec{0} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A}_{\perp}) \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}) \overrightarrow{O'A}_{\perp} - \underbrace{(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{O'A}_{\perp})}_{=0} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

donc

$$\overrightarrow{O'A}_{\perp} = \frac{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2}. \quad (\text{B.15})$$

Ceci fixe la position de l'intersection de Δ avec le plan contenant O' et perpendiculaire à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

B.2.2 Identité des axes instantanés de rotation réciproques

L'axe instantané de rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ est identique à celui de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. En effet, soit B le point fixe dans $\mathcal{R}$ coïncidant à un instant t avec un point $A \in \Delta$. Pour tout t ,

$$\vec{0} = \vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'B}, \quad (\text{B.16})$$

donc

$$\vec{v}'_B = -\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'B}. \quad (\text{B.17})$$

De même,

$$\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}'_A}_{=\vec{0} \text{ à } t} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{O'A}}_{=\overrightarrow{O'B} \text{ à } t}, \quad (\text{B.18})$$

donc, à l'instant t ,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'B} = -\vec{v}'_B. \quad (\text{B.19})$$

Comme $\vec{v}_A$ est parallèle à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$, le vecteur $\vec{v}'_B$ est parallèle à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$. Le point B étant par hypothèse fixe dans $\mathcal{R}$, on en déduit que B appartient à l'axe instantané de rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$, ce qui suffit pour conclure à l'identité des axes de rotation réciproques.

B.3 Compléments sur les solides

B.3.1 Évolution du vecteur rotation

Calculons, en toute généralité, la dérivée du moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*$ d'un solide à partir de son expression (4.62). (La dérivée notée $\frac{d}{dt}$ dans la suite est la dérivée dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, ou dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, au choix. En effet, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ sont en translation l'un par rapport à l'autre, donc la dérivée dans $\mathcal{R}$ est égale à la dérivée dans $\mathcal{R}^*$.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}^* &= \frac{d}{dt} \left(I_1 \Omega_1 \vec{u}_1 + I_2 \Omega_2 \vec{u}_2 + I_3 \Omega_3 \vec{u}_3 \right) \\ &= \left(I_1 \dot{\Omega}_1 \vec{u}_1 + I_2 \dot{\Omega}_2 \vec{u}_2 + I_3 \dot{\Omega}_3 \vec{u}_3 \right) + \left(I_1 \Omega_1 \frac{d}{dt} \vec{u}_1 + I_2 \Omega_2 \frac{d}{dt} \vec{u}_2 + I_3 \Omega_3 \frac{d}{dt} \vec{u}_3 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Mais, d'après la formule de Bour (2.12), on a

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_i = \frac{d_{\mathcal{R}'}}{dt} \vec{u}_i + \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_i = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_i, \quad (\text{B.21})$$

où $\mathcal{R}'$ est le référentiel lié au solide. Dans $\mathcal{R}'$, $\vec{u}_i$ est fixe et donc $d_{\mathcal{R}'} \vec{u}_i / dt = \vec{0}$. On a donc

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_1 = \Omega_3 \vec{u}_2 - \Omega_2 \vec{u}_3, \quad \frac{d}{dt} \vec{u}_2 = \Omega_1 \vec{u}_3 - \Omega_3 \vec{u}_1, \quad \frac{d}{dt} \vec{u}_3 = \Omega_2 \vec{u}_1 - \Omega_1 \vec{u}_2, \quad (\text{B.22})$$

et finalement

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = [I_1 \dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3] \vec{u}_1 + [I_2 \dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3] \vec{u}_2 + [I_3 \dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2] \vec{u}_3. \quad (\text{B.23})$$

(Équations d'Euler). En particulier, si le solide est isolé, ou si la somme des moments des forces extérieures est nulle, $\vec{L}^*$ doit être constant et donc

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \quad I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3, \quad I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2. \quad (\text{B.24})$$

Une conséquence importante est que *le mouvement de rotation d'un solide isolé n'est pas nécessairement uniforme*; la direction de l'axe de rotation et la vitesse de rotation autour de celui-ci peuvent varier. C'est la *précession de Poinsot*.

B.3.2 Mise en équation de la toupie

On considère une toupie constitué d'une boule de masse m et de centre C , et d'une tige $[AB]$ de masse négligeable traversant la boule en C . L'extrémité B de la tige glisse sur le sol sans frottement. La distance BC est notée ℓ .

On repère la position du point C par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) (avec z l'altitude de C), et on doit encore repérer l'orientation de la toupie dans l'espace ; pour cela, on utilise les *angles d'Euler* ². Les deux premiers angles d'Euler θ et φ sont les angles habituels des coordonnées sphériques : ils repèrent ici l'extrémité A de la toupie dans le repère $(C, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. (Les trois vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont fixes, ils ne sont pas liés à la toupie.) Le troisième angle d'Euler est l'angle ψ , qui mesure de combien la toupie a tourné autour de son axe (par rapport à un point de départ arbitraire et depuis un instant arbitraire).

On a introduit six variables, $(x, y, z, \theta, \varphi, \psi)$, pour décrire la position et l'orientation de la toupie, mais en fait on a une variable en trop. En effet, on sait que le point B touche le sol (c'est-à-dire le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$), et donc on doit avoir

$$z = \ell \cos \theta. \quad (\text{B.25})$$

La toupie est soumise à deux forces extérieures : son poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ qui s'applique en C , avec g l'accélération de la pesanteur, et la réaction normale du sol $\vec{N} = N\vec{u}_z$ qui s'applique au point B , avec $N > 0$.

Commençons par écrire le théorème du centre de masse. Les deux forces sont verticales, et donc en projection sur les trois axes :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = N - mg. \quad (\text{B.26})$$

Les deux premières équations nous disent que $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont constants. Si, initialement, ces quantités sont nulles, alors elles restent nulles et x et y sont constants : le point B bouge sur le sol, mais le point C reste toujours à la verticale d'un même point.

Pour l'instant, la troisième équation de (B.26) ne nous apprend pas grand chose parce que l'on ne connaît pas N .

Écrivons maintenant le théorème du moment cinétique appliqué au point C :

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{N}) + \vec{\mathcal{M}}_C(m\vec{g}). \quad (\text{B.27})$$

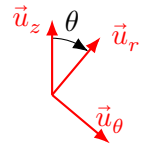
Le moment du poids est nul, puisqu'il s'applique en C . Pour le moment de $\vec{N}$, on a

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{N}) = \vec{CB} \wedge \vec{N} = -\ell \vec{u}_r \wedge N\vec{u}_z = \ell N \sin \theta \vec{u}_\varphi, \quad (\text{B.28})$$

où l'on a utilisé la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et la relation

$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta. \quad (\text{B.29})$$

(Les relations comme celles-ci, entre vecteurs de différentes bases, ne sont pas à connaître, mais on doit être capable de les retrouver en faisant un petit dessin au brouillon comme celui ci-contre.)



2. Il y a plusieurs variantes pour définir les angles d'Euler, on peut rencontrer des définitions légèrement différentes.

Comme on néglige la masse de la tige, la toupie est une boule homogène, tous les axes sont des axes principaux et l'on a

$$\vec{L}_C = I\vec{\Omega}, \quad (\text{B.30})$$

où I est le moment d'inertie de la boule (qui dépend de son rayon, et qui est calculé en TD). En reportant (B.30) et (B.28) dans (B.27), puis en utilisant (B.26) pour avoir l'expression de N , on arrive à

$$I\dot{\vec{\Omega}} = \ell N \sin \theta \vec{u}_\varphi = \ell m(g + \ddot{z}) \sin \theta \vec{u}_\varphi. \quad (\text{B.31})$$

Il nous reste à calculer $\vec{\Omega}$ et sa dérivée. On a

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_z + \dot{\psi} \vec{u}_r + \dot{\theta} \vec{u}_\varphi, \quad (\text{B.32})$$

Chacun des termes représente une rotation simple, où un seul angle change : si on maintient θ et φ fixes, c'est-à-dire que la tige $[AB]$ est immobile, et que l'on fait tourner la toupie autour de cet axe, c'est-à-dire que l'angle φ bouge, il doit être clair que le vecteur vitesse angulaire est $\dot{\psi} \vec{u}_r$. Si maintenant on garde θ et ψ fixes, mais que φ bouge, c'est que l'on fait une rotation autour de $\vec{u}_z$ de vecteur $\dot{\varphi} \vec{u}_z$. Si finalement on garde φ et ψ fixes et que θ augmente (la toupie tombe!), on fait une rotation de vecteur $\dot{\theta} \vec{u}_\varphi$. La rotation complète est la somme (B.32) de ces trois termes.

On peut dériver, en utilisant les expressions (1.26) des dérivées des vecteurs de la base sphérique :

$$\dot{\vec{\Omega}} = \ddot{\varphi} \vec{u}_z + \ddot{\psi} \vec{u}_r + \ddot{\theta} \vec{u}_\varphi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi) + \dot{\theta}(-\dot{\varphi}(\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)) \quad (\text{B.33})$$

En remplaçant $\vec{u}_z$ par son expression (B.29), et en regroupant les termes, on obtient

$$\dot{\vec{\Omega}} = [\ddot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\psi} - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta] \vec{u}_r + [-\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta] \vec{u}_\theta + [\ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta] \vec{u}_\varphi. \quad (\text{B.34})$$

En comparant avec (B.31), il vient

$$\ddot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\psi} - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta = 0, \quad -\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta = 0, \quad I[\ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta] = \ell m(g + \ddot{z}) \sin \theta. \quad (\text{B.35})$$

La première égalité s'intègre, un peu miraculeusement, en

$$\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = A = \text{Cste}. \quad (\text{B.36})$$

(On vérifie qu'en dérivant cette égalité par rapport au temps, on retrouve la première égalité de (B.35).) Si on multiplie la première égalité de (B.35) par $\cos \theta$, et qu'on soustrait la deuxième égalité multipliée par $\sin \theta$, on obtient

$$\cos \theta [\ddot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\psi} - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta] - \sin \theta [-\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta] = 0, \quad (\text{B.37})$$

ce qui implique, après simplification,

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0, \quad (\text{B.38})$$

ce qui s'intègre en

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = B = \text{Cste}. \quad (\text{B.39})$$

Les deux égalités (B.36) et (B.39) sont assez mystérieuses. En mécanique avancée, en utilisant la théorie des lagrangiens, on apprend que puisque l'énergie de la toupie ne dépend ni de φ , ni de ψ (elle ne dépend pas des angles, mais elle dépend de leurs dérivées $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$), alors on s'attend à trouver deux quantités conservées, et ces deux quantités sont justement (B.36) et (B.39).

Une fois qu'on a déterminé A et B grâce à la condition initiale, on peut résoudre le système $\{(B.36), (B.39)\}$ et obtenir $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction de θ :

$$\dot{\varphi} = \frac{B - A \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{A - B \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (B.40)$$

Il reste la troisième égalité de (B.35). Si on remplace $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ par leurs expressions (B.40), et qu'on remplace $\ddot{z}$ par $-\ell[\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta]$ (obtenue en dérivant deux fois (B.25)), on arrive à une équation différentielle du deuxième ordre en θ , absolument pas linéaire et en fait assez affreuse, que l'on peut essayer de résoudre numériquement.

Contentons-nous de vérifier qu'il existe des solutions avec θ constant. Si θ est constant, alors $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ et z sont également constants d'après (B.40) et (B.25). La troisième égalité de (B.35) se réduit alors, après simplification par $\sin \theta$, en

$$\dot{\varphi} \dot{\psi} = \frac{\ell m g}{I}. \quad (B.41)$$

Plus la toupie tourne vite sur elle-même ($\dot{\psi}$ grand), plus le mouvement de précession ($\dot{\varphi}$) est faible.

B.3.3 Tenseur d'inertie

Reprenons, de manière un peu plus générale et complète, le calcul de l'énergie cinétique E_c^* et du moment cinétique $\vec{L}^*$ d'un solide dans son référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$. Dans $\mathcal{R}^*$, le point C est par définition fixe, et (4.25) donne, pour un point M quelconque,

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad \text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{CM}. \quad (B.42)$$

(Dans toute cette section, on travaille dans le référentiel barycentrique. Pour alléger les notations, on écrit les vecteurs position et vitesse $\vec{r}$ et $\vec{v}_M$ plutôt que $\vec{r}^*$ et $\vec{v}_M^*$.)

On a alors

$$E_c^* = \frac{1}{2} \iiint dm \|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\|^2, \quad \vec{L}^* = \iiint dm \vec{r} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}). \quad (B.43)$$

Il existe une relation simple entre ces deux quantités ; en utilisant la propriété de rotation (A.11) du produit mixte, on a

$$\|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\|^2 = (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = [\vec{r} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})] \cdot \vec{\Omega}. \quad (B.44)$$

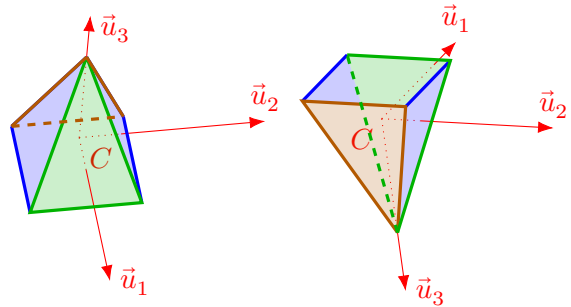
On obtient donc que

$$E_c^* = \frac{1}{2} \vec{L}^* \cdot \vec{\Omega}. \quad (B.45)$$

Exprimons maintenant $\vec{L}^*$ sans produit vectoriel ; avec la règle du double produit vectoriel (A.5), on a

$$\vec{r} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \vec{r}^2 \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}^* = \iiint dm [\vec{r}^2 \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}]. \quad (B.46)$$

Choisissons de manière arbitraire une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée au solide, c'est-à-dire telle que les vecteurs tournent avec celui-ci. (Par exemple, sur la figure ci-contre, l'axe $\vec{u}_3$ va toujours du centre C vers la pointe de la pyramide, et l'axe $\vec{u}_1$ sort toujours par la face verte.) Nous allons calculer $\vec{L}^*$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. On commence par écrire $\vec{r}$, $\vec{\Omega}$ et $\vec{L}^*$ dans cette base :



$$\vec{r} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3, \quad \vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{u}_1 + \Omega_2 \vec{u}_2 + \Omega_3 \vec{u}_3, \quad \vec{L}^* = L_1^* \vec{u}_1 + L_2^* \vec{u}_2 + L_3^* \vec{u}_3. \quad (B.47)$$

Autrement dit, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $\vec{r} \cdot \vec{u}_i = x_i$, et $\vec{\Omega} \cdot \vec{u}_i = \Omega_i$, et $\vec{L}^* \cdot \vec{u}_i = L_i^*$. En prenant le produit scalaire de (B.46) avec le vecteur $\vec{u}_i$, on arrive donc à

$$L_i^* = \iiint dm \left[\vec{r}^2 \Omega_i - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) x_i \right]. \quad (\text{B.48})$$

Avec (B.47), on a aussi, par définition du produit scalaire,

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{r} = \Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2 + \Omega_3 x_3 = \sum_{j=1}^3 \Omega_j x_j. \quad (\text{B.49})$$

(Le choix de la variable de sommation j est entièrement arbitraire, bien sûr.) On va écrire une autre égalité, un peu surprenante : pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \Omega_j, \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

On appelle δ_{ij} le **symbole de Kronecker**. En reportant dans (B.48), on obtient

$$L_i^* = \iiint dm \left[\vec{r}^2 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \Omega_j - x_i \sum_{j=1}^3 \Omega_j x_j \right] = \iiint dm \sum_{j=1}^3 [\vec{r}^2 \delta_{ij} - x_i x_j] \Omega_j. \quad (\text{B.51})$$

En inversant somme et intégrale, on arrive à

$$L_i^* = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega_j \quad \text{avec} \quad I_{ij} = \iiint dm [\vec{r}^2 \delta_{ij} - x_i x_j], \quad (\text{B.52})$$

et, avec (B.45),

$$E_c^* = \frac{1}{2} \vec{L}^* \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 L_i^* \Omega_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \quad (\text{B.53})$$

On rappelle que si $i \neq j$, le symbole de Kronecker est nul et il ne reste que $I_{ij} = - \iiint dm x_i x_j$. Lorsque $i = j$, on a $\delta_{ij} = 1$, et on doit prendre en compte $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

L'objet I_{ij} a deux indices qui varient de 1 à 3, et peut être représenté par une matrice 3×3 . On l'appelle la **matrice d'inertie**. Cette matrice est clairement symétrique ($I_{ij} = I_{ji}$) et s'écrit, explicitement,

$$[I] = \begin{pmatrix} \iiint dm (x_2^2 + x_3^2) & - \iiint dm x_1 x_2 & - \iiint dm x_1 x_3 \\ - \iiint dm x_2 x_1 & \iiint dm (x_1^2 + x_3^2) & - \iiint dm x_2 x_3 \\ - \iiint dm x_3 x_1 & - \iiint dm x_3 x_2 & \iiint dm (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.54})$$

Pour un vecteur $\vec{w}$ quelconque, on note $[\vec{w}]$ le vecteur colonne composé des composantes de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. On a alors :

$$[\vec{L}^*] = [I] [\vec{\Omega}], \quad (\text{B.55})$$

où le membre de droite est la multiplication d'une matrice par un vecteur colonne.

Ainsi, par exemple, si le solide tourne autour de l'axe $\vec{u}_3$, c'est-à-dire si $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_3$, on a $L_i^* = I_{i3} \Omega$, et donc

$$\vec{L}^* = I_{13} \Omega \vec{u}_1 + I_{23} \Omega \vec{u}_2 + I_{33} \Omega \vec{u}_3, \quad E_c^* = \frac{1}{2} I_{33} \Omega^2, \quad (\text{B.56})$$

Dans l'expression $I_{33} = \iiint dm (x_1^2 + x_2^2)$, on reconnaît l'expression (4.26) de I_Δ avec (Δ) l'axe de rotation $(C, \vec{u}_3)$ puisque $x_1^2 + x_2^2$ est justement le terme $r_\perp^2$, carré de la distance à l'axe de rotation. On peut montrer que si cet axe est un axe de symétrie, alors $I_{13} = I_{23} = 0$.

Comme les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ sont liés au solide, la matrice d'inertie ne dépend pas de la position ou de l'orientation du solide ; on peut la calculer une bonne fois pour toutes (pour un solide donné) et l'utiliser pour calculer $\vec{L}^*$ et E_c^* pour un vecteur $\vec{\Omega}$ quelconque.

Notion de tenseur d'inertie

Dans cette section, nous avons commencé par choisir de manière arbitraire une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée au solide. Si nous choisissons une autre base orthonormée $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$, également liée au solide, alors le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ aura des composantes Ω'_i différentes dans cette nouvelle base. Les composantes I'_{ij} de la matrice d'inertie seront également différentes, mais, évidemment, le moment et l'énergie cinétiques barycentriques demeurent inchangés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}^* = \sum_{i=1}^3 L_i^* \vec{u}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega_j \vec{u}_i, \quad E_c^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega_i \Omega_j \quad \text{dans } (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \\ \vec{L}^* = \sum_{i=1}^3 L_i^* \vec{u}'_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I'_{ij} \Omega'_j \vec{u}'_i, \quad E_c^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I'_{ij} \Omega'_i \Omega'_j \quad \text{dans } (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3). \end{array} \right. \quad (\text{B.57})$$

Des quantités telles que E_c^* , $\vec{L}^*$ ou $\vec{\Omega}$ sont des quantités intrinsèques, indépendantes du système de coordonnées, alors que les Ω_i , les L_i^* ou les I_{ij} en dépendent. On dit que les Ω_i représentent le vecteur $\vec{\Omega}$ dans une certaine base.

De la même manière, les composantes I_{ij} de la matrice d'inertie ne sont que l'écriture dans une certaine base d'un objet intrinsèque noté I ou parfois $\underline{I}$ qu'on appelle le **tenseur d'inertie**. On écrira alors, sans faire référence au système de coordonnées,

$$\vec{L}^* = I \vec{\Omega}, \quad E_c^* = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot (I \vec{\Omega}). \quad (\text{B.58})$$

(Attention, I n'est pas un scalaire, mais un opérateur agissant sur $\vec{\Omega}$. En général, $\vec{L}^*$ n'est pas colinéaire à $\vec{\Omega}$ et $\vec{\Omega} \cdot (I \vec{\Omega})$ n'est pas égal à $I \vec{\Omega}^2$.)

Mathématiquement, le tenseur d'inertie I représente une application linéaire qui transforme le vecteur $\vec{\Omega}$ en un vecteur $\vec{L}^*$. (L'application est linéaire parce que $I(a\vec{\Omega}_1 + b\vec{\Omega}_2) = aI\vec{\Omega}_1 + bI\vec{\Omega}_2$.)^{*3}

Dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ donnée, cette application linéaire s'écrit à l'aide d'une matrice $[I] = (I_{ij})$ qui transforme les composantes du vecteur $\vec{\Omega}$ pour donner les composantes du vecteur $\vec{L}^*$ dans la même base.

On a vu que la matrice I_{ij} était symétrique ; on dit alors que le tenseur I est symétrique, ce qui implique (à faire en exercice) $\vec{A} \cdot (I \vec{B}) = (I \vec{A}) \cdot \vec{B}$.

Axes principaux

On a dit qu'un axe (Δ) passant par le centre de masse C et était un axe principal du solide si, lorsque le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est parallèle à (Δ) , alors le moment cinétique est également parallèle à (Δ) . Autrement dit, en posant $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé selon (Δ) , si $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}$, alors $\vec{L}^* = L^* \vec{u}$. On a donc, si $\vec{u}$ est selon un axe principal,

$$L^* \vec{u} = I(\Omega \vec{u}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad I \vec{u} = \frac{L^*}{\Omega} \vec{u}. \quad (\text{B.59})$$

On dit alors que $\vec{u}$ est un **vecteur propre** du tenseur I , dont la valeur propre correspondante est L^*/Ω . On utilise le même vocabulaire que pour les matrices parce que c'est le même concept. D'ailleurs, dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée au solide, le vecteur $\vec{u}$ écrit dans cette base est un vecteur propre de la matrice I_{ij} qui représente le tenseur I dans cette base.

Un théorème d'algèbre très important, appelé le **théorème spectral**, s'énonce ainsi :

Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable avec des vecteurs propres orthogonaux deux à deux et des valeurs propres réelles.

3. Attention, le vocabulaire autour des tenseurs dépend des auteurs : certains préfèrent appeler **opérateur d'inertie** l'objet I dans $\vec{L}^* = I \vec{\Omega}$ qui transforme un vecteur en un autre vecteur, et réservent le terme de tenseur à une application qui transforme deux (ou plus...) vecteurs en un scalaire, notant $I(\vec{A}, \vec{B})$ ou $I \vec{A} \vec{B}$ la quantité $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} A_i B_j$; ainsi, avec cette notation, on pourrait écrire $E_c^* = \frac{1}{2} I \vec{\Omega} \vec{\Omega}$.

(Le fait que la matrice est réelle est important, mais il existe une version de ce théorème pour des matrices complexes qui a une grande importance en mécanique quantique.)

Cela implique (il faut prendre le temps d'y réfléchir un peu...) que l'on peut choisir une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée au solide telle que les trois vecteurs de la base sont des vecteurs propres du tenseur. En particulier, ces trois vecteurs donnent les directions de trois axes principaux du solide.

Autrement dit, il existe une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liée au solide et trois scalaires I_1, I_2, I_3 tels que

$$I\vec{u}_i = I_i \vec{u}_i, \quad \text{ou encore} \quad I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.60})$$

On retrouve alors facilement les expressions (4.62).

B.4 Calcul de l'intégrale dans le problème de Kepler

Dans le chapitre 5, en remplaçant (5.30) dans la formule intégrale (5.28), on arrive à

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{L^2}{r^2}}}. \quad (\text{B.61})$$

Miraculeusement, cette intégrale se calcule. On remarque d'abord que le dénominateur est une fonction de $1/r$, et que le dr/r^2 du numérateur est justement, au signe près, la différentielle de $1/r$. On fait donc naturellement le changement de variable $x = 1/r$ pour obtenir

$$\varphi = \int_{1/r_{\min}}^{1/r} \frac{-L dx}{\sqrt{2m(E + \alpha x) - L^2 x^2}}. \quad (\text{B.62})$$

Le contenu de la racine carrée est un polynôme en x du second degré; on le met sous sa forme canonique, puis on factorise par $m^2\alpha^2/L^2$:

$$2m(E + \alpha x) - L^2 x^2 = -L^2 \left(x - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + 2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2} = \frac{m^2\alpha^2}{L^2} \left[1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} - \left(\frac{L^2}{m\alpha}x - 1\right)^2\right], \quad (\text{B.63})$$

et donc

$$\varphi = \int_{1/r_{\min}}^{1/r} \frac{-\frac{L^2}{m\alpha} dx}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} - \left(\frac{L^2}{m\alpha}x - 1\right)^2}}. \quad (\text{B.64})$$

On introduit les quantités suivantes :

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} = r_0, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{E}{U_0}}. \quad (\text{B.65})$$

On obtient

$$\varphi = \int_{1/r_{\min}}^{1/r} \frac{-p dx}{\sqrt{e^2 - (px - 1)^2}} = \int_{1/r_{\min}}^{1/r} \frac{-\frac{p}{e} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{px-1}{e}\right)^2}}. \quad (\text{B.66})$$

Cette intégrale se calcule à l'aide de la fonction arccos : on rappelle que $\arccos'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, et donc $\frac{d}{dx} \arccos(ax+b) = -a/\sqrt{1-(ax+b)^2}$. On obtient donc

$$\varphi = \arccos\left(\frac{p/r - 1}{e}\right) - \arccos\left(\frac{p/r_{\min} - 1}{e}\right). \quad (\text{B.67})$$

Le deuxième terme du membre de droite est nul : en effet, les valeurs de $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont telles que $E = E_p^{\text{eff}}(r_{\min}) = E_p^{\text{eff}}(r_{\max})$. Cela signifie que la racine carrée dans (5.28) s'annule quand r vaut $r_{\min}$ ou $r_{\max}$. En suivant les étapes, on voit que la racine carrée dans (B.66) s'annule quand x vaut $1/r_{\min}$ ou $1/r_{\max}$. Comme $r_{\min}$ est plus petit que $r_{\max}$, cela implique que

$$\frac{p/r_{\min} - 1}{e} = +1 \quad \text{et} \quad \frac{p/r_{\max} - 1}{e} = -1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}. \quad (\text{B.68})$$

Le deuxième terme dans le membre de droite de (B.67) est donc $\arccos(1) = 0$. Finalement, en prenant le cosinus des deux côtés, on obtient $\cos \varphi = (p/r - 1)/e$, puis, finalement,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (\text{B.69})$$