I. IL METODO DI NEWTON

Il metodo di Newton consente di calcolare molto rapidamente con un calcolatore uno zero di una funzione assegnata $f(x) \in C^2$, cioè un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. Perché il metodo sia applicabile, è necessario peró che esista un intervallo $[a, b]$ tale che:
1) $\bar{x} \in [a, b]$;
2) $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a, b]$.
Una condizione necessaria e sufficiente perché l'intervallo esista è che $f'(\bar{x}) \neq 0$ e $f''(\bar{x}) \neq 0$. Infatti, se $f(x) \in C^2$, se le derivate prima e seconda sono diverse da zero in $x = \bar{x}$ sono necessariamente diverse da zero in un intorno di $\bar{x}$.

Per utilizzare praticamente il metodo, il primo problema è quindi individuare un intervallo $[a, b]$ in cui lo zero di $f(x)$ sia contenuto con certezza e le derivate prima e seconda di $f(x)$ non si annullino. Questo problema va risolto caso per caso studiando la funzione $f(x)$, e costituisce il limite principale del metodo. Supponiamo adesso di averlo risolto, cioè di aver trovato un intervallo $[a, b]$ che verifica le proprietà richieste.

Prendiamo un punto a caso $x_0 \in [a, b]$ e calcoliamo $f(x_0)$. Può succedere che $f(x_0) = 0$; in questo caso (fortunato!) il problema è risolto, $\bar{x} = x_0$ e l'algoritmo si arresta. Se invece (come è più probabile) $f(x_0) \neq 0$, sviluppiamo $f(x)$ in serie di Taylor intorno ad x_0:

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ora possiamo risolvere l'equazione $f(x) = 0$, e chiamiamo x_1 la soluzione:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

In generale, $x_1 \neq \bar{x}$ perché abbiamo sviluppato $f(x)$ al primo ordine trascurando i termini successivi in $(x - x_0)$. Se per fortuna $x_1 = \bar{x}$, cioè se $f(x_1) = 0$, di nuovo l'algoritmo si arresta. Se invece $f(x_1) \neq 0$, ripetiamo la procedura e definiamo un nuovo valore

$$x_2 = x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Otteniamo così una successione $\{x_n\}$ definita dalla regola

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Se per caso a un certo punto x_n coincide esattamente con $\bar{x}$, cioè se per qualche n si ha $f(x_n) = 0$, l'algoritmo si arresta; tuttavia, nelle applicazioni pratiche questo caso si verifica molto raramente, semplicemente per il fatto che il computer lavora con un numero finito di cifre nella rappresentazione decimale dei numeri reali.

Riassumendo, abbiamo definito un metodo per cercare uno zero di una funzione assegnata $f(x) \in C^2$, con il seguente algoritmo:
1) Individuiamo un intervallo $[a, b]$ che verifichi le proprietà necessarie;
2) Partiamo da un punto a caso $x_0 \in [a, b]$;
3) Calcoliamo una successione $\{x_n\}$ con la regola ricorsiva (1);
4) Se per caso per un certo n troviamo $f(x_n) = 0$, l'algoritmo si arresta e il risultato è $\bar{x} = x_n$; altrimenti, continuiamo a calcolare x_n fino a che $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, dove ϵ è la precisione che desideriamo.
Ovviamente, l'ultima affermazione ha senso solo se la successione $\{x_n\}$ converge effettivamente a $\bar{x}$, cioè se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \ . \tag{2}$$

Verifichiamo quindi questa affermazione, e cerchiamo di stimare la velocità di convergenza della successione.

Esercizio: date una interpretazione grafica del metodo di Newton.
Suggerimento: disegnate la funzione $f(x)$ (ricordate le ipotesi di applicabilità del metodo), considerate un punto x_0 e disegnate la retta tangente a $f(x)$ in x_0. Dove interseca l'asse x?

II. CONVERGENZA DEL METODO DI NEWTON

Per discutere la convergenza del metodo di Newton, sviluppiamo $f(x)$ in serie di Taylor intorno al suo zero $\bar{x}$ (attenzione a non confondere questo sviluppo intorno a $\bar{x}$, che è l'incognita del problema, con lo sviluppo intorno a x_0, un valore noto, che abbiamo fatto nel paragrafo precedente):

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x-\bar{x}) + f_2(x-\bar{x})^2 \\ f_1 &= f'(\bar{x}) \qquad f_2 = f''(\bar{x})/2 \end{aligned} \tag{3}$$

Supponiamo che l'intorno $[a,b]$ sia abbastanza piccolo da poter trascurare i termini successivi nello sviluppo di Taylor di $f(x)$. Costruiamo la successione $\{x_n\}$ con la regola (1) e definiamo $\delta x_n = x_n - \bar{x}$. Sostituiamo l'espressione (3) nella formula (1):

$$\delta x_{n+1} = \delta x_n - \frac{f_1 \delta x_n + f_2(\delta x_n)^2}{f_1 + 2 f_2 \delta x_n} = \frac{A(\delta x_n)^2}{1 + 2A\delta x_n}$$

dove abbiamo definito $A = f_2/f_1$ per comodità. Per $|A\ \delta x_n| \ll 1$ possiamo sviluppare in serie il denominatore dell'equazione precedente:

$$\delta x_{n+1} \sim A(\delta x_n)^2 \left[1 + O(\delta x_n)\right] = A(\delta x_n)^2 + O((\delta x_n)^3) \tag{4}$$

Trascurando gli ordini successivi e moltiplicando entrambi i membri per A, l'equazione diventa

$$A\delta x_{n+1} = (A\delta x_n)^2$$

la cui soluzione è

$$A\delta x_n = (A\delta x_0)^{2^n} \tag{5}$$

Osserviamo quindi che se $|A\ \delta x_0| \ll 1$, si ha anche $|A\ \delta x_n| \ll 1$ per ogni n, e quindi gli sviluppi in serie (3) e (4) sono possibili per ogni n. Dalla formula (5) si vede che

$$\lim_{n\to\infty} \delta x_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}\ ,$$

e quindi l'algoritmo effettivamente converge allo zero di $f(x)$. Osserviamo che la convergenza è molto rapida, dal momento che n compare in un doppio esponente.

Per concludere è importante ricordare che la scelta del punto di partenza x_0 è molto delicata perchè se x_0 è troppo distante da $\bar{x}$ (cioè se è fuori dall'intervallo $[a,b]$ in cui le ipotesi di applicabilità del metodo sono verificate) la successione può convergere a uno zero diverso da quello cercato o può divergere.

Esercizio: Verificare graficamente che il metodo di Newton converge allo zero $\bar{x}$ per qualunque dato iniziale x_0 tale che $|2A\delta x_0| < 1$ nel caso in cui $f(x)$ è data esattamente dall'espressione (3).