TD: La supersymétrie et le superespace

Jan Troost

October 16, 2008

Abstract

TD [1]: La supersymétrie est une symétrie entre bosons et fermions. Bien que certainement brisée à basse énergie, la supersymétrie joue un rôle important dans des extensions du modèle standard, dans les systèmes désordonnés, dans la théorie de cordes, dans l'intégrabilité, et dans beaucoup d'autres applications. Nous étudierons des théories de champs quantiques en 4 dimensions, avec 4 supercharges, le superespace, la brisure spontanée de la supersymétrie, etc. Ce TD est fortement basé sur le livre [1].

1 Introduction

Un théorème de Coleman et Mandula [2] dit, à des conditions assez générales (qui sont plus ou moins (1) l'invariance Poincaré, (2) pour chaque masse $M > 0$, il y a un nombre fini de particules avec masse moins que M, (3) l'analyticité de la matrice S, (4) la non-trivialité de la matrice S, (5) que les générateurs du groupe de symétrie ont des noyaux qui sont des distributions dans l'espace des impulsions), que le seule groupe de symétrie bosonique (qui laisse donc invariant la matrice S) est un groupe de symétrie de la forme Poincaré $\times\ G_I$ (où G_I est donc un groupe de symétrie interne, commutant avec le groupe de Poincaré).

Donc, à ces conditions, on ne peut plus mélanger d'autre symétrie avec le groupe de Poincaré.

Néanmoins, il y a une autre possibilité. Haag, Lopuszanski et Sohnius [3] ont repris l'analyse de Coleman et Mandula, en permettant aussi des symétries qui mélangent les bosons et les fermions. Ils ont trouvé essentiellement une seule autre possibilité: la supersymétrie.

2 Lagrangiens supersymétriques

On donnera la preuve que certains Lagrangiens ont une symétrie qui échange les bosons et les fermions. On considère une collection de champs appelée un multiplet chiral: un champ complexe A, un spineur de Weyl ψ, et un champ auxiliaire complexe F. (Un champ auxiliaire est un champ qui n'aura pas de terme cinétique au Lagrangien. C'est un champ non-dynamique.) Voir (maintenant !) l'appendice pour les conventions (qui sont prises du livre de Wess et Bagger).

Le terme cinétique

Étudions le terme cinétique:

$$\mathcal{L}_0 = i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi + A^*\Box A + F^*F \tag{1}$$

et regardons la transformation de supersymétrie:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta_\xi \psi &= i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi.
\end{aligned} \tag{2}$$

On prend ξ constant, infinitésimal et anti-commutant. Montrez que l'action est invariante. (Le Lagrangien est invariant à une dérivée totale près.)

Le terme de masse

Montrez que le terme de masse:

$$\mathcal{L}_m = AF + A^*F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}, \tag{3}$$

est invariant (à une dérivée totale près).

Trouvez les équations de mouvement pour l'action $S = \int d^4x(\mathcal{L}_0 + m\mathcal{L}_m)$. Comment la masse des fermions et des bosons se compare ?

3 Le superespace

On définit une réprésentation des supercharges sur une espace, dite superespace, avec des coordonnées $z = (x^m, \theta, \bar{\theta})$, où les variables de Grassman $\theta, \bar{\theta}$ ont chacune deux composantes:

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \\
Q^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\partial_m.
\end{aligned} \tag{4}$$

Les règles de calculs pour les variables de Grassman sont les mêmes que pour les fermions. Calculez l'algèbre de supercharges:

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= \ldots \\
\{Q_\alpha, Q_\alpha\} &= \ldots \\
\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= \ldots.
\end{aligned} \tag{5}$$

Calculez aussi l'algèbre des dérivées supercovariantes:

$$\begin{aligned}
D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m.
\end{aligned} \tag{6}$$

Calculez les commutateurs des dérivées supercovariantes et des supercharges.

Les superchamps

Les superchamps F sont des champs fonctions de toutes les coordonnées de le superespace $F(x,\theta,\bar\theta)$. Les composantes de θ et $\bar\theta$ sont des variables de Grassman, et on a donc le développement:

$$\begin{aligned}F(x,\theta,\bar\theta) &= f(x)+\theta\chi_1(x)+\bar\theta\bar{\chi_2}(x)+\theta\theta m_1(x) \\ &\quad +\bar\theta\bar\theta\bar{m}_2(x)+\theta\sigma^m\bar\theta v_m(x)+\theta\theta\bar\theta\bar{\lambda_1}(x)+\bar\theta\bar\theta\theta\lambda_2(x) \\ &\quad +\theta\theta\bar\theta\bar\theta d(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Par définition, les superchamps ont une transformation de supersymétrie:

$$\begin{aligned}\delta_{\xi,\bar\xi}F(x,\theta,\bar\theta) &= \delta_\xi f(x)+\theta\delta_\xi\chi_1(x)+\bar\theta\delta_\xi\bar{\chi_2}(x)+\theta\delta_\xi\theta m_1(x) \\ &\quad +\bar\theta\bar\theta\delta_\xi\bar{m}_2(x)+\theta\sigma^m\bar\theta\delta_\xi v_m(x)+\theta\theta\bar\theta\delta_\xi\bar{\lambda_1}(x)+\bar\theta\bar\theta\theta\delta_\xi\lambda_2(x) \\ &\quad +\theta\theta\bar\theta\bar\theta\delta_\xi d(x) \\ &\equiv (\xi Q+\bar\xi\bar Q)F. \end{aligned} \tag{8}$$

Montrez que la somme de superchamps est un superchamp, et que le produit de superchamps est un superchamp.

4 Le (super)champ chiral

La supersymétrie est représentée sur les 16 composantes d'un superchamps génerique. Pour trouvez des représentations plus petites, on analyse des contraintes covariantes sur les superchamps.

Mettons la contrainte suivante sur le superchamp Φ:

$$\bar D_{\dot\alpha}\Phi = 0. \tag{9}$$

Le superchamp est alors un superchamp chiral scalaire. Montrez que la contrainte est covariante: la variation du superchamp obéit la même contrainte que le superchamp même. Concluez que la supersymétrie est représentée sur ce superchamp chiral.

Maintenant, pour résoudre la contrainte, il est commode de faire une transformation de coordonnées sur le superespace:

$$\begin{aligned} y^m &= x^m+i\theta\sigma^m\bar\theta \\ \theta &= \theta \\ \bar\theta &= \bar\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

Pour trouvez la logique derrière la transformation, calculez:

$$\begin{aligned} \bar D_{\dot\alpha}(y^m) &= \dots \\ \bar D_{\dot\alpha}(\theta) &= \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Donc, une fonction quelconque des variables (y^m,θ) satisfaira la contrainte. Développez une fonction pareille:

$$\Phi = A(y)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+\theta\theta F(y) \tag{12}$$

en termes des coordonnées originales $(x^m,\theta,\bar\theta)$.

On voudrait controlé si la solution est bien la plus générale. Dérivez l'expression de $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ en termes des coordonnées nouvelles $(y^m, \theta, \bar{\theta})$. Déduisez-en que le champ, dans les coordonnées nouvelles ne permet pas une dépendence en $\bar{\theta}$, ce qui prouve la généralité de la solution ci-dessus.

Prouvez que le produit et la somme de champs chiraux est un champ chiral.

On peut répéter cette histoire pour un champ (anti-chiral) Φ^*, avec la contrainte:

$$D_\alpha \Phi^* \quad = \quad 0. \tag{13}$$

Trouvez les bonnes coordonnées pour résoudre la contrainte. Allez aussi loin que vous voulez dans la répétition des étappes qu'on vient de finir pour le champ chiral.

La transformation (revisitée)

Exprimez les supercharges en termes des nouvelles coordonnées $(y^m, \theta, \bar{\theta})$, et calculez, en utilisant la définition générale des transformations pour des superchamps, la transformation de supersymétrie des composantes du champs chiral Φ. Trouvez donc:

$$\begin{aligned} \delta_{\xi,\bar{\xi}} A &= \dots \\ \delta_{\xi,\bar{\xi}} \psi &= \dots \\ \delta_{\xi,\bar{\xi}} F &= \dots \end{aligned} \tag{14}$$

5 Lagrangiens supersymétriques

Prouvez que la composante la plus haute d'un superchamp générale (donc le coefficient de $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ dans l'expansion du superchamp) se transforme toujours dans une dérivée totale. (Utilisez la définition générale de la transformation supersymétrique, la forme des supercharges, et, le fait que il s'agit de la plus haute composante du superchamp.)

Donc, on conclut que pour construire un Lagrangien supersymétrique, on pourra utilisé comme Lagrangien la plus haute composante de n'importe quel superchamp: l'action sera un invariant de supersymétrie.

Prouvez que la composante $\theta\theta$ d'un champ scalair chiral se transforme toujours dans une dérivée totale. (Utilisez la forme des supercharges et la forme des composantes les plus hautes.) Concluez que la composante $\theta\theta$ de n'importe quel champ chiral peut figurer dans un Lagrangien supersymétrique.

On trouve donc que le Lagrangien:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\Phi^{i*}\Phi^i)_{|\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi^i \Phi^j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi^i \Phi^j \Phi^k + \lambda_i \Phi^i \right)_{|\theta\theta} + c.c. \right), \end{aligned} \tag{15}$$

est un Lagrangien supersymétrique. (Les tenseurs m_{ij} et g_{ijk} sont symétriques.)

On peut argumenter que c'est le Lagrangien (de champs scalaires) supersymétrique renormalizable le plus générale possible, en 4 dimensions.

En termes des composantes, ce Lagrangien se reduit à:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\partial_m \bar{\psi}^i \bar{\sigma}^m \psi^i + (A^i)^* \Box A^i + (F^i)^* F^i \\
&\quad + \left(m_{ij}(A^i F^j - \frac{1}{2}\psi^i\psi^j) + g_{ijk}(A^i A^j F^k - \psi^i \psi^j A^k) + \lambda_i F^i + c.c \right).
\end{aligned}
$$

Calculez les équations de mouvements pour les champs auxiliaires. Subsituez leurs solutions dans le Lagrangien et trouvez le nouveau Lagrangien. Quel est le potentiel du Lagrangien ? Ecrivez le en terme des champ $F^i, (F^i)^*$. Prouvez que pour une énergie potentielle zéro, il faut satisfaire $F^i = 0$.

6 Une brisure spontanée de la supersymétrie

Le Hamiltonien d'une théorie supersymétrique s'écrit:

$$
H = \frac{1}{4}(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2). \tag{16}
$$

Les supercharges seront des conjugués dans la théorie quantique, et on en déduit que si $\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$, on a immédiatement que $Q_\alpha|\psi\rangle = 0 = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|\psi\rangle$, et donc qu' un état fondamental d' énergie zéro est invariant supersymétrique.

Pour briser la supersymétrie, on construit un modèle où l'état fondamental a une énergie plus grande que zéro.

Regardons la partie non-cinétique du modèle de O'Raifeartaigh [4]:

$$
\mathcal{L}_{O'R} = \left(\lambda\Phi^0 + m\Phi^1\Phi^2 + g\Phi^0\Phi^1\Phi^1\right)_{|\theta\theta} + c.c. \tag{17}
$$

Prouvez que pour des paramètres λ, m, g non-zéro, le minimum du potentiel est plus grand que zéro.

Dans le modèle de O'Raifeartaigh, la supersymétrie est spontanément brisée. Bien que le Lagrangien soit supersymétrique, le vide même brise la supersymétrie.

7 Quelques concepts à retenir

La supersymétrie et sa brisure spontanée. Des théories de champs supersymétriques en quatre dimensions et leurs construction. Le superespace.

A Conventions et formulaire

En quatre dimensions, le groupe de recouvrement du groupe de Lorentz est le groupe $SL(2, C)$. La théorie de représentation de ce groupe montre que les spineurs de dimension minimale sont des spineurs de Weyl, de deux dimensions complexes, où les spineurs de Majorana, à quatre composantes réeles. (Les deux ont la moitié des composantes d'un spineur de Dirac, qui a quatre composantes complexes.)

On choisira de travailler avec les spineurs de Weyl, et on indique ces indices par $\alpha \in \{1, 2\}$. Le complex conjugé d'un spineur de Weyl est un spineur de Weyl de parité opposé et on le donnera des indices $\dot\alpha \in \{\dot 1, \dot 2\}$. (Une bonne raison pour se décider pour la représentation à deux composants est que la supersymétrie est fortement liée avec la géométrie complexe, et qu'il est donc plus naturelle de travailler avec des variables complexes.)

Les charges de supersymétries transformeront dans une représentation du groupe $SL(2,C)$, et on aura donc au moins quatre supercharges réels en quatre dimension. (C'est ce qu'on appele supersymétrie $N = 1$ en $D = 4$.)

Pour les conventions, nous copions Wess-Bagger, appendice A et B. Ils ont une métrique $(-,+,+,+)$ notée η^{mn}. On définit des spineurs de Weyl à deux composantes complexes, qui transforme de facon linéaire par rapport à la représentation standard de $SL(2,C)$ (avec matrices M):

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha &= M_\alpha{}^\beta \psi_\beta \\ \psi'^\alpha &= {M^{-1}}_\beta{}^\alpha \psi^\beta \\ \bar\psi'_{\dot\alpha} &= {M^*}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \bar\psi_{\dot\beta} \\ \bar\psi'^{\dot\alpha} &= {(M^*)^{-1}}_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha} \bar\psi^{\dot\beta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Les représentations du groupe de Lorentz sont $(0, \frac{1}{2})$ pour les représentations avec des indices avec points, et $(\frac{1}{2}, 0)$ pour les spineurs sans points. Ses représentations sont des représentations complexes conjuguées.

On utilisera les matrices de Pauli standard σ^a pour $a = 1,2,3$ et aussi $\sigma^0 = -1$. Donc, ces matrices sont:

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

Les matrices, dans la notation pour les représentations introduites, ont des indices: ${\sigma_{\alpha\dot\alpha}}^m$ où m est la notation de Wess-Bagger pour l'indice vectorielle de Lorentz. Autrement dit, les matrices σ enlacent une représentation spinorielle de parité plus, une de parité moins, et une représentation vectorielle.

On introduit des tenseurs anti-symétriques $\epsilon^{\alpha\beta}$ et $\epsilon_{\alpha\beta}$ qui prennent des valeurs $\epsilon^{12} = 1$ et $\epsilon_{12} = -1$, et qui sont des invariants de Lorentz. On a:

$$\begin{aligned} \psi^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \\ \psi_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta. \end{aligned} \tag{20}$$

Démontrez que:

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \psi_2 \\ \psi^2 &= -\psi_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Démontrez qu'on a: $\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$. On définit aussi les matrices $\bar{\sigma}$ avec les indices élevés:

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}. \tag{22}$$

Il s'avère que $\bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3}$ et $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$. On peut dériver:

$$\begin{aligned}
(\sigma^m\bar{\sigma}^n + \sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha{}^\beta &= -2\eta^{mn}\delta_\alpha{}^\beta \\
(\bar{\sigma}^m\sigma^n + \bar{\sigma}^n\sigma^m)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= -2\eta^{mn}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}.
\end{aligned} \tag{23}$$

On introduit la notation:

$$\begin{aligned}
\psi\chi &= \psi^\alpha\chi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\chi_\alpha \\
&= -\psi_\beta\epsilon^{\beta\alpha}\chi_\alpha = -\psi_\beta\chi^\beta \\
&= +\chi^\beta\psi_\beta = \chi\psi \qquad (WB, A.21)
\end{aligned}$$

où on a utilisé que les composantes des spineurs anti-commutent. On a aussi par définition:

$$\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \qquad (WB, A.21)$$

Pour calculer les conjugés complexes de certaines expressions, on utilise:

$$\begin{aligned}
(\chi\psi)^* &= \bar{\chi}\bar{\psi} \qquad (WB, A.22). \\
(\chi\sigma^m\bar{\psi})^* &= \psi\sigma^m\bar{\chi} \qquad (WB, p.24) \\
(\chi\sigma^m\bar{\sigma}^n\psi)^* &= \bar{\psi}\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\chi} \qquad (WB, p.24)
\end{aligned}$$

et on a l'identité:

$$\chi\sigma^n\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\chi \qquad (WB, p.24).$$

Les formules (WB B.6, B.7 et B.12) sont:

$$\begin{aligned}
(\sigma^{mn}) &= \frac{1}{4}(\sigma^m\bar{\sigma}^n - \sigma^n\bar{\sigma}^m) \\
(\bar{\sigma}^{mn}) &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^m\sigma^n - \bar{\sigma}^n\sigma^m) \qquad (WB, B.6) \\
(\sigma^{mn})_{\alpha\beta} &= (\sigma^{mn})_{\beta\alpha} \qquad (WB, B.7) \\
\bar{\sigma}^a\sigma^b\bar{\sigma}^c - \bar{\sigma}^c\sigma^b\bar{\sigma}^a &= -2i\epsilon^{abcd}\bar{\sigma}_d \\
\sigma^a\bar{\sigma}^b\sigma^c - \sigma^c\bar{\sigma}^b\sigma^a &= 2i\epsilon^{abcd}\sigma_d \qquad (WB, B.12)
\end{aligned}$$

On a aussi les identités de Fierz:

$$\begin{aligned}
(\psi\phi)\bar{\chi}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}(\phi\sigma^m\bar{\chi})(\psi\sigma_m)_{\dot{\beta}}(WB, B.19). \\
\theta\sigma^m\bar{\theta}\theta\sigma^n\bar{\theta} &= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn}(WB, B.14) \\
\theta^\alpha\theta^\beta &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta(WB, B.13)
\end{aligned}$$

Notez que σ^m est hermitien, et on a donc:

$$\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^m_{\beta\dot{\alpha}})^* = (\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}})^\dagger. \tag{24}$$

On a par conséquence:

$$(\sigma^m\bar{\xi})^* = \xi\sigma^m. \tag{25}$$

Notez que les matrices σ n' obtiennent pas de "bar" après conjugaison complexe.

References

[1] J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press.

[2] S. R. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[3] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. B **88** (1975) 257.

[4] L. O'Raifeartaigh, Nucl. Phys. B **96** (1975) 331.