Grandi fluttuazioni nel caso di variabili indipendenti

Francesco Zamponi
Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma "La Sapienza"

I. TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Consideriamo N variabili y_i indipendenti con distribuzione $p(y_i)$. Vogliamo calcolare la distribuzione della variabile $l = N^{-1}\sum_i y_i$ nel limite $N \to \infty$. Scriviamo, definendo $dp(y_i) = p(y_i)dy_i$,

$$p(l) = \int \prod_i dp(y_i)\ \delta\left(\sum_i y_i - Nl\right) = \int \prod_i dp(y_i) \int d\lambda e^{\lambda \sum_i y_i - N\lambda l} \tag{1}$$

usando la rappresentazione integrale della funzione δ e ruotando il cammino di integrazione sull'asse immaginario del piano λ complesso. Definiamo

$$Z(\lambda) = \int dp(y) e^{\lambda y} = e^{f(\lambda)} \tag{2}$$

E' chiaro che $f(0) = 0$, $f'(0) = \langle y \rangle = m$, $f''(0) = \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle = \sigma^2$. Otteniamo, per $N \to \infty$,

$$p(l) = \int d\lambda e^{-N(\lambda l - f(\lambda))} \sim e^{-N(\bar\lambda l - f(\bar\lambda))} \tag{3}$$

dove $\bar\lambda$ è definito da $l = f'(\bar\lambda)$. Assumendo che $\bar\lambda$ sia piccolo otteniamo

$$l \sim f'(0) + f''(0)\bar\lambda = m + \sigma^2\bar\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \bar\lambda = \frac{l-m}{\sigma^2} \tag{4}$$

e quindi sviluppando nella (3) $f(\lambda) \sim m\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda$ si ottiene

$$p(l) \sim e^{-N\frac{(l-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

Quindi la variabile l ha distribuzione Gaussiana con valor medio m e deviazione standard $\sigma/\sqrt{N}$. Questo risultato è valido con la condizione

$$\bar\lambda \ll \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

che assicura che $\bar\lambda$ sia molto piccolo nel limite di $N \to \infty$.

II. GRANDI DEVIAZIONI

Una grande deviazione si ha se ad esempio $|l - m| > a$ dove a è una costante fissata. Infatti abbiamo visto che le fluttuazioni tipiche di l rispetto al suo valor medio sono dell'ordine di $1/\sqrt{N}$ e quindi tendono a 0 nel limite $N \to \infty$. Stimiamo quindi la probabilità di una grande fluttuazione con $l - m > a$:

$$p(l-m>a) = \int_{l-m>a} \prod_i dp(y_i) \leq \int_{l-m>a} \prod_i dp(y_i) e^{N\lambda(l-m-a)} \leq \int \prod_i dp(y_i) e^{N\lambda(l-m-a)} \tag{7}$$

dove la prima maggiorazione è valida per ogni λ dal momento che l'integrale è sulla regione $l - m > a$ e la seconda maggiorazione è dovuta al fatto che l'integrando è sempre positivo. Sostituiamo $l = N^{-1}\sum_i y_i$ e otteniamo

$$p(l-m>a) \leq e^{N(f(\lambda) - \lambda f'(0) - \lambda a)} \tag{8}$$

Ora usiamo lo sviluppo di Taylor $f(\lambda) = f'(0)\lambda + \frac{1}{2}f''(\tilde\lambda)\lambda^2$ con $\tilde\lambda \in [0, \lambda]$ e otteniamo

$$p(l-m>a) \leq e^{N(\frac{1}{2}f''(\tilde\lambda)\lambda^2 - \lambda a)} \tag{9}$$

Se ora assumiamo che $f''(\tilde{\lambda}) < C$ per $\lambda \in [0, \lambda_{max}]$, possiamo maggiorare ancora con

$$p(l - m > a) \leq e^{N(\frac{1}{2}C\lambda^2 - \lambda a)} \tag{10}$$

e dal momento che la stima è valida per ogni $\lambda < \lambda_{max}$ possiamo prendere il minimo su λ ottenendo

$$p(l - m > a) \leq e^{-N\frac{a^2}{2C}} \tag{11}$$

purchè $a/C \in [0, \lambda_{max}]$. La verifica di queste ipotesi dipende essenzialmente dal fatto che la distribuzione $p(y)e^{\lambda y}$ abbia varianza finita per ogni λ, anche se crescente con λ. La stima è analoga nel caso $l - m < -a$.