TD: La méchanique quantique supersymétrique

Jan Troost

October 9, 2008

Abstract

Une préparation à la supersymétrie dans la théorie quantique des champs: la méchanique quantique supersymétrique (voir p.e. [1]).

1 Un Lagrangien supersymétrique

Considérons le Lagrangien:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2}(W'(x))^2 + \frac{1}{2}[\psi,\psi^*]W''(x). \tag{1}$$

Les variables ψ et ψ^* sont des fermions anti-commutants, complex conjugés. La variable x est bosonique, et W est une fonction de la variable x. Montrez que le Lagrangien est invariant à une dérivée totale près par rapport aux tranformations:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon x &= -\epsilon\psi \\ \delta_\epsilon \psi &= 0 \\ \delta_\epsilon \psi^* &= \epsilon(W' - i\dot{x}) \end{aligned} \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon x &= \epsilon^*\psi^* \\ \delta_\epsilon \psi &= \epsilon^*(-W' - i\dot{x}) \\ \delta_\epsilon \psi^* &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Quel est la charge de Noether correspondante ?

2 Hamiltonien

Calculez l'Hamiltonien correspondant.

3 Quantification

Dans la théorie quantique, on aura les relations de (anti-)commutation:

$$\begin{aligned} [x.p] &= i \\ \{\psi,\psi^*\} &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Démontrez qu' on ne peut pas représenter la première relation de commutation par des operateurs matriciels de dimension finie. On représentera $p = -i\partial_x$. Démontrez que la deuxième relation de (anti-)commutation permet la représentation

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \psi^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0. \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

L' espace de Hilbert total sera $\mathcal{L}^2(R) \otimes C^2$. L' Hamiltonien devient:

$$H = (-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}(W')^2).1 - \frac{1}{2}W'' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

4 L' exemple de l'oscillateur harmonique

Quand on prend $W = \frac{x^2}{2}$, on trouvera pour la partie bosonique de l' Hamiltonien l' oscillateur harmonique. On pourra le représenter en terme d' opérateurs d' annihilation et de création ($[a, a^\dagger] = 1$) aggissant sur un espace de Fock. L' Hamiltonien devient:

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\psi, \psi^*]. \tag{7}$$

Dans la théorie quantique, on ré-interprète les variables fermioniques ψ et ψ^* comme des opérateurs quantiques d' annihilation et de création. Démontrez qu' on peut récrire l' Hamiltonien comme:

$$H = a^\dagger a + \psi^* \psi. \tag{8}$$

Notez la propriété importante que l' énergie du vide du boson a été compensée par l' énergie du vide du fermion. Ceci représente un méchanisme possible pour alléger le problème de la constante cosmologique. (Voir aussi l' effet Casimir.)

On peut maintenant construire l' espace de Fock sur l' état fondamentale qui satisfait:

$$\begin{aligned} a|0, -\frac{1}{2}\rangle &= 0 \\ \psi|0, -\frac{1}{2}\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Combien d' états d' énergie 0 y-a-t-il ? Et d' énergie 1 ? Et d' énergie 2 ? Les opérateurs de supersymétrie sont:

$$\begin{aligned} Q &= a\psi^* \\ Q^\dagger &= a^\dagger \psi. \end{aligned} \tag{10}$$

Calculez leurs relations de (anti-)commutations, et leur effet sur des états propres de l' Hamiltonien. Faites un dessin du spectre et de l'action des supercharges.

5 Le super-espace

Une facon systématique de trouver des Lagrangiens supersymétrique est de les construire dans un super-espace: un espace qui ne contient pas seulement les coordonnées sur l' espace temps, mais aussi des variables de Grassmann.

Des variables de Grassmann

Introduisons des variables de Grassmann θ et θ^* qui satisfont les relations:

$$\begin{aligned} \theta^2 &= 0 \\ (\theta^*)^2 &= 0 \\ \theta\theta^* &= -\theta^*\theta \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\theta &= 1 \\ \int d\theta\theta &= 1 \end{aligned} \tag{11}$$

et des relations qui suivent par linéarité de l'intégration et de la dérivation.

Le super-espace

Considérons des opérateurs $Q, Q^\dagger, H$:

$$\begin{aligned} Q &= i\partial_\theta - \theta^*\partial_t \\ Q^\dagger &= -i\partial_{\theta^*} + \theta\partial_t \\ H &= i\partial_t. \end{aligned} \tag{12}$$

qui agissent sur l' espace des fonctions des variables t, θ, θ^*. Calculez les anti-commutateurs des opérateurs Q et $Q^\dagger$. Les fonctions des trois coordonnées t, θ, θ^* sont appelées des superchamps. On peut développer un superchamp Φ dans les variables de Grassmann:

$$\Phi(t,\theta,\theta^*) = x(t) + i\theta\psi(t) + i\theta^*\psi^*(t) + \theta\theta^* D(t). \tag{13}$$

Comprenez pourquoi on a seulement quatre termes dans le développement. Comprenez qu' on a la relation $\Phi^* = \Phi$ étant donné la convention $(\theta\psi)^* = \psi^*\theta^*$ et le fait que x et D sont des quantités réelles. On dira que le champ Φ est un champ réel.

Introduisons encore des opérateurs différentiels D_θ et D_{θ^*} (qu' on appelera les dérivées co-variantes):

$$\begin{aligned} D_\theta &= \partial_\theta - i\theta^*\partial_t \\ D_{\theta^*} &= (D_\theta)^\dagger \\ &= \partial_{\theta^*} - i\theta\partial_t. \end{aligned} \tag{14}$$

Démontrez que ces opérateurs anti-commutent avec les supercharges. Calculez leurs anti-commutateurs. Calculez la dérivée covariante D_θ du superchamp Φ, et son conjugé complexe.

Les transformations de supersymétrie

La transformation par supersymétrie d' un superchamp est définie comme:

$$\delta_\epsilon \Phi = \epsilon Q \Phi. \tag{15}$$

Calculez les transformations par supersymétrie des composants du superchamp Φ. La transformation par rapport à la deuxième supersymétrie est par définition:

$$\delta_{\epsilon^*} \Phi = \epsilon^* Q^\dagger \Phi. \tag{16}$$

Comprenez qu' une somme de superchamps donne un superchamp (dans le sens où la somme transforme de la même facon qu' un superchamp par les transformations de supersymétrie). Comprenez qu' un produit de superchamps est un superchamp. Contrôlez que la derivée covariante d' un superchamp est un superchamp. Notez que le composant d' un superchamp qui accompagne le produit de toutes les variables de Grassmann se transforme en derivée totale par rapport aux supersymétries.

L' intégrale sur le superespace:

$$S = \int dt d\theta d\theta^* L_{sup} \tag{17}$$

se réduit à une intégrale sur le temps du plus haut composant (dans le sens indiqué avant) du champ L_{sup}.

Donc, lorsque le (super-)Lagrangien L_{sup} est un superchamp (où un produit où une somme de superchamps), l' action est supersymétrique.

5.1 Une action supersymétrique

Calculons le Lagrangien L (ordinaire) associé à l' action:

$$S = \int dt d\theta d\theta^* \left(\frac{1}{2} (D_\theta \Phi)(D_\theta \Phi)^* - W(\Phi) \right). \tag{18}$$

Le champ D est dit auxiliaire parce que le champ n' a pas de terme cinétique. Calculez la solution à l' équation de mouvement pour le champ D. Substituez le champ D dans le Lagrangien (et dans les transformations de supersymétries). Démontrez qu' on retrouve le Lagrangien avec lequel on a commencé ainsi que les règles de transformations par supersymétries.

6 La brisure de la supersymétrie

Considérons maintenant les supercharges

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ Q^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

où on a utilisé les opérateurs différentiels:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{d}{dx} + W' \\
A^\dagger &= -\frac{d}{dx} + W'.
\end{aligned} \tag{20}
$$

On peut démontrer que l' Hamiltonien H a des niveaux d' énergie non-nulle doublement dégénérés. Si en plus le système préserve la supersymétrie, l' énergie du vide est zéro. (Démontrez-le.) Ceci implique que si l' état fondamental est:

$$
\psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_0^{+1/2}(x) \\ \psi_0^{-1/2}(x) \end{pmatrix}, \tag{21}
$$

alors les composants satisfont:

$$
\begin{aligned}
A\psi_0^{+1/2}(x) &= 0 \\
A^\dagger\psi_0^{-1/2}(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

On peut résoudre ces équations:

$$
\begin{aligned}
\psi_0^{+1/2}(x) &= Ne^{-W(x)} \\
\psi_0^{-1/2}(x) &= Ne^{+W(x)}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Si on choisit le signe du superpotentiel W tel qu' il est positif pour grand x, la deuxième fonction d' onde ne sera jamais normalisable. Donc, on prendre le deuxièment composant $\psi_0^{-1/2}(x) = 0$. Maintenant, déterminez si la fonction d' onde $\psi_0^{+1/2}$ est normalisable pour $W(x) = \frac{g}{n+1}x^{n+1}$. Dans quels cas la supersymétrie est elle brisée ?

7 Quelques concepts à retenir:

La supersymétrie et sa brisure spontanée. Le superespace.

References

[1] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rept. **251** (1995) 267 [arXiv:hep-th/9405029].