Tesina per l'esame di dottorato, A.A. 2001/2002

Guido Manzi[1], Francesco Zamponi[2]
[1]*Dipartimento di Fisica dell'UniversitÃ di Roma "Tor Vergata"*,[2]*Dipartimento di Fisica dell'UniversitÃ di Roma "La Sapienza"*

I. IL PROBLEMA

Consideriamo un modello di Ising bidimensionale in una regione quadrata Ω di lato L con condizioni al bordo $+$ nella parte superiore e $-$ nella parte inferiore. Vogliamo dimostrare che, detta M la magnetizzazione totale, si ha

$$p(|M| > \alpha L^2) < \begin{cases} e^{-CL} & \alpha < m^* \\ e^{-C'L^2} & \alpha > m^* \end{cases} \tag{1}$$

dove C e C' sono costanti dipendenti da α e dalla temperatura, e m^* è la magnetizzazione spontanea di equilibrio con condizioni $+$. Tutte le stime che citeremo nel seguito si riferiscono al caso in cui la temperatura è sufficientemente bassa e il volume sufficientemente grande.

II. IDEA PER LA DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che con queste condizioni al bordo si ha $\langle M \rangle = 0$; si avrà una linea di separazione λ fra due regioni θ_+ e θ_- in cui la magnetizzazione aspettata sarà

$$\begin{aligned} M(\theta_+) &\sim m^*|\theta_+| \\ M(\theta_-) &\sim -m^*|\theta_-| \end{aligned} \tag{2}$$

e l'area delle due regioni sarà uguale in media. L'idea alla base della dimostrazione è quindi la seguente: per avere una fluttuazione di M tale che $m^*|\Omega| > M > \alpha|\Omega|$ è sufficiente spostare la linea di separazione tra le due regioni in modo che la magnetizzazione totale sia M mantenendo le relazioni (2). Il contributo dominante è dato quindi dalle configurazioni in cui due regioni (di area diversa) hanno magnetizzazione vicina a quella di equilibrio. La probabilità delle configurazioni di questo tipo è dell'ordine della probabilità di avere una fluttuazione della linea di separazione di ordine L, stimata da

$$p(|\lambda| > kL) < C_1 e^{-C_2 L} \tag{3}$$

Al contrario, per realizzare una fluttuazione di M tale che $|M| > m^*|\Omega|$ è necessario che in almeno una delle due regioni si abbia $|M(\theta)| > m^*|\theta|$. E' quindi possibile utilizzare il lemma che segue stimando separatamente il contributo proveniente dalle fluttuazioni nelle due regioni.

III. LEMMA

La dimostrazione è basata sul seguente lemma: sia θ una regione di Ω con condizioni al contorno $+$, tale che *v)* $|\theta| > k|\Omega|$ e *f)* $|\partial\theta| < |\theta|^{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ per qualche $k > 0$ e $\varepsilon > 0$. Allora, per β e $|\Omega|$ sufficientemente grandi

$$p(|M(\theta) - m^*|\theta|| > t|\theta|) < e^{-C(t,\beta)|\theta|} \tag{4}$$

Ovviamente il lemma è valido anche con condizioni al contorno $-$ cambiando segno a m^*. Questo lemma è analogo al lemma 5.4 di [1], ma è valido nel caso $p = 1$, dove non sembra necessaria la restrizione sui contorni c-large e al posto dell'ipotesi $|\partial\theta| < k'|\theta|^{1/2}$ si può richiedere la condizione *f)*.
Per dimostrare il lemma consideriamo per prima

$$p(M(\theta) - m^*|\theta| > t|\theta|) = \frac{1}{Z}\sum_{\underline{\sigma}}{}' e^{-\beta H_\theta(\underline{\sigma})} \tag{5}$$

dove H_θ è l'hamiltoniana ristretta alla regione θ che comprende anche il termine dovuto alle condizioni al bordo, e $\sum'$ è la somma sulle configurazioni tali che $M(\theta) - m^*|\theta| > t|\theta|$. Si ha

$$\begin{aligned} p(M(\theta) - m^*|\theta| > t|\theta|) &\leq \frac{1}{Z}\sum_{\underline{\sigma}}{}' e^{-\beta H_\theta(\underline{\sigma}) + h[M_\theta(\underline{\sigma}) - m^*|\theta| - t|\theta|]} \\ &\leq \frac{1}{Z}\sum_{\underline{\sigma}} e^{-\beta H_\theta(\underline{\sigma}) + h[M_\theta(\underline{\sigma}) - m^*|\theta| - t|\theta|]} = e^{|\theta|[f(h) - f(0) - f'(0)h - th]} \end{aligned} \tag{6}$$

dove abbiamo definito

$$e^{|\theta| f(h)} = \sum_{\underline{\sigma}} e^{-\beta H_\theta(\underline{\sigma}) + h M_\theta(\underline{\sigma})} = \sum_{\underline{\sigma}} e^{-\beta H_\theta(\underline{\sigma}) + h\sum_{i\in\theta}\sigma_i} \tag{7}$$

e utilizzato la relazione

$$m^* = f'(0) \tag{8}$$

valida solo per $|\Omega|$ sufficientemente grande e sotto le ipotesi *v)* ed *f)*.
Utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $f(h)$ otteniamo

$$p(M(\theta) - m^*|\theta| > t|\theta|) \leq e^{|\theta|[\frac{1}{2}f''(\tilde{h})h^2 - th]} \qquad \tilde{h} \in [0, h] \tag{9}$$

Supponiamo ora che

$$f''(h) < C \text{ per } h \in [0, \bar{h}] \tag{10}$$

Allora possiamo sostituire f'' con C all'esponente della (9) e prendere il minimo su h, ottenendo

$$p(M(\theta) - m^*|\theta| > t|\theta|) \leq e^{-|\theta|\frac{t^2}{2C}} \tag{11}$$

purché $t/C \in [0, \bar{h}]$. Il caso $M(\theta) - m^*|\theta| < -t|\theta|$ si tratta analogamente, e quindi per completare la dimostrazione del lemma bisogna verificare la validità della (10). Calcolando la derivata seconda di f si ha

$$f''(h) = \frac{1}{|\theta|}\sum_{(i,j)\in\theta^2}[\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_h - \langle\sigma_i\rangle_h\langle\sigma_j\rangle_h] \tag{12}$$

E' noto [1] che per β sufficientemente grande, per qualunque valore di h e sotto le ipotesi *v)* e *f)* le funzioni di correlazione connesse decadono esponenzialmente nella distanza $|i - j|$, e quindi

$$\sum_{j\in\theta}[\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_h - \langle\sigma_i\rangle_h\langle\sigma_j\rangle_h] < C \qquad \forall i \in \theta \tag{13}$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella (12) si ottiene la (10) per qualunque valore di h.

IV. STIMA DELLA PROBABILITÀ DI AVERE UNA LINEA DI SEPARAZIONE LUNGA

Nel seguito sarà utile anche la stima che segue, che è analoga a quella discussa a lezione (valida per $k > 12$ e condizioni al contorno arbitrarie) ma è valida per qualunque valore di $k > 1$ con queste particolari condizioni al contorno. L'espressione della probabilità di avere $|\lambda| > kL$ è

$$p(|\lambda| > kL) = \frac{\sum_{|\lambda|>kL,\gamma_i} e^{-\beta(|\lambda| + \sum|\gamma_i|)}}{\sum_{\lambda,\gamma_i} e^{-\beta(|\lambda| + \sum|\gamma_i|)}} \leq \frac{Z^+(\Omega)\ \sum_{|\lambda|>kL} e^{-\beta|\lambda|}}{\sum_\lambda e^{-\beta|\lambda|}\ Z^+(\theta_+|\lambda)Z^-(\theta_-|\lambda)} \tag{14}$$

dove al numeratore abbiamo rilasciato il vincolo di compatibilità tra λ e γ. Ora mostriamo che

$$Z^+(\Omega) \leq Z^+(\theta_+|\lambda)Z^+(\theta_-|\lambda)e^{|\lambda|C(\beta)} \tag{15}$$

Infatti

$$Z^+(\Omega) = \sum_{\gamma_i} e^{-\beta \sum |\gamma_i|} = \sum_{\gamma_i,\gamma'_j} e^{-\beta \sum |\gamma_i| - \beta \sum |\gamma'_j|} \tag{16}$$

dove γ_i interseca λ mentre γ'_j non la interseca. Rilasciando il vincolo di compatibilità tra γ e γ' otteniamo

$$\begin{aligned} Z^+(\Omega) &\leq Z^+(\theta_+|\lambda) Z^+(\theta_-|\lambda) \sum_{\gamma_i \cap \lambda \neq \emptyset} e^{-\beta \sum |\gamma_i|} \\ &\leq Z^+(\theta_+|\lambda) Z^+(\theta_-|\lambda) \sum_k \frac{1}{k!} \left(\sum_{\gamma_i \cap \lambda \neq \emptyset} e^{-\beta |\gamma|} \right)^k \end{aligned} \tag{17}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo rilasciato il vincolo di compatibilità fra i γ_i. Stimiamo quindi

$$\sum_{\gamma_i \cap \lambda \neq \emptyset} e^{-\beta |\gamma|} = \sum_{x \in \lambda} \sum_{\gamma \circ x} e^{-\beta |\gamma|} \leq \sum_{x \in \lambda} \sum_{l=4}^{\infty} l^2 (3e^{-\beta})^l \leq C(\beta) |\lambda| \tag{18}$$

il che completa la dimostrazione della (15). Possiamo quindi minorare il denominatore della (14) usando la stima precedente; otteniamo

$$p(|\lambda| > kL) \leq \frac{Z^+(\Omega) \ \sum_{|\lambda| > kL} e^{-\beta |\lambda|}}{Z^+(\Omega) \sum_\lambda e^{(-\beta + C(\beta))|\lambda|}} \tag{19}$$

Il numeratore è maggiorato da

$$\sum_{|\lambda| > kL} e^{-\beta |\lambda|} \leq \sum_{l = kL}^{\infty} (3e^{-\beta})^l < C e^{(-\beta + \log 3) kL} \tag{20}$$

Il denominatore invece si minora con

$$\begin{aligned} &\sum_\lambda e^{(-\beta + C(\beta))|\lambda|} \geq \sum_{l=L}^{L^2} \delta(\text{esiste } l) e^{(-\beta + C(\beta)) l} = \\ &e^{(-\beta + C(\beta))L} \sum_{l=0}^{L(L-1)} \delta(\text{esiste } l) e^{(-\beta + C(\beta)) l} \geq C' e^{(-\beta + C(\beta))L} \end{aligned} \tag{21}$$

e infine

$$p(|\lambda| > kL) \leq C \exp L \left[(-\beta + \log 3) k + \beta - C(\beta) \right] \tag{22}$$

E' chiaro quindi che la stima funziona per

$$k > \frac{\beta - C(\beta)}{\beta - \log 3} \tag{23}$$

ma dal momento che $C(\beta) \sim e^{-\beta}$ per ogni $k > 1$ è possibile scegliere β abbastanza grande in modo che

$$p(|\lambda| > kL) \leq C e^{-C' L} \tag{24}$$

V. DIMOSTRAZIONE NEL CASO $\alpha > m^*$

Per formalizzare quanto esposto all'inizio riscriviamo

$$p(M > \alpha |\Omega|) = \sum_\lambda p(M > \alpha |\Omega| \mid \lambda \,) p(\lambda) \tag{25}$$

dove λ è la linea di separazione tra le due fasi. Nella somma precedente separiamo tre diversi contributi:
a) entrambe le regioni $\theta_\pm$ verificano le ipotesi del lemma (4) con $k{=}\bar{k}$ e un certo ε.
b) una delle due regioni è tale che $|\theta| < \bar{k}|\Omega|$ ma l'altra regione verifica l'ipotesi *f)*.
c) almeno una delle due regioni verifica l'ipotesi *v)* ma non verifica l'ipotesi *f)* per nessun valore di ε.
Si vede che l'unione dei tre eventi a,b,c, contiene l'evento di cui vogliamo stimare la probabilità. Trattiamo innanzitutto il caso a):

$$\begin{aligned} p_\lambda(M > \alpha|\Omega|) = & \, p_\lambda(M > \alpha|\Omega| \ \text{ e } \ |M_+ - m^*|\theta_+|| > \gamma|\theta_+|) \\ & + p_\lambda(M > \alpha|\Omega| \ \text{ e } \ |M_+ - m^*|\theta_+|| \leq \gamma|\theta_+|) \end{aligned} \tag{26}$$

Vogliamo mostrare che il secondo evento implica una grande fluttuazione di magnetizzazione nella regione θ_-; infatti, scegliendo $\gamma = \alpha - m^* > 0$, si ha

$$M_- = M - M_+ > \alpha|\Omega| - (m^* + \gamma)|\theta_+| = \alpha|\theta_-| \tag{27}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_\lambda(M > \alpha|\Omega|) & \leq p_\lambda(|M_+ - m^*|\theta_+|| > (\alpha - m^*)|\theta_+|) \\ & + p_\lambda(|M_- + m^*|\theta_-|| > (\alpha + m^*)|\theta_-|) \\ & \leq C_1 e^{-C_2|\theta_+|} + C_3 e^{-C_4|\theta_-|} \\ & \leq C_1 e^{-C_2\bar{k}|\Omega|} + C_3 e^{-C_4\bar{k}|\Omega|} \leq C_5 e^{-C_6|\Omega|} \end{aligned} \tag{28}$$

Essendo la stima uniforme in λ, essa vale anche per la somma su tutti i λ che verificano l'ipotesi a).
Nel caso b) supponiamo che $|\theta_-| < \bar{k}|\Omega|$. Allora

$$\begin{aligned} & M_+ - m^*|\theta_+| = M - M_- - m^*|\theta_+| > M - |\theta_-| - m^*|\theta_+| \\ & > (\alpha - \bar{k})|\Omega| - m^*|\theta_+| > (\alpha - \bar{k} - m^*)|\theta_+| \end{aligned} \tag{29}$$

purché $\bar{k} < \alpha$. Scegliendo poi $\bar{k} < \alpha - m^*$ possiamo applicare il lemma (4) alla regione θ_+, che per ipotesi verifica la condizione *f)*, dal momento che $|\theta_+| > (1 - \bar{k})|\Omega|$. Il caso $|\theta_+| < \bar{k}|\Omega|$ si tratta in maniera analoga. La stima è ancora uniforme in λ per cui tutto il contributo di b) ammette una stima analoga a (28).
Nel caso c) la frontiera di una delle due regioni è tale che

$$|\partial\theta| = 2L + |\lambda| > |\theta|^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \qquad \forall\varepsilon \tag{30}$$

e inoltre la stessa regione è tale che $|\theta| > k|\Omega|$. Quindi

$$|\lambda| \geq kL^2 - 2L > CL^2 \tag{31}$$

per L abbastanza grande e C opportuno. A questo punto con una stima del tutto analoga alla (24) si mostra che

$$p(|\lambda| \geq CL^2) \leq C_7 e^{-C_8 L^2} \tag{32}$$

il che completa la dimostrazione.

VI. DIMOSTRAZIONE NEL CASO $\alpha < m^*$

Per controllare le configurazioni in cui la magnetizzazione è $\sim m^*$ al di sopra della linea di separazione e $-m^*$ al di sotto, abbiamo bisogno di una stima abbastanza precisa della probabilità che la linea di separazione abbia una lunghezza $|\lambda| > kL$. In particolare vogliamo che questa probabilità sia stimata da e^{-CL} per qualunque k, purché β sia abbastanza grnade. Avremo quindi bisogno della stima di questa probabilità che abbiamo derivato in precedenza. Scriviamo

$$p(M > \alpha|\Omega|) = \sum_{|\lambda| \leq kL} p(M > \alpha|\Omega| \mid \lambda\ )p(\lambda) + \sum_{|\lambda| > kL} p(M > \alpha|\Omega| \mid \lambda\ )p(\lambda) \tag{33}$$

per qualche $k > 1$.
Il secondo termine è stimato immediatamente maggiorando $p(M > \alpha|\Omega| \mid \lambda\ )$ con 1 e utilizzando la stima (24).

Osserviamo che questo contributo è quello dominante dal momento che contiene le configurazioni in cui la linea di separazione è tale che la fluttuazione si realizza mantenendo le relazioni (2) e variando il volume delle regioni $\theta_\pm$.
Per controllare il primo termine possiamo invece utilizzare il solito lemma (4) dal momento che in questo caso sarà necessario avere una fluttuazione di magnetizzazione in una delle due regioni per avere $M > \alpha|\Omega|$. Osserviamo in primo luogo che se la linea di separazione ha lunghezza minore di kL l'area delle regioni $|\theta_\pm|$ è compresa tra $kL^2/2$ e $(2-k)L^2/2$. Inoltre la loro frontiera verifica

$$|\partial\theta| < kL = k|\Omega|^{1/2} \tag{34}$$

Quindi le regioni $|\theta_\pm|$ verificano entrambe le ipotesi del lemma (4). Separiamo ancora questo caso in due analogamente a quanto fatto in (26):

$$\begin{aligned} p_\lambda(M > \alpha|\Omega|) = {} & p_\lambda(M > \alpha|\Omega| \ \text{ e } \ |M_- + m^*|\theta_-|| > \gamma|\theta_-|) \\ & + p_\lambda(M > \alpha|\Omega| \ \text{ e } \ |M_- + m^*|\theta_-|| \le \gamma|\theta_-|) \end{aligned} \tag{35}$$

Il primo termine come al solito viene maggiorato usando il lemma (4). L'evento relativo al secondo termine implica che

$$M_+ = M - M_- > \alpha|\Omega| - (\gamma - m^*)|\theta_-| = (\alpha + m^* - \gamma)|\Omega| + (\gamma - m^*)|\theta_+| \tag{36}$$

Scegliamo $\gamma < \alpha + m^*$ in modo che il coefficiente del primo termine sia positivo e usiamo la condizione $|\Omega| > 2|\theta_+|/k$, e otteniamo

$$M_+ - m^*|\theta_+| > \left[\frac{2}{k}(\alpha + m^* - \gamma) + \gamma - 2m^*\right]|\theta_+| \ge t|\theta_+| \tag{37}$$

scegliendo $k > 1$ e γ abbastanza piccoli, per cui anche il secondo termine può essere stimato con il lemma (4).
Il contributo totale delle configurazioni con $|\lambda| < kL$ è stimato da

$$p(M > \alpha|\Omega|\,||\lambda| < kL) < C_9 e^{-C_{10}|\Omega|} \tag{38}$$

per cui si vede che è assolutamente trascurabile rispetto al contributo del primo termine. Questo completa la dimostrazione.

---

[1] G.Gallavotti, A.Martin-Lof, S.Miracle-Solé, Lecture Notes in Physics, vol. 20, ed. A.Lenard, Springer-Verlag, 1973, Heidelberg