Symétries quantiques des systèmes intégrables

Par Denis Bernard.
En vue de l'obtention du diplome d'habilitation à diriger des recherches.

Nous décrivons et développons quelques aspects géométriques et algèbriques des modèles intégrables. L'accent est porté sur la mise en évidence ainsi que sur l'étude des symétries quantiques présentes dans ces modèles. Ces symétries se manifestent dans les cas classiques sous la forme d'actions de groupes de Lie Poisson de dimensions infinies et, dans les cas quantiques sous la forme d'actions de groupes quantiques de dimensions infinies. Elles conduisent à de puissantes méthodes de résolution.

1 Les transformations d'habillage sur un exemple.

Nous choisissons d'introduire la notion d'action de Lie-Poisson sur un exemple : les transformations d'habillage dans les équations aux solitons en dimension deux. Ces transformations forment un groupe de symétrie, analogue classique des groupes quantiques qui se manifestent dans les modèles intégrables. Plutôt qu'un traitement général — un peu trop abstrait — nous avons préféré en fournir un exemple typique [1].

1.1 Le modèle d'Heisenberg classique.

Commençons par la définition du modèle. Comme pour tout système hamiltonien classique, nous devons introduire l'espace des phases muni de sa structure symplectique ainsi que l'hamiltonien. Les variables classiques sont les variables de spins suivantes :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{3} S^i(x)\sigma_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{3} S^i(x)^2 = s^2$$

où σ_i sont les matrices de Pauli, satisfaisant $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ et $tr(\sigma_j\sigma_k) = 2\delta_{jk}$. Par la suite, s est un nombre réel fixé. Les crochets de Poisson sont définis par:

$$\{S^i(x), S^j(y)\} = \epsilon^{ijk} S^k(x)\delta(x-y) \tag{1}$$

Ils sont non dégénérés grâce à la contrainte, $\sum_i S^i(x)^2 = s^2$, qui fixe la norme du vecteur $S(x)$. L'hamiltonien est:

$$H_1 = -\frac{1}{4}\int_0^L dx\ tr(\partial_x S \partial_x S) \tag{2}$$

Les équations de mouvement déduites de cet hamiltonien sont:

$$\partial_t S = -\tfrac{i}{2}\Big[S, \partial_x^2 S\Big] = \tfrac{i}{2}\partial_x\Big[\ S_x, S\ \Big] \tag{3}$$

Notez que ces dernières expriment la loi de conservation pour un courant prenant valeurs dans l'algèbre $su(2)$.

Le modèle d'Heisenberg est complètement intégrable. Son intégrabilité s'exprime par le fait que les équations (3) peuvent s'écrire comme une condition de courbure nulle pour un problème auxiliaire. En effet, introduisons la connexion de Lax,

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{i}{\lambda} S(x) \\ A_t &= -\frac{2is^2}{\lambda^2} S(x) + \frac{1}{2\lambda}[S(x), \partial_x S(x)] \end{aligned} \tag{4}$$

Alors, la condition de courbure nulle,

$$[\partial_t + A_t, \partial_x + A_x] = 0$$

est équivalente aux équations de mouvement. La connexion (4) est un élément de l'algèbre de boucles sur $su(2)$, notée $\widetilde{su(2)} = su(2) \otimes C\,[\lambda, \lambda^{-1}]$.

Un ingrédient important est la matrice de transfert $T(x, \lambda)$, définie par:

$$T(x,\lambda) \;=\; P\exp\left[-\int_0^x A_x(y,\lambda)dy\right] \tag{5}$$

La matrice de monodromie $T(\lambda)$ est simplement $T(L,\lambda)$. D'après sa définition $T(x,\lambda)$ est analytique en λ avec une singularité essentielle en $\lambda = 0$. D'après l'eq.(5), on trouve facilement un développement de la matrice de transfert au voisinage de $\lambda = \infty$:

$$T(x,\lambda) = 1 - \tfrac{i}{\lambda}\int_0^x dyS(y) - \tfrac{1}{\lambda^2}\int_0^x dyS(y)\int_0^y dzS(z) + \cdots$$

Ce développement en $1/\lambda$ possède un rayon de convergence infini. Nous l'étudierons plus en détail par la suite, en relation avec les symétries non-abéliennes du modèle.

L'importance de la matrice de monodromie réside dans le fait que l'on peut évaluer les crochets de Poisson de ses éléments. On trouve [20]:

$$\left\{T(\lambda) \overset{\otimes}{,} T(\mu)\right\} = \tfrac{1}{2}\Big[\ r(\lambda,\mu)\ ,\ T(\lambda)\otimes T(\mu)\ \Big] \tag{6}$$

avec

$$r(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu}\sum_i \sigma_i \otimes \sigma_i \tag{7}$$

De ce résultat, il suit que $tr(T(\lambda))$ est une fonction génératrice de quantités en involution.

Choisissons des conditions aux limites périodiques. La matrice de monodromie $T(\lambda)$ s'écrit:

$$T(\lambda) = \cos P_0(\lambda)\ \mathrm{Id} + i\sin P_0(\lambda)\ M(\lambda) \tag{8}$$

avec $M(\lambda)$ de trace nulle. La trace de la matrice de transfert est donc $tr(T(\lambda)) = 2\cos P_0(\lambda)$. Ainsi, on peut utiliser $P_0(\lambda)$ comme fonction génératrice des grandeurs conservées en involution. Les charges conservées locales sont obtenues en développant $tr(T(\lambda))$ au voisinage du point $\lambda = 0$ (et non $\lambda = \infty$):

$$P_o(\lambda) = -\frac{sL}{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\ I_n$$

Les quantities I_n sont des intégrales de densités locales. Les deux premières, I_0 and I_1, correspondent respectivement à l'impulsion et à l'énergie.

1.2 Symétries non-abéliennes.

Puisque l'hamiltonien est un scalaire, les équations de mouvement sont invariantes sous $su(2)$. Donc, pour tout élément $v \in su(2)$, la transformation

$$\delta_v\ S(x)\ =\ i\Big[\ v\ ,\ S(x)\ \Big]$$

est une symétrie des équations de mouvement. En fait, le groupe de symétries est beaucoup plus grand. Pour tout $v \in\ su(2)$ et tout entier n non-négatif, les transformations $S(x) \to \delta_v^n S(x)$ définies par:

$$\delta_v^n\ S(x)\ =\ i\Big[\ Z_v^n(x)\ ,\ S(x)\ \Big] \tag{9}$$

où les fonctions $Z_v^k(x)$ sont calculées récursivement par,

$$\partial_x Z_v^k(x) + i\Big[S(x), Z_v^{k-1}(x)\Big] = 0 \qquad ; \qquad Z_v^0 = v \tag{10}$$

sont des symétries des équations de mouvement.

De plus, ces transformations forment une représentation de l'algèbre de boucle sur $su(2)$ (plus précisèment de la sous-algèbre $su(2) \otimes C[\lambda]$); i.e. on a:

$$\left[\ \delta_v^n\ , \delta_w^m\ \right] =\ \delta_{[v,w]}^{n+m} \tag{11}$$

pour tous entiers n et m non-négatifs, et tous $v,\ w \in su(2)$. Autrement dit, le groupe de symétries est le groupe de boucles sur $SU(2)$ (ou plus précisément, le sous-groupe formé des boucles régulières en zéro.)

Ces résultats peuvent être prouvés comme suit. Pour tout $v \in su(2)$, définissons des fonctions $Z_v^k(x)$ par:

$$(TvT^{-1})(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} Z_v^k(x)$$

où nous avons utilisé le développement en $(\frac{1}{\lambda})$ de la matrice de transfert. Les équations différentielles satisfaites par les fonctions $Z_v^k(x)$ sont des conséquences de celles satisfaites par la matrice de transfert. Pour tout entier n posons: $\Theta_v^n(x,\lambda) = i\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} Z_v^k(x)$. Considérons maintenant la transformation de jauge agissant sur la connexion de Lax:

$$\begin{aligned} \delta_v^n A_x &= -[A_x, \Theta_v^n] - \partial_x \Theta_v^n \\ \delta_v^n A_t &= -[A_t, \Theta_v^n] - \partial_t \Theta_v^n \end{aligned}$$

Par construction, ces transformations préservent la condition de courbure nulle puisque ce sont des transformations de jauge. Elles seront donc des symétries si la forme des composantes de la connexion de Lax est préservée lors des transformations. C'est un exercice simple de vérifier qu'il en est bien ainsi; e.g. pour A_x on a:

$$\begin{aligned} \delta_v^n A_x &= \lambda^{-1}[S, Z_v^n] - i\sum_{k=0}^{n-1} \left\{\partial_x Z_v^{k+1} + i[S, Z_v^k]\right\} \lambda^{n-k-1} \\ &= \lambda^{-1}[S, Z_v^n] \end{aligned}$$

La dernière somme s'annule grâce à l'eq.(10) et il ne reste donc que $\delta_v^n S(x) = i\,[Z_v^n(x), S(x)]$. De la même façon, on peut vérifier que la forme de A_t est préservée, et que sa variation est compatible avec l'eq. (9). Ceci prouve que les eqs. (9) définissent des symétries des équations de mouvement.

A ces symétries correspondent une infinité de courants conservés. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, les équations de mouvement ont la forme d'une loi de conservation

$$\partial_t J_t - \partial_x J_x = 0$$

avec $J_t = S$ and $J_x = \frac{i}{2}[S_x, S]$. Ainsi, transformer ce courant local produit de nouveaux courants, qui constituent un multiplet de dimension infinie:

$$\begin{aligned} J_t^{n,v} &= \delta_v^n S = i[Z_v^n, S] \\ J_x^{n,v} &= -\tfrac{1}{2}[\partial_x[Z_v^n, S], S] - \tfrac{1}{2}[S_x, [Z_v^n, S]] \end{aligned} \tag{12}$$

pour tout $n \geq 0$ et $v \in su(2)$. Ces courants sont non-locaux. Par construction ils sont conservés:

$$\partial_t J_t^{n,v} - \partial_x J_x^{n,v} = 0.$$

A chacun d'eux est associée une charge définie par:

$$Q_v^n = \int_0^L J_t^{n,v}(x)dx = Z_v^{n+1}(L) \tag{13}$$

Puisque les courants ne sont pas locaux, les charges ne sont pas necessairement conservées. On a:

$$\frac{d}{dt}Q_v^n = J_x^{n,v}(L) - J_x^{n,v}(0)$$

Dans la limite de volume infini ($L \to \infty$), un choix approprié des conditions aux limites peut assurer la conservation de ces charges. Mais, bien qu'elles ne soient pas conservées, ces charges sont importantes, car comme nous le verrons ci-après, elles sont les générateurs des transformations non-abéliennes.

1.3 Les générateurs et les Yangiens semi-classiques.

Précisons maintenant dans quel sens les charges Q_v^n sont les générateurs des symétries non-abéliennes (9); i.e. comment les transformations infinitésimales (9) des variables de spins sont fournies par les crochets de Poisson entre les charges et les variables dynamiques $S(x)$. Comme nous allons l'expliquer, contrairement aux cas des transformations symplectiques, les variations infinitésimales $\delta_v^n S(x)$ ne sont pas engendrées linéairement par les charges.

Les charges Q_v^n prennent valeurs dans l'algèbre de Lie $su(2)$. Introduisons leurs composantes, Q_{ij}^n et Q_i^n, dans la base des matrices de Pauli σ_i:

$$Q_{ij}^n = \frac{1}{2}\, tr\left(Q_{\sigma_i}^n\ \sigma_j\right) \quad \text{et} \quad Q_i^n = \sum_{j,k=0}^{3} \epsilon_{ijk} Q_{jk}^n \tag{14}$$

Il est possible d'exprimer les charges Q_{ij}^n à l'aide des Q_i^n. En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, on a les formules simples:

$$\begin{aligned} Q_i^0 &= 4\int_0^L dx\ S^i(x) \\ Q_i^1 &= 4\int_0^L dx \int_0^x dy\ \epsilon^{ijk}\ S^j(x)S^k(y) \end{aligned} \tag{15}$$

Notons que Q_i^0 est locale alors que Q_i^1 ne l'est pas. Elles engendrent les transformations $\delta_i^0 S(y)$ et $\delta_i^1 S(y)$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \delta_i^0 S(y) &= \tfrac{1}{2}\{Q_i^0, S(y)\} \\ \delta_i^1 S(y) &= \tfrac{1}{2}\{Q_i^1, S(y)\} - \tfrac{1}{8}\epsilon^{ijk} Q_j^0 \{Q_k^0, S(y)\} \end{aligned} \tag{16}$$

La première équation dans (16) implique que la symétrie $su(2)$ est une action symplectique. En revanche, la non-linéarité de la seconde équation est le signe que ces transformations ne sont pas symplectiques. C'est par contre une des propriétés des actions de Lie-Poisson, une notion qui généralise celle d'action symplectique.

La non-linéarité de l'eq.(16) a un autre écho. L'algèbre de Poisson des charges Q_i^0 et Q_i^1 n'est pas l'algèbre de boucle sur $su(2)$ mais une déformation de cette dernière. En effet, rappelons que l'algèbre de boucle sur $su(2)$ peut être présentée comme l'algèbre associative engendrée par les éléments δ_i^0 et δ_i^1 satisfaisant les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned}
\left[\delta_i^0, \delta_j^0\right] &= \epsilon_{ijk}\delta_k^0 \\
\left[\delta_i^0, \delta_j^1\right] &= \epsilon_{ijk}\delta_k^1 \\
\left[\delta_i^1, \left[\delta_j^1, \delta_k^0\right]\right] &- \left[\delta_i^0, \left[\delta_j^1, \delta_k^1\right]\right] = 0 \\
\left[\left[\delta_i^1, \delta_j^1\right], \left[\delta_k^0, \delta_l^1\right]\right] &+ \left[\left[\delta_k^1, \delta_l^1\right], \left[\delta_i^0, \delta_j^1\right]\right] = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

On peut calculer directement les crochets de Poisson des charges Q_i^0 et Q_i^1 à l'aide de leurs expressions explicites en fonction des variables de spins. On vérifie alors qu'elles satisfont les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\{Q_i^0, Q_j^0\} &= 4\epsilon_{ijk}Q_k^0 \\
\{Q_i^0, Q_j^1\} &= 4\epsilon_{ijk}Q_k^1 \\
\{Q_i^1, \{Q_j^1, Q_k^0\}\} - \{Q_i^0, \{Q_j^1, Q_k^1\}\} &= A_{ijk}^{lmn}Q_l^0 Q_m^0 Q_n^0 \\
\{\{Q_i^1, Q_j^1\}, \{Q_k^0, Q_l^1\}\} + \{\{Q_k^1, Q_l^1\}, \{Q_i^0, Q_j^1\}\} &= 8(A_{ija}^{mnp}\epsilon_{kla} + A_{kla}^{mnp}\epsilon_{ija})Q_m^0 Q_n^0 Q_p^1
\end{aligned} \tag{18}$$

avec $A_{ijk}^{lmn} = \frac{2}{3}\epsilon_{ila}\epsilon_{jmb}\epsilon_{knc}\epsilon^{abc}$

Ces relations forment une déformation de celles définissant l'algèbre de boucle sur $su(2)$. Ainsi, l'algèbre de Poisson des charges est une déformation de l'algèbre de boucle sur $su(2)$. Cette déformation est appelée la version semi-classique du Yangien $su(2)$. Il n'existe pas de relations supplémentaires sur les charges Q_n^0 et Q_k^1 car il n'y pas d'autres relations entre les générateurs δ_n^0 et δ_k^1 de l'algèbre de boucles.

Toutes les charges non-locales Q_{ij}^n peuvent être exprimées comme des crochets de Poisson multiples des deux premières charges Q_i^0 et Q_i^1. Ainsi, l'algèbre de Poisson de la symétrie est engendrée uniquement par ces deux premières charges. (Cette propriété peut être prouvée plus facilement en introduisant la matrice de transfert et ses crochets de Poisson, cf. la prochaine section.)

1.4 La matrice de transfert et les Yangiens semi-classiques.

Nous donnons maintenant une présentation alternative des Yangiens semi-classiques. Celle-ci existe car la donnée des charges est équivalente à celle de la matrice de monodromie. Introduisons donc une notation pour les éléments de la matrice de monodromie:

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \qquad ; \qquad Det\ T(\lambda) = AD - BC = 1$$

Rappelons que d'après l'eq.(14), nous avons:

$$\begin{aligned}
Q_{ij}(\lambda) &= \delta_{ij} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} Q_{ij}^n = \frac{1}{2} tr(T\sigma_i T^{-1}\sigma_j) \\
Q_i(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} Q_i^n = \epsilon_{ijk} Q_{jk}(\lambda)
\end{aligned}$$

Les quantités $Q_{ij}(\lambda)$ et $Q_i(\lambda)$ sont donc des fonctions quadratiques des éléments de matrice de $T(\lambda)$.

Mais on peut aussi inverser ces relations et écrire $T(\lambda)$ à l'aide des fonctions génératrices $Q_i(\lambda)$. La relation entre ces grandeurs est:

$$T(\lambda) = \frac{1}{2} W(\lambda)\ Id - \frac{i}{2} W^{-1}(\lambda) \sum_i Q_i(\lambda)\sigma_i$$

avec $W(\lambda) = \sqrt{2 + \sqrt{4 - \vec{Q}^2(\lambda)}}$.

Ainsi, les charges $Q_i(\lambda)$ possèdent le même contenu en information que la matrice de monodromie. Il est donc utile d'examiner plus précisément la relation entre les charges $Q_i(\lambda)$ et les éléments de matrice de $T(\lambda)$. On a:

$$Q_+(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda) + iQ_2(\lambda) = 2iW(\lambda)\ C(\lambda) \tag{19}$$
$$Q_-(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda) - iQ_2(\lambda) = 2iW(\lambda)\ B(\lambda) \tag{20}$$

De plus, la trace de la matrice de transfert est: $tr\ T(\lambda) = W[\vec{Q}^2(\lambda)]$. Donc, $\vec{Q}^2(\lambda)$ est aussi une fonction génératrice des quantités commutantes. Son lien avec la fonction génératrice $P_0(\lambda)$ est:

$$\vec{Q}^2(\lambda) \;=\; 4\sin^2\Big(2P_0(\lambda)\Big)$$

Mais, le développement de $\vec{Q}^2(\lambda)$ autour de $\lambda = \infty$ donne des quantités commutantes non-locales, alors que développer $P_0(\lambda)$ autour de $\lambda = 0$ fournit des quantités locales commutantes. Le lien entre ces grandeurs est caché dans les subtilités des propriétés analytiques de la matrice de monodromie.

Puisque la matrice de transfert code la même information que les charges, le Yangien semi-classique (18) peut être présenté à l'aide de la matrice de transfert: Le Yangien semi-classique sur $su(2)$ est l'algèbre de Poisson engendrée par la matrice de transfert, $T(\lambda)$, de déterminant égal à un, et munie des crochets de Poisson:

$$\Big\{T(\lambda) \overset{\otimes}{,} T(\mu)\Big\} = \tfrac{1}{2}\Big[\ r(\lambda,\mu)\ ,\ T(\lambda)\otimes T(\mu)\ \Big] \tag{21}$$

Le développement en $\frac{1}{\lambda}$ de $T(\lambda)$ est implicitement supposé dans cette définition. Pour les composantes, $t_{ab}^{(n)}$ de $T(\lambda)$, définies par $T(\lambda)_{ab} = \delta_{ab} + \sum_{n=0}^{\infty} t_{ab}^{(n)} \lambda^{-n-1}$, on trouve:

$$\Big\{t_{ab}^{(n)}, t_{cd}^{(m)}\Big\} = \delta_{cb} t_{ad}^{(n+m)} - \delta_{ad} t_{cb}^{(n+m)} + \sum_{p=0}^{n-1}\Big(t_{ad}^{(m+p)} t_{cb}^{(n-1-p)} - t_{ad}^{(n-1-p)} t_{cb}^{(m+p)}\Big) \tag{22}$$

Cette dernière relation montre que l'algèbre de Poisson est effectivement engendrée par les deux premières charges Q_i^0 and Q_i^1.

Finalement, montrons comment la matrice de monodromie engendre les transformations (9). Par un calcul explicite des crochets de Poisson entre la matrice de monodromie et les variables de spins, on vérifie facilement que les variations $\delta_v^n S(y)$ sont données par les formules suivantes:

$$\delta_v^n S(y) = \ i \oint \frac{d\lambda}{2i\pi} \lambda^n\ tr_1\Big(\ (vT^{-1}(\lambda)\otimes 1)\Big\{T(\lambda)\otimes 1, 1\otimes S(y)\Big\}\ \Big) \tag{23}$$

Ici tr_1 dénote la trace sur le premier espace du produit tensoriel. Pour $n = 0$ ou 1, l'eq.(23) est équivalente à l'eq.(16). Elle indique que $T(\lambda)$ est le générateur des symétries non-abéliennes et elle caractérise les transformations $S(y) \to \delta_v^n S(y)$ comme des actions de Lie-Poisson.

1.5 Généralités sur les transformations d'habillage.

Les symétries décrites ci-dessus sont des exemples de transformations, appelées "transformations d'habillage", qui s'appliquent aux équations aux solitons admettant une représentation en paire de Lax [21, 6]. Par exemple, ces symétries sont présentes dans les modèles de sine-Gordon ou de Toda, dans les modèles sigma, etc... Elles sont à l'origine du concept de fonction Tau dans les modèles intégrables.

Plus précisément, considérons un ensemble d'équations non-linéaires pour une collection de champs notée $\phi(x,t)$. Supposons que ces équations puissent s'écrire comme une condition de courbure nulle:

$$\Big[\mathcal{D}_\mu\,[\phi]\,,\mathcal{D}_\nu[\phi]\Big] = 0 \tag{24}$$

pour une connexion, appelée connexion de Lax,

$$\mathcal{D}_\mu\,[\phi] = \partial_\mu - A_\mu\,[\phi]$$

qui dépend des champs $\phi(x,t)$. La connexion appartient à une certaine algèbre $\mathcal{G}$ et sa forme dépend des équations aux solitons. La condition de courbure nulle eq.(24) est une condition de compatibilité pour un problème linéaire auxiliaire:

$$(\partial_\mu \ - \ A_\mu)\Psi(x,t) \ = \ 0 \tag{25}$$

où la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ prend valeurs dans le groupe G. Grâce à la condition de courbure de nulle, la connexion de Lax est une jauge pure:

$$A_\mu \ = \Big(\partial_\mu\Psi\Big)\ \Psi^{-1}. \tag{26}$$

La fonction d'onde est donc définie à une multiplication à droite près par un élément du groupe indépendant de la position et du temps. Cette liberté peut être gelée en imposant la condition de normalisation $\Psi(0) = 1$.

Supposons maintenant que ces équations aux solitons (24) admettent une formulation hamiltonienne, cf e.g. [10]. De plus, faisons l'hypothèse que les crochets de Poisson des composantes de la connexion de Lax (qui sont déduit de ceux des champs $\phi(x,t)$) conduisent aux crochets de Sklyanin pour la fonction d'onde $\Psi(x,t)$:

$$\Big\{\ \Psi(x)\ \overset{\otimes}{,}\ \Psi(x)\ \Big\}\ = \Big[\ r^\pm\ ,\ \Psi(x)\otimes\Psi(x)\ \Big] \tag{27}$$

où $r^\pm\ \in \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$ est solution de l'équation de Yang-Baxter classique. Alors, comme nous l'expliquerons dans la section suivante, les matrices $r^\pm$ permettent de définir deux sous-algèbres $\mathcal{G}_\pm$ de $\mathcal{G}$. On note $G_\pm$ les groupes de Lie d'algèbres $\mathcal{G}_\pm$. A ces sous-algèbres est associé un problème de factorisation, soit dans l'algèbre $\mathcal{G}$ [18],

$$X = X_+ - X_-, \qquad X_\pm \in \mathcal{G}_\pm$$

soit dans le groupe G,

$$g = g_-^{-1}g_+, \qquad g_\pm \in G_\pm \tag{28}$$

Les factorisations définies ci-dessus sont des versions algébriques du problème de Riemann-Hilbert, auquel elles se ramènent dans certains cas. Dans l'exemple développé dans la section précédente, le problème de Hilbert correspond à décomposer les boucles en leurs parties analytiques à l'origine et à l'infini.

Pour tout $g = g_-^{-1} g_+ \in G$, une transformation d'habillage consiste à transformer les variables $\Psi(x,t)$ dans les variables $\Psi^g(x,t)$ définies par:

$$\Psi^g \;=\; \Theta_\pm \; \Psi \; g_\pm^{-1} \tag{29}$$

où $\Theta_\pm$, éléments du groupe G, sont solutions du problème de factorisation suivant :

$$\Theta_-^{-1} \; \Theta_+ \;=\; \Psi \; g \; \Psi^{-1} \tag{30}$$

Les deux signes dans l'eq.(29) conduisent au même résultat. De plus, cette transformation préserve la condition de normalisation $\Psi(0) = 1$.

La version infinitésimale de cette transformation est:

$$\delta_X \, \Psi(x) = \Big(\Psi(x) X \Psi^{-1}(x)\Big)_\pm \Psi(x) - \Psi(x) X_\pm \tag{31}$$

pour tout $X = X_+ - X_- \in \mathcal{G}$.

L'action (29) sur la fonction d'onde induit une transformation de jauge sur la connexion de Lax: $A_\mu = (\partial_\mu \Psi) \; \Psi^{-1}$ est transformée dans $A_\mu^g = (\partial_\mu \Psi^g) \; \Psi^{g\,-1}$ avec:

$$A_\mu^g \;=\; (\partial_\mu \Theta_\pm) \Theta_\pm^{-1} \;+\; \Theta_\pm A_\mu \Theta_\pm^{-1} \tag{32}$$

En général [21, 19], et comme nous l'avons montré sur l'exemple précédent, le problème de factorisation est construit de manière à préserver la structure de la connexion de Lax lors des transformations d'habillage. Cette propriété est la propriété fondamentale de ces transformations. Elle implique que celles-ci forment un groupe de symétries des équations aux solitons.

Les transformations d'habillage (32) forment un groupe, que nous noterons G^*. La loi de multiplication dans le groupe d'habillage n'est pas celle du groupe G. Les éléments de G^* sont les couples (g_-, g_+) avec $g_\pm \in G_\pm$. La loi de multiplication dans G^* est :

$$(g_-, g_+) \bullet (h_-, h_+) = (g_- h_-, g_+ h_+) \tag{33}$$

Ceci peut se prouver directement comme suit [19]. Considérons deux éléments $g = g_-^{-1} g_+$ et $h = h_-^{-1} h_+$, et transformons successivement Ψ par g et h:

$$\Psi \to \Psi^g \to (\Psi^g)^h$$

On a:

$$\begin{aligned} \Psi^g \;&=\; \Theta_\pm^g \; \Psi \; g_\pm^{-1} \qquad &\text{avec} \qquad \Theta_\pm^g = \Big(\Psi g \Psi^{-1}\Big)_\pm \\ (\Psi^g)^h \;&=\; \Theta_\pm^{hg} \; \Psi^g \; h_\pm^{-1} \qquad &\text{avec} \qquad \Theta_\pm^{hg} = \Big(\Psi^g h \Psi^{g\,-1}\Big)_\pm \end{aligned} \tag{34}$$

La factorisation de $(\Psi^g h \Psi^{g\,-1})$ peut alors être écrite comme suit:

$$(\Theta_-^{hg})^{-1} \Theta_+^{hg} \;\equiv \Psi^g h \Psi^{g\,-1} \;=\; \Theta_-^g \, \Psi \, (h_- g_-)^{-1} (h_+ g_+) \, \Psi^{-1} \, \Theta_+^{g\,-1}$$

ou, de manière équivalente,

$$\Theta_\pm^{hg} \Theta_\pm^g = \Big(\Psi \, (h_- g_-)^{-1} (h_+ g_+) \, \Psi^{-1}\Big)_\pm$$

Insérer cette formule dans l'éq.(34) fournit la preuve de la loi de multiplication dans G^*.

Enfin, montrons que la matrice de monodromie, donnée par $T(L) = \Psi(L)\Psi^{-1}(0)$, est toujours le générateur non-abélien des transformations d'habillage. Ceci signifie que la variation infinitésimale de $\Psi(x)$ est fournie par ces crochets de Poisson avec $T(L)$ [1]:

$$\delta_X \, \Psi(x) = tr_2\Big(1 \otimes XT^{-1}(L)\Big\{\Psi(x) \overset{\otimes}{,} T(L)\Big\}\Big) \tag{35}$$

La preuve de cette équation réside dans le fait que les crochets de Poisson entre $T(L)$ et $\Psi(x)$ sont (grâce à la propriété d'ultralocalité):

$$\Big\{ \ \Psi(x) \overset{\otimes}{,} T(L) \ \Big\} \ = \Big(1 \otimes T(L)\Psi^{-1}(x)\Big)\Big[\ r^{\pm} \ , \ \Psi(x) \otimes \Psi(x) \ \Big]$$

ainsi que dans le fait que le problème de factorisation dans $\mathcal{G}$ est résolu par

$$X = X_+ - X_- \quad \text{avec} \quad X_\pm = tr_2 \left(r^\pm (1 \otimes X)\right)$$

Cette propriété de la matrice de monodromie est le signe caractéristique d'une action de Lie-Poisson. Comme nous le verrons dans la prochaine section, le cadre géométrique adapté à la description de ces symétries est celui du "double classique".

2 Groupes et actions de Lie-Poisson.

Le but de cette section est de présenter les éléments de base concernant les groupes et les actions de Lie-Poisson [7, 18]. Ceux-ci constituent le cadre géométrique adapté à la description et à la formulation des transformations d'habillage. Comme nous le verrons par la suite, les groupes de Lie-Poisson sont les ancêtres classiques des groupes quantiques, et les actions de Lie-Poisson sont les ancêtres classiques des symétries quantiques.

Par la suite, M désignera une variété symplectique et $\{\ ,\ \}_M$ le crochet de Poisson sur M.

2.1 Actions hamiltoniennes.

Avant de décrire les groupes et les actions de Lie-Poisson, nous vous rappelons brièvement les propriétés essentielles des actions hamiltoniennes. Soit H un groupe de Lie et $\mathcal{H}$ son algèbre de Lie. Une action du sous groupe à un paramètre (h^t) de H sur l'espace de phase est dite symplectique si, pour toutes fonctions f_1 et f_2 sur M, on a:

$$\{f_1(h^t.x), f_2(h^t.x)\}_M \;=\; \{f_1, f_2\}_M(h^t.x) \tag{36}$$

Introduisons le champ vectoriel X sur M correspondant à l'action infinitésimale,

$$\delta_X.f(x) = \frac{d}{dt} f(h^t.x)|_{t=0} \tag{37}$$

La condition (36) devient alors:

$$\{\delta_X.f_1, f_2\}_M \;+\; \{f_1, \delta_X.f_2\}_M \;=\; \delta_X.\{f_1, f_2\}_M$$

On a la propriété essentielle que toute action symplectique d'un sous groupe à un paramètre est localement hamiltonienne. Ceci signifie qu'il existe une fonction H_X, localement définie sur M, tel que:

$$\delta_X.f \;=\; \{H_X, f\}_M \tag{38}$$

La preuve est standard. L'existence globale de cette fonction relève d'un autre problème.

On dira que l'action du groupe H sur l'espace des phases est symplectique si les hamiltoniens H_X de tous les sous groupes à un paramètre sont linéaires en $X \in \mathcal{H}$, et si ils satisfont:

$$H_{[X,Y]} = \{H_X, H_Y\} \tag{39}$$

Cette dernière relation assure que l'action (37) définit une représentation de l'algèbre $\mathcal{H}$:

$$\delta_{[X,Y]} = \delta_X\delta_Y - \delta_Y\delta_X$$

Enfin, les hamiltoniens H_X servent à définir l'application moment P, de l'espace des phases dans l'espace dual de $\mathcal{H}$, i.e. $P : M \to \mathcal{H}^*$, par:

$$P(x)X = H_X(x)$$

pour tout $x \in M$ et $X \in \mathcal{H}$. Cet outil s'applique élégamment à des problèmes liés aux réductions hamiltoniennes. L'application moment possède la propriété de transformer l'action de H sur M en l'action co-adjointe de H sur $\mathcal{H}^*$.

Ce sont ces propriétés que nous voulons maintenant généraliser aux groupes et actions de Lie-Poisson.

2.2 Groupes de Lie-Poisson.

Un groupe de Lie-Poisson H est un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson, tel que la multiplication dans H, vu comme une application de $H \times H \to H$, soit une application de Poisson. Plus précisément, tout crochet de Poisson $\{,\}_H$ sur une groupe de Lie H est uniquement caractérisé par la donnée d'une fonction à valeurs dans $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$: $h \in H \to \eta(h) \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$. Introduisons une base (e_a) de $\mathcal{H}$. Le crochet de Poisson de deux fonctions f_1 et f_2 sur H s'écrit alors:

$$\{f_1, f_2\}_H(h) = \sum_{a,b} \eta^{ab}(h)(\nabla^R_a f_1)(h)(\nabla^R_b f_2)(h) \tag{40}$$

où $\eta(h) = \sum_{a,b} \eta^{ab}(h) e_a \otimes e_b$, et ∇^R_a est la dérivée de Lie invariante à gauche suivant l'élément $e_a \in \mathcal{H}$:

$$\nabla^R_a f(h) = \frac{d}{dt} f(e^{te_a}h)\Big|_{t=0}.$$

L'antisymétrie du crochet de Poisson (40) impose $\eta_{12} = -\eta_{21}$. L'identité de Jacobi est équivalente à une relation quadratique sur η. La propriété de Lie-Poisson des crochets (40) impose que ceux-ci se transforment de manière covariante sous la multiplication dans H. Ceci est équivalent à une condition de cocycle sur $\eta(h)$ [7]:

$$\eta(hg) = \eta(h) + Ad\, h \cdot \eta(g)$$

Les crochets $\{,\}_H$ peuvent être utilisés afin de munir $\mathcal{H}^*$ d'une structure d'algèbre de Lie. Celle-ci est définie par:

$$[d_e f_1, d_e f_2]_{\mathcal{H}^*} = d_e\{f_1, f_2\}_H \tag{41}$$

où $d_e f \ \in \mathcal{H}^*$ est la différentielle de la fonction f évaluée à l'identité sur H. Dans la base (e^a) de $\mathcal{H}^*$, duale de la base (e^a) sur $\mathcal{H}$, la différentielle s'écrit: $d_e f = \sum_a e^a(\nabla^R_a f)(e) \in \mathcal{H}^*$. Ainsi, la structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{H}^*$ est fournie par:

$$\left[e^a, e^b\right]_{\mathcal{H}^*} \ = \ f^{ab}_c \ e^c \tag{42}$$

où les constantes de structure sont $f^{ab}_c = (\nabla^R_c \eta^{ab})(e)$. Les crochets de Lie définis dans l'éq.(42) satisfont l'identité de Jacobi car les crochets de Poisson sur H y satisfont. Nous dénoterons par H^* le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{H}^*$.

De la même façon que la structure de Poisson sur H induit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{H}^*$, la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{H}$ induit une structure de Poisson sur H^*. Celle-ci est caractérisée par une cocycle $\eta^*(\gamma) = \sum_{ab} \eta^*_{ab}(\gamma) e^a \otimes e^b \in \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ avec $\nabla^d_R \eta^*_{ab}(e) = C^d_{ab}$, où C^d_{ab} sont les constantes de structure sur $\mathcal{H}$.

2.3 Les groupes G, G^* et le double

Appliquons maintenant les résultats de la section précédente au cas où η est un co-bord,

$$\eta(g) = r^{\pm} - g \otimes g\ r^{\pm} g^{-1} \otimes g^{-1}$$

avec $r^{\pm} = \sum_{ab} r_{\pm}^{ab} e_a \otimes e_b \ \ \in \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$. Nous supposerons que $r_{12}^{+} = -r_{21}^{-}$, et $r_{12}^{+} - r_{12}^{-} = \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} = \sum_a e_a \otimes e_a$ est le tenseur de Casimir. Ces conditions assurent l'antisymétrie du crochet de Poisson sur G. Celui-ci s'écrit alors:

$$\{\, g \overset{\otimes}{,} g \,\}_G \;=\; \Big[\, r^{\pm} \;,\; g\otimes g \,\Big] \qquad ; \qquad g \in G \tag{43}$$

Ce crochet est connu sous le nom de crochet de Sklyanin [20]. L'identité de Jacobi est satisfaite si $r^{\pm}$ sont solutions de l'équation de Yang-Baxter classique:

$$\Big[r_{12}^{\pm}, r_{13}^{\pm}\Big] \;+\; \Big[r_{12}^{\pm}, r_{23}^{\pm}\Big] \;+\; \Big[r_{13}^{\pm}, r_{23}^{\pm}\Big] \;=\; 0 \tag{44}$$

L'éq.(44) est une équation dans $\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$, et les indices sur $r^{\pm}$ se réfèrent aux copies de $\mathcal{G}$ sur lesquelles $r^{\pm}$ agit. Dans l'éq.(43), nous pouvons choisir indistinctement r^{+} ou r^{-} puisque la différence est le tenseur de Casimir.

On peut utiliser la forme bilinéaire invariante sur $\mathcal{G}$, notée tr, afin d'identifier les espaces vectoriels $\mathcal{G}^*$ et $\mathcal{G}$. Les élements $r^{\pm}$ de $\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$ sont alors identifiés aux éléments $R^{\pm} \in \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^* \cong \mathrm{End}\mathcal{G}$ définis par:

$$R^{\pm}(X) \;=\; tr_2\Big(r_{12}^{\pm}(1\otimes X)\Big) \qquad ; \qquad \forall\; X \in \mathcal{G} \tag{45}$$

Notez que l'on a $R^{+} - R^{-} = Id$.

Le crochet de Poisson (43) sur G induit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}^*$ par la formule (41). Après identification de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ via la forme tr, le crochet sur $\mathcal{G}^*$ s'écrit [18]:

$$[\, X, Y \,]_R \;\;=\;\; \Big[R^{\pm}(X), Y\Big] \;+\; \Big[X, R^{\mp}(Y)\Big] \tag{46}$$

L'identité de Jacobi pour les commutateurs (46) suit de l'équation de Yang-Baxter classique pour $r^{\pm}$. Cette équation implique aussi que $R^{\pm}$ sont des homomorphismes de $\mathcal{G}^*$ dans $\mathcal{G}$. En particulier, $\mathcal{G}_{\pm} = \mathrm{Im}R^{\pm}$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{G}$, et $r^{\pm} \in \mathcal{G}_{\pm}\otimes\mathcal{G}_{\mp}$.

L'algèbre $\mathcal{G}^*$ est liée à des problèmes de factorisation dans $\mathcal{G}$ définis par les matrices $R^{\pm}$. Considérons d'abord $\mathcal{G}^*$; puisque $R^{+} - R^{-} = Id$, tout $X \in \mathcal{G}$ admet une unique décomposition comme somme d'éléments dans $\mathcal{G}_{\pm}$:

$$X \;=\; X_{+} - X_{-} \qquad \text{with} \qquad X_{\pm} = R^{\pm}(X) \tag{47}$$

En termes des composantes X_{+} et X_{-}, le commutateur dans $\mathcal{G}^*$ devient:

$$[\, X, Y \,]_R \;=\; [X_{+}, Y_{+}] \;-\; [X_{-}, Y_{-}]$$

En particulier, les composantes plus et moins commutent dans $\mathcal{G}^*$.

Nous noterons G^* le groupe correspondant à $\mathcal{G}^*$. Par exponentation, le groupe G^* est constitué des couples (g_{-}, g_{+}) avec pour loi de multiplication:

$$(g_{-}, g_{+}) \bullet (h_{-}, h_{+}) = (g_{-}h_{-}, g_{+}h_{+}), \tag{48}$$

Comme $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^*$ en tant qu'espaces vectoriels, $G \simeq G^*$ en tant que variétés: $(g_{-}, g_{+}) \in G^* \to g = g_{-}^{-1} g_{+} \in G$. Ou, de façon équivalente, tout élément $g \in G$ (au voisinage de l'identité) admet une unique factorisation sous la forme:

$$g \;=\; g_{-}^{-1}\, g_{+} \qquad \text{with} \qquad (g_{-}, g_{+}) \in G^* \tag{49}$$

Le groupe G^* devient aussi un groupe de Lie-Poisson s'il est munit des crochets de Semenov-Tian-Shansky[19]:

$$\begin{aligned}
\{g_+ \overset{\otimes}{,} g_+\}_{G^*} &= -\left[r^{\pm}, g_+ \otimes g_+\right] \\
\{g_- \overset{\otimes}{,} g_-\}_{G^*} &= -\left[r^{\mp}, g_- \otimes g_-\right] \\
\{g_- \overset{\otimes}{,} g_+\}_{G^*} &= -\left[r^{-}, g_- \otimes g_+\right] \\
\{g_+ \overset{\otimes}{,} g_-\}_{G^*} &= -\left[r^{+}, g_+ \otimes g_-\right]
\end{aligned} \tag{50}$$

ou, pour l'élément factorisé $g = g_-^{-1} g_+$:

$$\begin{aligned}
\{g \overset{\otimes}{,} g\}_{G^*} = & -(g \otimes 1) r^+ (1 \otimes g) - (1 \otimes g) r^- (g \otimes 1) \\
& +(g \otimes g) r^{\pm} + r^{\mp} (g \otimes g).
\end{aligned} \tag{51}$$

La multiplication dans G^* est une application de Poisson pour les crochets (50). Notons que la structure d'algèbre de Lie induite par ces crochets de Poisson sur $\mathcal{G}^*$, i.e sur $\mathcal{G}$, est la structure originelle sur $\mathcal{G}$. Ce qui est heureux.

Notons par (e^a) la base de $\mathcal{G}^*$, duale de (e_a). Les constantes de structure sur $\mathcal{G}^*$ se calculent à l'aide de la formule (41):

$$\Gamma_c^{ab} = \frac{d}{dt} \eta^{ab}(e^{te_c})\Big|_{t=0} = -r^{db}\gamma_{cd}^a - r^{ad}\gamma_{cd}^b = r^{da}\gamma_{cd}^b + r^{bd}\gamma_{cd}^a \tag{52}$$

où γ_{bc}^a sont les constantes de structure de $\mathcal{G}$ dans la base (e_a). L'équation de Yang-Baxter pour r implique l'identité de Jacobi pour les constantes Γ_c^{ab}. On vérifie aussi la relation suivante:

$$\Gamma_d^{ab}\gamma_{cl}^d - \Gamma_l^{bd}\gamma_{dc}^a + \Gamma_l^{ad}\gamma_{dc}^b + \Gamma_c^{db}\gamma_{ld}^a - \Gamma_c^{da}\gamma_{ld}^b = 0$$

Ceci est simplement la relation de cocycle. En conséquence, les commutateurs suivants satisfont l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned}
[e_a, e_b] &= \gamma_{ab}^c \, e_c \\
[\delta^a, e_b] &= \gamma_{bc}^a \, e^c - \Gamma_b^{ac} \, e_c \\
[\delta^a, \delta^b] &= \Gamma_c^{ab} \, e^c
\end{aligned} \tag{53}$$

Ils définissent ainsi une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$. De plus, à l'aide de ces relations, on construit une solution de l'équation de Yang-Baxter classique en posant:

$$r_{12} = \sum_a e_a \otimes e^a \quad \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$$

Cette construction est connue comme celle du double classique [7].

2.4 Actions de Lie-Poisson.

L'action d'un groupe de Lie-Poisson sur une variété symplectique est dite action de Lie-Poisson si les crochets de Poisson se transforment de manière covariante; i.e. si, pour tout $h \in H$ et toutes fonctions f_1 et f_2 sur M, on a:

$$\{f_1(h.x), f_2(h.x)\}_{H \times M} = \{f_1, f_2\}_M(h.x) \tag{54}$$

La structure de Poisson sur $H \times M$ est le produit des structures de Poisson sur H et M.

Soit $X \in \mathcal{H}$ et notons par δ_X le champ vectoriel sur M correspondant aux transformations infinitésimales engendrées par X. Si nous introduisons les bases duales $e_a \in \mathcal{H}$ et $e^a \in \mathcal{H}^*$, avec $< e^a, e_b >= \delta^a_b$ où $<,>$ représente l'appariement entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$, l'éq. (54) s'écrit:

$$\{\delta_{e_a}.f_1, f_2\}_M \ + \ \{f_1, \delta_{e_a}.f_2\}_M \ + \ f^{bd}_a(\delta_{e_b}.f_1)(\delta_{e_d}.f_2) \ = \ \delta_{e_a}.\{f_1, f_2\}_M \tag{55}$$

On voit immédiatement d'après l'éq.(55) qu'une action de Lie-Poisson ne peut être hamiltonienne sauf si l'algèbre $\mathcal{H}^*$ est abélienne. Par contre, il existe un analogue non-abélien de l'action hamiltonienne, éq . (38) [14].

En effet, pour tout action de Lie-Poisson, il existe une fonction Γ, localement définie sur M, et prenant valeurs dans le groupe H^*, telle que pour toute fonction f sur M on a:

$$\delta_X.f \ = < \ \Gamma^{-1} \ \{f, \Gamma\}_M, X > \quad , \quad \forall \ X \in \mathcal{H} \tag{56}$$

La fonction Γ est souvent appelée l'hamiltonien non-abélien associé à l'action de Lie-Poisson.

La preuve de l'éq.(56) est la suivante. Introduisons les coordonnées de Darboux (q^i, p^i). Soit la forme $\Omega = \sum_a e^a \ \Omega_a$, à valeur dans $\mathcal{H}^*$, définie par $\Omega_a = \delta^{q^i}_a dp^i \ - \ \delta^{p^i}_a dq^i$, avec $\delta^{q^i}_a$, $\delta^{p^i}_a$ les composantes des champs vectoriels δ_{e_a}, i.e. $\delta_{e_a} = \delta^{q^i}_a \partial_{q^i} + \delta^{p^i}_a \partial_{p^i}$. Eq. (55) est alors équivalente à une condition de courbure nulle sur Ω: $d\Omega \ + [\Omega, \Omega]_{\mathcal{H}^*} \ = \ 0$. Ainsi, localement sur M, $\Omega = \Gamma^{-1} \ d\Gamma$. Ce qui prouve l'éq.(56).

La réciproque est vraie: une action engendrée par un hamiltonien non-abélien comme dans l'éq.(56) est une action de Lie-Poisson. En effet, on a alors:

$$\begin{aligned} \delta_X.\{f_1, f_2\}_M \ &- \ \{\delta_X.f_1, f_2\}_M - \{f_1, \delta_X.f_2\}_M \\ &= \ <\Big[\Gamma^{-1}\{f_1, \Gamma\}_M \ , \ \Gamma^{-1}\{f_2, \Gamma\}_M\Big]_{\mathcal{H}^*}, X > \end{aligned}$$

Enfin, l'application moment $\mathcal{P}$ pour une action de Lie-Poisson est une application de M dans H^* définie par:

$$\mathcal{P} : x \longrightarrow \Gamma(x)$$

L'action (56) définit une représentation de $\mathcal{H}$ sur l'espace des fonctions f sur M, i.e.

$$(\delta_X\delta_Y - \delta_Y\delta_X) \cdot f =< \Gamma^{-1}\{f, \Gamma, \}_M, [X, Y]_{\mathcal{H}} >, \tag{57}$$

si les crochets de Poisson de Γ sont:

$$\{\Gamma \overset{\otimes}{,} \Gamma\}_M \ = \ \eta^*(\Gamma) \cdot \Gamma \otimes \ \Gamma \tag{58}$$

Cette relation est naturelle car Γ est le pull-back par $\mathcal{P}$ d'un élement de H^*. Elle constitue la généralisation de l'éq.(39).

Un exemple d'action de Lie-Poisson est fournie par l'action de G^* sur G définie par:

$$(g_-, g_+) \in \mathcal{G}^*, \ x \in G \rightarrow x^g = (xgx^{-1})_\pm x g^{-1}_\pm \in G \quad \text{avec } g = g^{-1}_- g_+$$

Ici, G et G^* sont les groupes introduits lors de la construction du double dans la section précedente. Cette action est de Lie-Poisson comme le montre l'existence d'un hamiltonien non-abélien. Ce dernier, qui est un élément de $G^{**} \cong G$, est l'élément du groupe lui-même[1]. I.e. on a, pour tout $x \in G$ et $X \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \delta_X x \ &= \ (xXx^{-1})_\pm x - xX_\pm \\ &= \ tr_2\Big((1 \otimes Xx^{-1}\{x \overset{\otimes}{,} x\}_G\Big) \end{aligned}$$

On reconnait ici les caractéristiques des transformations d'habillage.

3 Les groupes quantiques sur un exemple.

Nous introduisons un exemple de groupe quantique par l'étude du modèle d'Heisenberg quantique. Le groupe quantique en question sera l'algèbre de Hopf de dimension infinie appelée par Drinfel'd un Yangien.

3.1 La chaine d'Heisenberg quantique.

Nous introduisons la chaine d'Heisenberg comme la quantification de l'analogue discret du modèle de Heisenberg classique. Puisque le cas $su(p)$ n'est pas plus difficile à traiter, nous généraliserons le modèle de $su(2)$ à $su(p)$. Ainsi, supposons avoir discrétisé en N segments d'égale longueur égale à h l'intervalle sur lequel était défini le modèle. Les extrémités des segments forment une chaine de sites sur lesquels les variables de spins sont définies. Nous notons les variables de spins au site j par S_j^{ab} avec $a,\ b = 1, \cdots, p$. Elle satisfont les relations de commutation de la version discrète de l'algèbre de boucle sur $su(p)$:

$$\left[\ S_j^{ab}\ ,\ S_k^{cd}\ \right] = \delta_{jk}\Big(\ \delta^{cb}\ S_j^{ad} - \delta^{ad}\ S_j^{cb}\ \Big) \tag{59}$$

Ceci correspond à la quantification des crochets de Poisson (1). En représentant les dérivées par des différences finies, et en utilisant les contraintes $S_k^2 = s^2 =$ constante, la version discrète de l'hamiltonien (2) devient, (à un terme constant près):

$$H = \sum_{k=1}^{N} \sum_{ab} S_k^{ab} S_{k+1}^{ba} \tag{60}$$

Ci-dessus nous avons supposé des conditions aux limites périodiques. Afin de préserver l'intégrabilité du modèle les opérateurs de spin S_k^{ab} doivent agir sur la représentation fondamentale de $su(p)$. Ainsi, sur chacun des sites il y a une copie de C^p et l'opérateur S_j^{ab}, qui agit sur la j^{ieme} copie de C^p, est representé par la matrice $|a\rangle\langle b|$.

La matrice de monodromie, qui est une matrice $p \times p$ avec des éléments opératoriels, devient la suivante dans le modèle quantique discrétisé:

$$\begin{aligned} T_{ab}(\lambda) &= P \exp\left[-\int A_x(y,\lambda)dy \right]_{ab}^{\text{discretise}} \\ &= \sum_{a_1 \cdots a_{N-1}} \Big[1 + \frac{h}{\lambda} S_1\Big]^{aa_1} \Big[1 + \frac{h}{\lambda} S_2\Big]^{a_1 a_2} \cdots \Big[1 + \frac{h}{\lambda} S_N\Big]^{a_{N-1} b} \end{aligned} \tag{61}$$

Comme dans le modèle classique, cette matrice peut être développée en $\frac{1}{\lambda}$:

$$T_{ab}(\lambda) = \delta_{ab} + \frac{h}{\lambda} \sum_k S_k^{ab} + \frac{h^2}{\lambda^2} \sum_{j<k} \sum_d S_j^{ad} S_k^{db} + \cdots$$

La propriété importante de la matrice de monodromie est que l'on peut calculer les relations de commutation de ses éléments de matrice. Ces relations algébriques peuvent être résumées dans la fameuse relation de l'ansatz de Bethe algébrique , cf. e.g. [9, 11]:

$$R(\lambda - \mu)(T(\lambda) \otimes 1)(1 \otimes T(\mu)) = (1 \otimes T(\mu))(T(\lambda) \otimes 1)R(\lambda - \mu) \tag{62}$$

où $R(\lambda)$ est la solution de Yang de l'équation de Yang-Baxter :

$$R(\lambda) = \lambda - h\ P$$

avec P l'opérateur d'échange $P(x \otimes y) = y \otimes x$. Pour les éléments de la matrice de monodromie, ces relations impliquent:

$$(\lambda - \mu)\Big[T_{ab}(\lambda), T_{cd}(\mu)\Big] = h\Big(T_{ad}(\lambda)T_{cb}(\mu) - T_{ad}(\mu)T_{cb}(\lambda)\Big) \tag{63}$$

Elles sont les analogues quantiques des crochets de Poisson (6). Comme dans la théorie classique, elles impliquent que la trace de la matrice de monodromie est une fonction génératrice de quantités commutantes:

$$\Big[tr(T(\lambda)) \ , \ tr(T(\mu))\Big] = 0$$

Comme dans la section précédente, les hamiltoniens locaux sont obtenus en développant au voisinage de $\lambda = 0$ et non $\lambda = \infty$. En particulier, on trouve l'hamiltonien en développant le logarithme de la trace au premier ordre: $H \propto \partial_\lambda \log \lambda^N T(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$.

3.2 Les Yangiens.

L'hamiltonien est $su(p)$ invariant. Mais, comme pour le modèle classique, le groupe de symétries est beaucoup plus grand. La version quantique discrète analogue des charges classiques Q^0 et Q^1 définies par les éqs.(14) est:

$$\begin{aligned} Q^0_{ab} &= \sum_k S^{ab}_k \\ Q^1_{ab} &= \frac{h}{2}\sum_{j<k}\sum_d (S^{ad}_j S^{db}_k - S^{ad}_k S^{db}_j) \end{aligned} \tag{64}$$

Cet ansatz naif s'avère correct: les charges Q^0_{ab} commutent avec l'hamiltonien et les charges Q^1_{ab} commutent formellement pour des chaines de longueurs infinies. Pour des chaines de longueurs finies, la relation de commutation est brisée par des termes de bords. Par contre, les courants associés à ces charges sont conservés quelle que soit la taille du réseau [4].

Les charges (64) forment une algèbre non-abélienne qui n'est pas une algèbre de Lie. Elles satisfont les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} \Big[Q^0_{ab}, Q^0_{cd}\Big] &= \delta_{cb}Q^0_{ad} - \delta_{ad}Q^0_{cb} \\ \Big[Q^0_{ab}, Q^1_{cd}\Big] &= \delta_{cb}Q^1_{ad} - \delta_{ad}Q^1_{cb} \\ \Big[Q^1_{ab}, Q^1_{cd}\Big] &= \delta_{cb}Q^2_{ad} - \delta_{ad}Q^2_{cb} + \frac{h^2}{4}Q^0_{ad}(\sum_e Q^0_{ce}Q^0_{eb}) - \frac{h^2}{4}(\sum_e Q^0_{ae}Q^0_{ed})Q^0_{cb} \end{aligned} \tag{65}$$

Ci-dessus, Q^2_{ab} est un nouvel opérateur dont l'expression n'est pas pertinente. Remarquablement, le terme supplémentaire non-linéaire dans la dernière équation peut être exprimé à l'aide des Q^0_{ab} uniquement. Ceci conduit à une relation n'impliquant que les charges Q^0_{ab} et Q^1_{ab}:

$$\begin{aligned} &\Big[Q^0_{ab}, \Big[Q^1_{cd}, Q^1_{ef}\Big]\Big] \quad - \quad \Big[Q^1_{ab}, \Big[Q^0_{cd}, Q^1_{ef}\Big]\Big] \\ = \frac{h^2}{4}\sum_{pq}\Big(&\Big[Q^0_{ab}, \Big[Q^0_{cp}Q^0_{pd}, Q^0_{eq}Q^0_{qf}\Big]\Big] \quad - \quad \Big[Q^0_{ap}Q^0_{pb}, \Big[Q^0_{cd}, Q^0_{eq}Q^0_{qf}\Big]\Big]\Big) \end{aligned} \tag{66}$$

L'algèbre associative engendrée par les éléments Q^0_{ab} et Q^1_{ab} satisfaisant les relations (65) et (66) est appelée un Yangien sur $su(p)$ [7]. Comme on le voit par comparaison avec l'eq. (17), cette algèbre est une déformation de l'algèbre de boucle sur $su(p)$.

Le Yangien $su(p)$ n'est pas une algèbre de Lie mais une algèbre de Hopf. En particulier, elle est équipée d'une comultiplication Δ, qui est un homomorphisme de l'algèbre dans le produit tensoriel de deux copies de l'algèbre. Pour le Yangien $su(p)$, la comultiplication est donnée par:

$$\begin{aligned} \Delta Q^0_{ab} &= Q^0_{ab} \otimes 1 + 1 \otimes Q^0_{ab} \\ \Delta Q^1_{ab} &= Q^1_{ab} \otimes 1 + 1 \otimes Q^1_{ab} + \frac{h}{2} \sum_d \Big(Q^0_{ad} \otimes Q^0_{db} - Q^0_{db} \otimes Q^0_{ad} \Big) \end{aligned} \tag{67}$$

Celle-ci peut être utilisée pour construire des produits tensoriels de représentations. Pour $h = 0$, elle se réduit à la comultiplication sur l'algèbre de boucle.

3.3 La matrice de transfert quantique et les Yangiens.

Les charges Q^0_{ab} et Q^1_{ab} sont les premiers termes du développement en $\frac{1}{\lambda}$ de la matrice de monodromie $T(\lambda)$. Les Yangiens $su(p)$ peuvent donc être présentés à l'aide de $T(\lambda)$, ou plus précisément, de ses composantes dans le développement en $\frac{1}{\lambda}$:

$$T_{ab}(\lambda) = \delta_{ab} + h \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} t^{(n)}_{ab} \tag{68}$$

La présentation alternative consiste donc à définir le Yangien comme l'algèbre associative engendrée par les éléments $t^{(n)}_{ab}$ sujet aux relations suivantes:

$$\Big[t^{(n)}_{ab}, t^{(m)}_{cd} \Big] = \delta_{cb} t^{(n+m)}_{ad} - \delta_{ad} t^{(n+m)}_{cb} + h \sum_{p=0}^{n-1} \Big(t^{(m+p)}_{ad} t^{(n-1-p)}_{cb} - t^{(n-1-p)}_{ad} t^{(m+p)}_{cb} \Big) \tag{69}$$

Ces relations sont équivalentes à:

$$\begin{aligned} \Big[t^{(0)}_{ab}, t^{(m)}_{cd} \Big] &= \delta_{cb} t^{(m)}_{ad} - \delta_{ad} t^{(m)}_{cb} \\ \Big[t^{(n+1)}_{ab}, t^{(m)}_{cd} \Big] - \Big[t^{(n)}_{ab}, t^{(m+1)}_{cd} \Big] &= h \Big(t^{(m)}_{ad} t^{(n)}_{cb} - t^{(n)}_{ad} t^{(m)}_{cb} \Big) \end{aligned} \tag{70}$$

A leurs tours, ces dernières sont équivalentes aux relations de commutation (62). Dans la théorie quantique, la condition de déterminant un est modifiée par la condition selon laquelle le "déterminant quantique" soit égal à un:

$$Det_q\ T(\lambda) \equiv \sum_{\sigma \text{perm.}} \epsilon(\sigma) T_{\sigma(p)p}(\lambda) .....T_{\sigma(1)1}(\lambda + ph) = 1 \tag{71}$$

La somme porte sur toutes les permutations de p objets et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Le déterminant quantique commute avec toutes les composantes de la matrice de monodromie, ainsi cette contrainte peut être imposée de façon consistente.

En tenant compte de la condition de déterminant un, le développement en $\frac{1}{\lambda}$ de la matrice de monodromie peut être reconstruit à partir de la donnée de ses deux premières composantes $t^{(0)}_{ab}$ and $t^{(1)}_{ab}$. Finalement, ces deux composantes sont reliées aux charges Q^0_{ab} et Q^1_{ab} comme suit:

$$\begin{aligned} Q^0_{ab} &= t^{(0)}_{ab} \\ Q^1_{ab} &= t^{(1)}_{ab} - \frac{h}{2} \sum_d t^{(0)}_{ad} t^{(0)}_{db} \end{aligned} \tag{72}$$

Ceci montre que, comme dans la théorie classique, la connaissance des deux premières charges Q^0_{ab} et Q^1_{ab} est équivalente à celle du développement en $\frac{1}{\lambda}$ de la matrice de monodromie.

Pour la matrice de transfert la comultiplication est:

$$\Delta T_{ab}(\lambda) = \sum_d T_{ad}(\lambda) \otimes T_{db}(\lambda)$$

Pour Q^0_{ab} et Q^1_{ab} ceci se réduit aux eqs.(67).

Enfin, la matrice de monodromie agit sur un opérateur Φ par l'action adjointe:

$$\Big[\mathrm{Adj}.T_{ab}(\lambda)\Big]\Phi = \sum_d T_{ad}(\lambda)\ \Phi\ T^{-1}_{db}(\lambda)$$

où $T^{-1}_{ab}(\lambda)$ est la matrice d'opérateurs caractérisée par $\sum_d T_{ad}(\lambda)T^{-1}_{db}(\lambda) = \delta_{ab}$. Cette action adjointe est l'analogue quantique de l'équation semi-classique (23). Autrement dit, l'action adjointe d'une algèbre de Hopf est l'analogue quantique d'une action de Lie-Poisson.

4 Symétries quantiques: un exemple en théorie des champs.

Nous utilisons l'exemple des algèbres de courants massives afin d'illustrer comment des courants non-locaux peuvent être construits dans une théorie des champs quantiques, et ceci de façon non-perturbative. Nous profitons de cet exemple pour montrer quelques propriétés et applications des courants non-locaux. Dans le cas des algèbres de courants massives, la symétrie engendrée par les courants non-locaux est un Yangien [2]. Mais cette approche est plus générale et s'applique à d'autres théories des champs bi-dimensionnelles; par exemple, le modèle de sine-Gordon est invariant sous une déformation quantique des algèbres affines, cf. e.g. [3].

4.1 Algèbres de courants massives en 2D.

Les variables du modèle classique sont des une-formes à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Les courants $J^a_\mu(x)$ sont les composantes de ces formes. Leurs équations de mouvements affirment que les courants sont conservés et que la forme est de courbure nulle:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \ J^a_\mu(x) \ &= \ 0 \\ \partial_\mu J^a_\nu(x) - \partial_\nu J^a_\mu(x) + \ f^{abc} \ J^b_\mu(x) \ J^c_\nu(x) \ &= 0 \end{aligned} \tag{73}$$

Les modèles sigma fournissent des exemples de ces théories. En deux dimensions, elles sont classiquement intégrables.

Il existe différentes manières de quantifier un modèle, e.g. on peut le définir sur un réseau, ou comme perturbation de son point fixe ultraviolet, etc... Ici, nous choisissons une approche qui consiste à contraindre l'algèbre des opérateurs [15]. Nous le ferons de sorte à assurer l'existence de courants (non-locaux) conservés. Ces hypothèses forment une définition possible des algèbres de courants massives. Ainsi nous supposons que:
(a) Il existe des courants quantiques conservés $J^a_\mu(x)$, à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathcal{G}$:

$$\partial_\mu \ J^a_\mu(x) \ = \ 0 \tag{74}$$

De plus, comme les courants sont des une-formes, nous supposerons qu'ils sont de dimension un.
(b) Les courants $J^a_\mu(x)$ satisfont la version quantique des équations de mouvements (73); i.e.

$$\partial_\mu J^a_\nu(x) - \partial_\nu J^a_\mu(x) + \ f^{abc} \ : J^b_\mu(x) \ J^c_\nu(x) : = 0 \tag{75}$$

où les doubles points se réfèrent à une régularisation appropriée du produit $f^{abc} J^b_\mu(x) J^c_\nu(x)$, par exemple par séparation des points. Cette hypothèse impose d'assez fortes contraintes sur les produits à courte distance des opérateurs (OPE).
(c) Les seuls champs à valeurs dans la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ et ayant dimension zéro, un ou deux, sont J^a_μ ou $\partial_\nu J^a_\mu$. Ceci fixe le produit à courte distance $f^{abc} J^b_\mu(x) J^c_\nu(0)$ à l'ordre $\mathcal{O}(|x|^{1-0})$:

$$f^{abc} \ J^b_\mu(x) J^c_\nu(0) = \mathcal{C}^\rho_{\mu\nu}(x) \ J^a_\rho(0) + \mathcal{D}^{\sigma\rho}_{\mu\nu}(x) \Big(\partial_\sigma J^a_\rho(0) \Big) + \mathcal{O}(|x|^{1-0}) \tag{76}$$

Dans un premier temps, ces hypothèses permettent de montrer que les courants J_μ^a satisfont les relations de commutation d'une algèbre de courants. En effet, les contraintes précédentes impliquent qu'aux premiers ordres dominants, l'OPE est:

$$\begin{aligned} J_\mu^a(x) J_\nu^b(0) &= -\frac{k\delta^{ab}}{2i\pi} \frac{1}{(x^2)^2} \Big(x_\mu x_\nu - \frac{1}{2} x^2 \eta_{\mu\nu} \Big) \\ &- \frac{f^{abc}}{2i\pi} \frac{1}{x^2} \Big(x_\mu \delta_\nu^\rho + x_\nu \delta_\mu^\rho - x^2 \eta_{\mu\nu} x^\rho \Big) J_\rho^c(0) \; + \; \mathcal{O}(|x|^{-0}). \end{aligned} \tag{77}$$

En particulier, dans les coordonnées du cône de lumière, $x^\nu \equiv (t, x)$; $x^\pm = x \pm t$, $ds^2 = dt^2 - dx^2$, on a:

$$J_\pm^b(x) J_\pm^c(0) \;=\; -\frac{k\delta^{ab}}{8i\pi} \frac{1}{(x^\pm)^2} \;-\; \frac{f^{abc}}{2i\pi} \frac{J_\pm^c(0)}{x^\pm} + \mathcal{O}(|x|^{-0})$$

Les produits d'opérateurs à courte distance codent les relations de commutation à temps égaux. En effet, rappelons que le produit de deux opérateurs est défini par la limite suivante:

$$J_\mu^a(x,t) J_\nu^b(y,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \; J_\mu^a(x, t + i\epsilon) J_\nu^b(y,t)$$

Donc, en utilisant la formule standard, $\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = i\pi\delta(x)$, on montre que les OPE (77) impliquent:

$$\begin{aligned} \Big[J_t^a(x) \;,\; J_x^b(0) \Big] &= f^{abc} J_x^c(0) \delta(x) - \frac{k}{2} \delta^{ab} \delta'(x) \\ \Big[J_t^a(x) \;,\; J_t^b(0) \Big] &= f^{abc} J_t^c(0) \delta(x) \\ \Big[J_x^a(x) \;,\; J_x^b(0) \Big] &= f^{abc} J_t^c(0) \delta(x) \end{aligned} \tag{78}$$

Ce sont les relations de commutation d'une algèbre de courants. Les composantes $J_\pm^a$ dans les coordonnées du cône de lumière satisfont les relations de commutation d'une algèbre affine $\mathcal{G}^{(1)}$.

Les hypothèses faites sur l'algèbre des courants contiennent des informations supplémentaires. Elles contraignent l'OPE à un ordre plus élevé. Et on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f^{abc} \Big(J_+^b(x) J_-^c(0) \;&-\; J_-^b(x) J_+^c(0) \Big) \\ &= \frac{C_{Adj}}{8i\pi} \log \Big(M^2 x^+ x^- \Big) \Big(\partial_+ J_-^a(0) - \partial_- J_+^a(0) \Big) + \mathcal{O}(|x|^{1-0}) \end{aligned} \tag{79}$$

C_{Adj} est le Casimir de $\mathcal{G}$ dans la représentation adjointe et M l'échelle de masse. Le produit $J_\pm^a(x) J_\mp^c(0)$ est donc logarithmiquement divergent. L'éq.(79) fournit un sens précis à l'équation de courbure nulle (75). La procédure de régularisation mentionnée ci-dessus consiste donc à extraire la divergence logarithmique.

Remarquons que implicitement les hypothèses sous-jacentes aux considérations précédentes impliquent (i) que la limite ultraviolette des algèbres de courants massives sont des modèles de WZW ayant pour symétrie $\mathcal{G}^{(1)} \otimes \mathcal{G}^{(1)}$; (ii) que ces théories massives décrivent des perturbations de leurs limites ultraviolettes par les champs $\Phi_{\text{pert.}}(x) = \sum_a J_\mu^a(x) \; J_\mu^a(x)$; (iii) que les algèbres de courants sont caractérisées par un niveau k, mais que l'équation de courbure est indépendante de ce nombre.

4.2 Les courants non-locaux et leur algèbre.

Comme nous avons extrait les ingrédients essentiels du produit à courte distance des courants, il est maintenant facile de construire dans la théorie quantique des courants non-locaux conservés. Cette construction repose sur le fait que les courants quantiques satisfont l'équation de courbure nulle. Notons $J^{(1)}(x,t)$ ces courants non-locaux. Nous les définissons par [15, 2]:

$$\begin{aligned} J^{(1)}{}^a_\mu(x,t) &= \lim_{\delta\to 0^+} J^{(1)}{}^a_\mu(x,t|\delta) \\ J^{(1)}{}^a_\mu(x,t|\delta) &= Z(\delta)\epsilon_{\mu\nu}J^a_\nu(x,t) + \frac{1}{2}f^{abc}\ J^b_\mu(x,t)\phi^c(x-\delta,t) \end{aligned} \tag{80}$$

où $\phi^c(x,t)$, qui satisfait $d\phi^c = \star J^c$, est défini par:

$$\phi^c(x,t) = \int_{\mathcal{C}_x} \star J^c$$

Le contour d'intégration $\mathcal{C}_x$ est une courbe de $-\infty$ à x.

La constante de renormalisation $Z(\delta)$ est déterminée en imposant que $J^{(1)}{}^a_\mu(x,t)$ soit fini et conservé. D'après léq.(79), $J^{(1)}{}^a_\mu(x,t)$ est fini si $Z(\delta) = \frac{\alpha}{2}\log(\delta) + \text{constant}$. La constante est fixée en imposant la loi de conservation. En utilisant l'éq.(80), on apprend:

$$\partial_\mu J^{(1)}{}^a_\mu(x,t|\delta) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\Big[Z(\delta)\left(\partial_\mu J^a_\nu - \partial_\nu J^a_\mu\right)(x,t) + f^{abc}\ J^b_\mu(x,t)J^c_\nu(x-\delta,t)\Big]$$

Donc, d'après l'éq.(79), on déduit que $\partial_\mu J^{(1)}{}^a_\mu(x,t|\delta)$ s'annule quand $\delta \to 0$ si $Z(\delta) = \frac{\alpha}{2}\log(M\delta) + \mathcal{O}(\delta^{1-0})$.

Le caractère non-local des courants $J^{(1)}(x,t)$ se reflète dans leurs relations de commutations à temps égaux. On peut en effet montrer que tout champ $\Phi(y,t)$, local par rapport aux courants $J^a_\mu(x,t)$, satisfait les relations suivantes [2] :

$$\begin{aligned} J^{(1)}{}^a_\mu(x,t)\Phi(y,t) &= \Phi(y,t)J^{(1)}{}^a_\mu(x,t) \quad ; \qquad x<y \\ J^{(1)}{}^a_\mu(x,t)\Phi(y,t) &= \Phi(y,t)J^{(1)}{}^a_\mu(x,t) - \frac{1}{2}f^{abc}\ Q^b_0\Big(\Phi(y,t)\Big)J^c_\mu(x,t) \quad ; \quad x>y \end{aligned} \tag{81}$$

où Q^b_0 est la charge associée au courant J^b_μ. Ces relations montrent que les courants non-locaux ne satisfont ni à des relations de commutation de bosons, ni à celles de fermions. Ils satisfont à des relations statistiques plus générales qui reflètent le groupe quantique sous jacent.

Etudions maintenant l'algèbre formée par les charges associées aux courants. Il faut distinguer les charges agissant sur les champs et sur les états de l'espace de Hilbert de la théorie. Ces dernières sont définies par l'intégrale des courants sur une surface à temps constant:

$$Q = \int_{t=cst} dx\ \mathcal{J}_t(x,t) \tag{82}$$

Nous noterons par Q^a_0 et Q^a_1 les charges correspondant aux courants $J^a_\mu(x)$ et $J^{(1)}{}^a_\mu(x)$.

Ces charges engendrent une extension non-abélienne de l'algèbre de Lorentz en deux dimensions. Celle-ci a pour générateurs les opérateurs de moments P_μ et l'opérateur de Lorentz L. Les moments P_μ sont les charges du tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}(x)$, avec

$\partial_\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$. L'opérateur L est la charge du courant $L_\mu(x) = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\left(x_\rho T_{\mu\sigma}(x) - x_\sigma T_{\mu\rho}(x)\right)$. Toutes ces charges satisfont les relations algébriques suivantes:

$$\begin{array}{ccc} \Big[\, Q_0^a \, , \, Q_0^b \,\Big] = \; f^{abc} Q_0^c & ; & \Big[\, Q_0^a \, , \, Q_1^b \,\Big] = \; f^{abc} Q_1^c \\ \Big[\, L \, , \, Q_0^a \,\Big] = \; 0 & ; & \Big[\, L \, , \, Q_1^a \,\Big] = \; -\dfrac{C_{Adj}}{4i\pi}\, Q_0^a \end{array} \tag{83}$$

Ces relations forment une partie des relations définissant le produit semi-direct des Yangiens $Y(\mathcal{G})$ par l'algèbre de Poincaré. Seules manquent les relations de Serre (qui sont plus difficiles à prouver mais néanmoins vérifiées). De plus, comme nous l'expliquerons dans la section suivante, les comultiplications de ces charges sont celles des Yangiens.

Les trois premières relations sont facilement prouvées. La dernière est plus intéressante et peut se démontrer de façon géométrique. Cette preuve consiste à exécuter une rotation de Lorentz $\mathcal{R}_{2\pi}$ d'un angle de $(i2\pi)$ sur les courants ${J^{(1)}}_\mu^a(x,t)$. Ceci est équivalent à une rotation dans l'Euclidien. Comme les courants ne sont pas locaux, cette rotation n'agit pas trivialement. En effet, lors de cette transformation, la courbe $\mathcal{C}_x$ s'enroule autour du point x. Si maintenant nous décomposons le contour enroulé en la somme d'un contour de $-\infty$ à x, et d'un petit contour entourant le point x, on trouve:

$$\mathcal{R}_{2\pi}\ {J^{(1)}}_\mu^a(x,t)\ \mathcal{R}_{2\pi}^{-1} \ = \ {J^{(1)}}_\mu^a(x,t) - \frac{1}{2} f^{abc}\ Q_0^c\Big(\ J_\mu^b(x,t)\Big) \tag{84}$$

Intégrer la composante temporelle de l'éq.(84) fournit:

$$\mathcal{R}_{2\pi}\ Q_1^a\ \mathcal{R}_{2\pi}^{-1} \ = \ Q_1^a - \frac{1}{2}\ C_{Adj}\ Q_0^a \tag{85}$$

en accord avec la relation de commutation (83), puisque $\mathcal{R}_{2\pi} = \exp(i2\pi L)$. Notez que cette propriété est intimement liée au caractère non-local des courants ${J^{(1)}}_\mu^a(x,t)$.

4.3 Action sur les champs et la comultiplication.

Les charges agissant sur les champs diffèrent de celles agissant sur les états par les contours sur lesquels les courants sont intégrés. Ainsi, les charges agissant sur un champ placé au point y sont définies en choisissant les contours d'intégration $\gamma(y)$ allant de $-\infty$ à $-\infty$ en entourant le point y:

$$Q_k^a\Big(\Phi(y)\Big) \ = \ \int_{z\in\gamma(y)} dz_\mu \epsilon^{\nu\mu}\ {J^{(k)}}_\nu^a(z)\Phi(y) \tag{86}$$

Ces charges sont reliées à celles agissant sur les états. En décomposant les contours $\gamma(y)$ en la différence de deux contours γ_+ et γ_-, passant respectivement au-dessus et en-dessous du point y, puis en utilisant les relations d'échanges (81), on prouve que [2]:

$$\begin{aligned} Q_0^a\Big(\Phi(y)\Big) \ &= \ Q_0^a\ \Phi(y) \ - \ \Phi(y)\ Q_0^a \\ Q_1^a\Big(\Phi(y)\Big) \ &= \ Q_1^a\ \Phi(y) \ - \ \Phi(y)\ Q_1^a \ + \ \frac{1}{2} f^{abc}\ Q_0^b\Big(\Phi(y)\Big)\ Q_0^c \end{aligned} \tag{87}$$

Le terme supplémentaire dans le membre de droite de la seconde équation est dû à la non-localité du courants ${J^{(1)}}_\mu^a$. Ainsi, pour des courants non-locaux l'action des charges sur les champs n'est pas fournit par des (anti)-commutateurs. On peut reconnaitre dans les éq.(87) l'action adjointe pour les Yangiens définie dans le chapitre 3. Celle-ci peut donc se représenter par les intégrales de coutour (86).

Cette représentation en intégrale de contour permet aussi de déduire la comultiplication. Cette dernière code la façon dont les charges agissent sur le produit de deux champs, e.g. $\Phi_1(y_1)\Phi_2(y_2)\cdots$ où les champs sont supposés locaux par rapport aux courants $J^a_\mu(x)$. Nous la noterons Δ. Pour les charges locales Q^a_0, on trouve [2]:

$$\begin{aligned} Q^a_0\Big(\Phi_1(y_1)\Phi_2(y_2)\Big) &= Q^a_0\Big(\Phi_1(y_1)\Big)\Phi_2(y_2) \;+\; \Phi_1(y_1)Q^a_0\Big(\Phi_2(y_2)\Big) \\ \Delta Q^a_0 &= Q^a_0\otimes 1 + 1\otimes Q^a_0 \end{aligned} \tag{88}$$

Pour les charges non-locales Q^a_1, on trouve:

$$\begin{aligned} Q^a_1\Big(\Phi_1(y_1)\Phi_2(y_2)\Big) &= Q^a_1\Big(\Phi_1(y_1)\Big)\;\Phi_2(y_2) \;+\; \Phi_1(y_1)\;Q^a_1\Big(\Phi_2(y_2)\Big) \\ &- \frac{1}{2}f^{abc}\;Q^b_0\Big(\Phi_1(y_1)\Big)Q^c_0\Big(\Phi_2(y_2)\Big) \\ \Delta Q^a_1 &= Q^a_1\otimes 1 \;+\; 1\otimes Q^a_1 \;-\; \frac{1}{2}f^{abc}\;Q^b_0\otimes Q^c_0 \end{aligned} \tag{89}$$

On reconnait dans ces équations la comultiplication des Yangiens. Notez que la non-localité des charges Q^a_1 impliquent qu'elles n'agissent pas de manière additive.

La preuve des équations (88) et (89) consiste à décomposer le contour γ_{12} apparaissant dans la définition de l'action des charges sur le produit $\Phi_1(y_1)\Phi_2(y_2)$. Celui-ci entoure les points y_1 et y_2. Il se décompose en la somme des deux contours γ_1 et γ_2 entourant respectivement les points y_1 et y_2. Mais, lorsque le courant est intégré sur le contour γ_2, les relations d'échange (81) doivent être utilisées afin de faire passer la courbe $\mathcal{C}_z$ à travers le point y_1. On peut aussi prouver les formules (88) et (89) directement à partir des commutateurs gradués (87).

4.4 Action sur les états asymptotiques et la matrice S.

Des résultats non-perturbatifs peuvent être déduits en analysant l'action des charges sur les états asymptotiques. La matrice S est contrainte par le fait qu'elle commute avec ces charges. Ces relations conduisent à des équations algébriques , qui ne sont en fait que les relations d'échange du groupe quantique sous-jacent (ici un Yangien). Parfois, ces contraintes sont suffisantes pour déterminer complètement la matrice de diffusion.

Montrons comment ceci s'applique au cas de l'algèbre de courant massive $SO(N)$ de niveau $k = 1$. Ce modèle est celui de Gross-Neveu. Les particules asymptotiques sont des fermions de Majorana, formant une représentation vectorielle de $SO(N)$. Soit θ les rapidités des fermions. On trouve alors que les charges agissent sur ces fermions comme suit:

$$\begin{aligned} Q^{kl}_0 &= T^{kl} \\ Q^{kl}_1 &= -\frac{\theta\;(N-2)}{i\pi}\;\Big(T^{kl}\Big) \\ \Delta Q^{kl}_1 &= Q^{kl}_1\otimes 1 + 1\otimes Q^{kl}_1 - \sum_n \Big(T^{kn}\otimes T^{nl} - T^{ln}\otimes T^{nk}\Big) \end{aligned} \tag{90}$$

où les T^{kl}'s forment la représentation vectorielle [1] de $SO(N)$: $\Big(T^{kl}\Big)^{mn} = \delta^{km}\delta^{ln} - \delta^{lm}\delta^{kn}$. On vérifie que ces charges satisfont à l'algèbre des Yangiens sur $SO(N)$. Sur les états asymptotiques, l'opérateur de Lorentz agit comme la dérivée $\frac{\partial}{\partial\theta}$.

Notons par $S(\theta_{12})$, $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$, la matrice de diffusion de deux fermions. $S(\theta)$ agit sur $[1] \otimes [1]$. Ce produit tensoriel se décompose en $[1^2] \oplus [2] \oplus \bullet$. Soit P_-, P_+ et P_0 les projecteurs respectifs. Par invariance sous $SO(N)$, $S(\theta)$ se décompose sur ces trois projecteurs:

$$S(\theta) \;=\; \sigma_+(\theta) P_+ + \sigma_-(\theta) P_- + \sigma_0(\theta) P_0 \tag{91}$$

où $\sigma_n(\theta)$ sont les amplitudes de diffusion. Comme les charges non-locales sont conservées, elles commutent avec la matrice S. Pour la diffusion de deux particules, cela implique les relations suivantes entre les différentes amplitudes:

$$\frac{\sigma_-(\theta)}{\sigma_+(\theta)} = \frac{\theta(N-2) + i2\pi}{\theta(N-2) - i2\pi} \quad ; \quad \frac{\sigma_0(\theta)}{\sigma_-(\theta)} = \frac{\theta + i\pi}{\theta - i\pi} \tag{92}$$

Cette équation détermine $S(\theta)$ à une fonction près qui peut être fixée en imposant les conditions de boostrap.

5 Symétries quantiques: un exemple en mécanique quantique.

Nous décrivons maintenant comment les symétries quantiques peuvent être utilisées afin de résoudre certains problèmes de mécanique quantique (i.e ayant un nombre fini de degrés de liberté) [5]. Nous avons choisi de traiter l'exemple d'une chaine de spins en interaction qui fut introduite par Haldane et Shastry. Il existe d'autres modèles possédant ces invariances, par exemple des modèles analogues à celui que nous allons décrire mais dans lesquels les spins ne sont plus figés sur une chaine. Techniquement ce problème est intéressant car il fournit un exemple de modèle intégrable qui ne peut être résolu par l'ansatz de Bethe algébrique, mais pour lequel la symétrie quantique offre une méthode de résolution alternative. Physiquement, ce modèle est intéressant car il semble fournir une description d'un gaz idéal de particules obéissant à une statistique fractionnaire.

5.1 L'hamiltonien de la chaine de spins.

L'hamiltonien de la chaine de spins isotrope avec des interactions à longue portée est donné par [12]:

$$H \;=\; \sum_{i\neq j} h_{ij}\ \left(P_{ij}-1\right) \quad \text{with} \quad h_{ij}=\frac{z_i z_j}{z_{ij}z_{ji}} \tag{93}$$

où P_{ij} est l'opérateur qui échange les spins situés aux sites i et j, et $z_{ij}=z_i-z_j$. Nous nous restreindrons au cas $su(2)$, pour lequel les variables de spins ne peuvent prendre que deux valeurs $\sigma_i=\pm$. Dans l'éq.(93), la somme est sur toutes les paires de sites. Pour une chaine de longueur N, les z_i sont égaux à $z_i=\omega^i$ avec ω une N^{ieme} racine primitive de l'unité.

Le spectre du modèle (93) fut conjecturé par Haldane [13]. Il possède une remarquable propriété d'additivité ainsi qu'une règle de sélection sur les états propres qui semble généraliser le principe de Pauli. Le spectre peut être décrit comme suit. A tout multiplet d'états propres correspond un ensemble de rapidités $\{m_p\}$ qui forment une suite d'entiers non-consécutifs compris entre 1 et $(N-1)$. L'énergie d'un état propre $|\{m_p\}\rangle$ de rapidités $\{m_p\}$ est:

$$H|\{m_p\}\rangle \;=\; \left(\sum_p \epsilon(m_p)\right)|\{m_p\}\rangle \qquad \text{avec} \quad \epsilon(m)=m(m-N) \tag{94}$$

La dégénérescence d'un multiplet est décrite par son contenu en représentation de $su(2)$ de la manière suivante. Codons les rapidités par une séquence de $(N-1)$ symboles 0 et 1 dans laquelle les positions des 1 indiquent celles des rapidités. Rajoutons deux symboles 0 à chaque extrémité de la séquence; celle-ci est maintenant de longueur $(N+1)$. Définissons un motif comme une série de Q symboles 0 consécutifs. Un motif correspond à une représentation de spin $\frac{Q-1}{2}$. Alors, une séquence peut être décomposée dans le produit de ces motifs élémentaires, et son contenu en représentations est le produit tensoriel de ces motifs.

5.2 Symétrie du modèle.

La symétrie responsable des dégénérescences est un Yangien sur $su(2)$ [5]. Rappelons que, comme nous l'avons expliqué dans les sections précédentes, un Yangien sur $su(2)$ est l'algèbre engendrée par les éléments T_n^{ab}, avec n un entier positif et $a, b = \pm$. Ceux-ci satisfont la relation d'échange suivante:

$$R(x-y)\ (1\otimes T(x))\ (T(y)\otimes 1)\ =\ (T(y)\otimes 1)\ (1\otimes T(x))\ R(x-y) \tag{95}$$

avec

$$T^{ab}(x) = \delta^{ab} + \sum_{n\geq 0} x^{-n-1} T_n^{ab}$$

La matrice $R(x)$ est la matrice de Yang: $R(x) = x + P$, avec P l'opérateur échangeant les deux espaces auxiliaires.

La matrice de transfert décrivant la symétrie de la chaine de Haldane-Shastry est donnée par [5]:

$$T^{ab}(x) = \delta^{ab} + \sum_{i,j=1}^{N} X_i^{ab} \Big(\frac{1}{x-L}\Big)_{ij} \tag{96}$$

avec

$$L_{ij} = (1-\delta_{ij})\theta_{ij} P_{ij}, \quad \theta_{ij} = z_i/z_{ij}$$

et, X_i^{ab} la matrice canonique $|a\rangle\langle b|$ agissant sur le i^{eme} spin. Cette matrice de transfert forme une représentation de l'algèbre d'échange (95) pour toutes valeurs des paramètres complexes z_j. Par contre, elle ne commute avec l'hamiltonien (93) que si: $\sum_j h_{ij}(\theta_{ij} - \theta_{ji}) = 0$. Cette condition est satisfaite pour $z_j = \omega^j$.

Rappelons la définition du déterminant quantique $Det_q T(x)$, qui est un élément du centre de l'algèbre:

$$Det_q T(x) = T_{--}(x-1) T_{++}(x) - T_{-+}(x-1) T_{+-}(x) \tag{97}$$

Dans la représentation (96), le déterminant quantique est un nombre valant:

$$Det_q\ T(x)\ =\ 1 + \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\frac{1}{x-\Theta}\Big)_{ij}\ =\ \frac{\Delta_N(x+1)}{\Delta_N(x)} \tag{98}$$

avec $\Delta_N(x)$ le polynome caractéristique de la matrice θ_{ij}: $\Delta_N(x) = \det(x-\Theta)$. Dans le modèle trigonométrique pour lequel $z_j = \omega^j$, on trouve:

$$\Delta_N(x) = \prod_{j=1}^{N} (x + \frac{N+1}{2} - j)$$

5.3 Les multiplets irréductibles et le spectre.

Résoudre le modèle consiste à trouver toutes les composantes irréductibles de l'algèbre des symétries puis à calculer l'énergie sur chacune de ces composantes. Pour les valeurs $z_j = \omega^j$, la représentation (96) est réductible. Chaque sous-représentation irréductible possède un unique vecteur de plus haut poids (h.w.v.)$|\Lambda\rangle$ qui est annihilé par $T_{+-}(x)$ et, qui est un vecteur propre des composantes diagonales $T_{\pm\pm}(x)$:

$$T(x)|\Lambda\rangle = \begin{pmatrix} t_{++}(x) & 0 \\ \star & t_{--}(x) \end{pmatrix} |\Lambda\rangle$$

Ici, $t_{\pm\pm}(x)$ sont des fonctions rationnelles de x, et non des opérateurs. Elles caractérisent totalement la représentation du Yangien. Puisque le déterminant quantique prend la même valeur dans toutes les sous-représentations, ces deux fonctions ne sont pas indépendantes:

$$\frac{\Delta_N(x+1)}{\Delta_N(x)} = t_{--}(x-1)t_{++}(x) \tag{99}$$

Ainsi, afin de déterminer toutes les sous-représentations, il suffit d'identifier tous les vecteurs de plus haut poids, et de calculer leur valeur propre $t_{--}(x)$.

Evidemment, le vide ferromagnétique $|\Omega\rangle = |+\cdots++\rangle$ est h.w.v.: La fonction $t_{--}(x)$ correspondante est égale à un, et l'énergie est zéro. Les h.w.v. dans le secteur à un magnon (i.e. un spin renversé) sont $|m\rangle = \sum_j \omega^{mj}\sigma_j^-|\Omega\rangle$, avec $1 \leq m \leq (N-1)$: Les valeurs propres correspondantes sont $t_{--}(x) = \frac{P_1(x+1)}{P_1(x)}$, avec $P_1(x) = (x + \frac{N+1}{2} - m)$, et les énergies valent $\epsilon(m) = m(m-N)$.

Plus généralement, afin de trouver tous les h.w.v., on décompose l'espace de Hilbert en sous-espaces à nombre de magnons fixé. Un état à M-magnons possède M spins renversés:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1,\cdots,n_M} \psi_{n_1,\cdots,n_M}\sigma_{n_1}^- \cdots \sigma_{n_M}^-|\Omega\rangle \tag{100}$$

où σ_n^a sont les matrices de Pauli agissant sur le spin positionné au site n. Par construction, les coefficients $\psi_{n_1,\cdots,n_M}$ sont symétriques dans leurs indices. Ainsi, puisque ces indices varient de 1 à N, à tout état à M-magnons, on peut associer un polynome symétrique en M variables $\Psi(z_1,\cdots,z_M)$ tel que:

$$\Psi(\omega^{n_1},\cdots,\omega^{n_M}) = \psi_{n_1,\cdots,n_M} \tag{101}$$

Il est facile de vérifier que les états dont le polynome est de la forme:

$$\Psi(z_1,\cdots,z_M) = (\prod_{p=1}^{M} z_p)\prod_{p<q}(z_p-z_q)^2\phi(z_1,\cdots,z_M), \tag{102}$$

avec $\phi(z_1,\cdots,z_M)$ un polynome symétrique de degré inférieur à $(N-2M)$, sont des vecteurs de plus haut poids. Nous verrons ci-après que tous les h.w.v. sont de cette forme. Ainsi, pour une chaine de longueur N, il y a $\frac{(N-M)!}{M!(N-2M)!}$ h.w.v. dans le secteur à M-magnons.

Ces vecteurs de plus haut poids sont distingués par leurs valeurs propres $t_{--}(x)$. On peut montrer que l'action induite par $T_{--}(x)$ sur les polynomes est:

$$\begin{aligned} T_{--}(x)\ \Psi(z_.) &= \left(1 + \sum_{p=1}^{M} \frac{1}{x + \frac{N+1}{2} - D_p}\right)\Psi(z_.) \qquad (103)\\ &= \left(1 + \frac{1}{x - \widehat{D}_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x - \widehat{D}_M}\right)\Psi(z_.) \end{aligned}$$

où les differentielles D_p et $\widehat{D}_p$ sont définies par [8, 17]:

$$\begin{aligned} D_p &= z_p\partial_{z_p} + \sum_{p\neq q}\theta_{pq}K_{pq} \qquad (104)\\ \widehat{D}_p &= z_p\partial_{z_p} + \sum_{q>p}\theta_{pq}K_{pq} - \sum_{q<p}\theta_{qp}K_{pq} \end{aligned}$$

avec K_{pq} l'opérateur permutant les coordonnées z_p et z_q. Les fonctions symétriques dans les D_p sont les grandeurs conservées du modèle de Calogero-Sutherland. Ainsi, les fonctions propres de $T_{--}(x)$ sont celles de ce dernier modèle. Nous avons montré que les opérateurs commutants sont triangulaires dans une base appropriée, et que leurs valeurs propres sont entières. Ceci permet de construire, pour tout ensemble de rapidités $\{m_p\}$, des fonctions propres symétriques $\Psi^{\{m_p\}}(z.)$ telles que:

$$\sum_p (\widehat{D}_p)^n \ \Psi^{\{m_p\}}(z.) = \Big(\sum_p m_p^n \ \Big) \Psi^{\{m_p\}}(z.)$$

Ces fonctions sont des polynomes de degré compris entre 1 et $(N-1)$ si $1 \leq m_p \leq (N-1)$. De plus elles s'annulent ssi deux des entiers m_p coincident ou diffèrent d'une unité. On retrouve ainsi la règle de sélection sur les rapidités que nous avons mentionnée. Finalement, ceci montre qu'à tout ensemble de rapidités satisfaisant aux règles de sélection correspond un vecteur de plus haut poids, et donc une sous-représentation irréductible.

Les dégénérescences sont codées dans les valeurs propres de la matrice de transfert. En utilisant les résultats précédents, on déduit que sur les vecteurs de plus haut poids $|\{m_p\}\rangle$ de rapidités $\{m_p\}$, la matrice de transfert agit comme suit:

$$T(x)|\{m_p\}\rangle = \frac{P_1(x+1)}{P_1(x)} \begin{pmatrix} \frac{P_0(x+1)}{P_0(x)} & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix} |\{m_p\}\rangle \tag{105}$$

où $P_0(x)$ et $P_1(x)$ factorisent $\Delta_N(x)$:

$$\Delta_N(x) = P_0(x)P_1(x)P_1(x-1)$$

avec, c.f. éq.(103):

$$P_1(x) = \prod_{p=1}^{M} (x + \frac{N+1}{2} - m_p)$$

On vérifie que cette factorisation n'admet de solution que si les racines de $P_1(x)$ ne sont pas adjacentes. Ceci fournit une autre manière de déduire la règle de sélection sur les rapidités.

Enfin, décomposons la séquence des rapidités $\{m_p\}$ en ses motifs élémentaires. A chacun des motifs de longueur Q nous associons une matrice de transfert canonique définie par:

$$T^{ab}_{motif}(x) = \delta^{ab} + \frac{S^{ab}}{x - x_0}$$

où S^{ab} sont les matrices formant une représentation de $su(2)$ de spin $\frac{Q-1}{2}$, et x_0 est la position du motif sur la séquence. Cette matrice satisfait les relations d'échange des Yangiens. La représentation spécifiée par la matrice de transfert (105) est alors équivalente au produit tensoriel irréductible des matrices de transfert associées à chacun de ces motifs:

$$T(x) \cong \bigotimes_{motifs} T_{motif}(x + \frac{N+1}{2})$$

Ceci peut être prouvé en comparant les valeurs des éléments diagonaux sur les vecteurs de plus haut poids. Ainsi, nous avons montré que la dégénérescence d'un jeu de rapidités est fournie par le produit tensoriel de ces motifs.

Pour finir, il faut maintenant calculer la valeur de l'énergie sur chacun des multiplets. On peut vérifier que l'hamiltonien de la chaine de spin agit sur les polynomes des vecteurs de plus haut poids par:

$$\begin{aligned}(H_M\Psi)(z.) &= \left(\sum_{p=1}^{M} z_p\partial_{z_p}(z_p\partial_{z_p}-N)+4\sum_{p<q}\frac{z_pz_q}{z_{pq}z_{qp}}\right)\Psi(z.)\\ &= \sum_{p=1}^{M}\widehat{D}_p(\widehat{D}_p-N)\Psi(z.)\end{aligned}$$

De la dernière équation il suit que l'énergie du multiplet $\{m_p\}$ est:

$$E(\{m_p\})=\sum_p\ m_p(m_p-N)$$

Ce qui complète la détermination du spectre de cette chaine de spins.

5.4 Fonctions d'ondes et statistiques.

On peut donner explicitement les fonctions d'ondes des états à M-magnons car celles-ci sont les fonctions propres de l'hamiltonien de Calogero-Sutherland. De plus cette construction met en évidence la règle de sélection sur les rapidités.

Cette construction est fondée sur l'existence d'opérateurs, que nous notons Λ_M, qui entrelacent l'hamiltonien de Calogero-Sutherland et l'hamiltonien libre [16]:

$$H\ \Lambda_M=\Lambda_M\Delta\quad\text{avec}\quad\Delta=\sum_{p=1}^{M}\ z_p\partial_{z_p}(z_p\partial_{z_p}-N)\tag{106}$$

Par exemple pour deux magnons: $\Lambda_2=z_1\partial_{z_1}-z_2\partial_{z_2}-\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$.

Les opérateurs Λ_M sont antisymétriques. Donc les fonctions d'ondes symétriques sont obtenues en agissant d'abord avec Λ_M sur les ondes planes $z_1^{m_1}\cdots z_M^{m_M}$, puis en antisymétrisant, ou, en antisymétrisant d'abord, puis en agissant avec Λ_M:

$$\Psi(z_1,\ldots,z_M)=\Lambda_M\ \left(\mathrm{Det}(z_p^{m_q})_{pq}\ \right)\tag{107}$$

Il est facile de vérifier que les fonctions d'ondes (107) sont des polynomes symétriques s'annulant aux points coincidants. Si les rapidités sont telles que $1\le m_p\le(N-1)$, ces polynomes sont alors de degré inférieur à $(N-1)$ et satisfont à la condition (102). Ces fonctions d'ondes sont donc celles des vecteurs de plus haut poids. Ainsi, puisque les ondes planes z^m sont les fonctions d'ondes des h.w.v. à un magnon, l'opération $\mathcal{D}=\Lambda_M\circ\mathrm{Det}$ envoie le produit tensoriel de M états à un-magnon dans un état à M-magnons:

$$|m_1\rangle\otimes\cdots\otimes|m_M\rangle\xrightarrow{\mathcal{D}}|\{m_1,\cdots,m_M\}\rangle\tag{108}$$

Cette opération est compatible avec la règle de sélection: si deux des rapidités m_p et m_q coincident ou diffèrent d'une unité, alors la fonction d'onde résultante est nulle. L'eq. (108) semble donc être une généralisation du déterminant de Slater.

References

[1] O.Babelon and D.Bernard, *Dressing symmetries*, Comm. Math. Phys. 149 (1992) 279, and
Affine solitons : a relation between tau functions, dressing and Bäcklund transformations, Int. J. Mod. Phys. A8 (1993) 507.

[2] D. Bernard, *Hidden Yangiens in 2D massive current algebras*, Comm. Math. Phys. 137 (1991) 191-208, and
Quantum Symmetries in 2D Massive Field Theories, to appear in Cargese '92 proceedings.

[3] D. Bernard and A. Leclair, *Quantum group symmetries and non-local currents in 2D QFT*, Comm. Math. Phys. 142 (1991) 99, and
The fractional supersymmetric sine-Gordon models, Phys. Lett. B247 (1990) 309-316.

[4] D. Bernard, G. Felder, *Quantum group symmetries in two-dimensional lattice quantum field theory*, Nucl. Phys. B365 (1991) 98.

[5] D.Bernard, M.Gaudin, F.D.Haldane and V.Pasquier, *Yang-Baxter equation in long range interacting systems*, preprint SPhT-93-006, to appear in J. Phys. A.
F.D.Haldane et al, *Yangien symmetry of integrable quantum chains with long-range interactions and a new description of states in conformal field theory*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 2021.

[6] E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara and T.Miwa, *Transformation groups for soliton equations*, Proc.Jpn.Acad. 57A (1981) 3806; Physica 4D (1982) 343; Publ. RIMS 18 (1982) 1077.

[7] V.G.Drinfeld, *"Quantum Groups"* Proc. of the ICM, Berkeley, (1986).

[8] C.F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans.Amer.Math.Soc. 311 (1989) 167.

[9] L.D.Faddeev, *Integrable Models in 1+1 Dimensional Quantum Field Theory.* Les Houches Lectures. Elsevier Science Publishers (1984).

[10] L.D.Faddeev and L.A.Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1986.

[11] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson (1983).

[12] F.D. Haldane, *Exact Jastrow-Gutzwiller resonating-valenve-bond ground state of the spin-$\frac{1}{2}$ antiferromagnetic Heisenberg chain with $\frac{1}{r^2}$ exchange*, Phys.Rev.Lett. 60 (1988) 635.
B.S.Shastry, *Exact solution of an $S = \frac{1}{2}$ Heisenberg antiferromagnetic chain with long-range interactions*, Phys.Rev.Lett. 60 (1988) 639.

[13] F.D. Haldane, *Spinon gas description of the $S = \frac{1}{2}$ Heisenberg chain with inverse-square exchange: exact spectrum and thermodynamics*, Phys.Rev.Lett. 67 (1991) 937.

[14] J.H.Lu, *Multiplicative and Affine Poisson Structures on Lie Groups*. PhD Thesis, University of California at Berkeley (1990).

[15] M.Lüscher, K. Pohlmeyer, *Scattering of massless lumps and non-local charges in two-dimensional classical non-linear sigma models*, Nucl.Phys. B137 (1978) 46.
M.Lüscher, *Quantum non-local charges and absence of particle production in the two dimensional non-linear sigma models*, Nucl.Phys. B135 (1978) 1.

[16] E.M. Opdam, *Some applications of hypergeometric shift operators*, Invent.Math. 98 (1989) 1;
G.J. Heckman, *An elementary approach to the hypergeometric shift operator of Opdam*, Invent. Math. 103 (1991) 341;
O.Chalykh and A.Veselov, *Integrability in the theory of Schrodinger operator and harmonic analysis*, Comm. Math. Phys. 152 (1993) 29.

[17] A.P. Polychronakos, *Exchange operator formalism for integrable systems of particles*, Phys.Rev.Lett. 69 (1992) 703.

[18] M.Semenov-Tian-Shansky, *What is a classical r-matrix?*, Funct.Anal.Appl. 17 (1983) 259.

[19] M.Semenov-Tian-Shansky, *Dressing transformations and Poisson Lie group actions*, Publ.RIMS Kyoto Univ. 21 (1985) 1237.

[20] E.Sklyanin, *On the Complete Integrability of the Landau-Lifshitz Equation*. Preprint LOMI E-3-79 Leningrad.

[21] V.E.Zakharov, A.B.Shabat, *Integration of Non Linear Equations of Mathematical Physics by the Method of Inverse Scattering II*. Funct.Anal.Appl. 13 (1979) 166.