

Etats comprimés de spin pour la métrologie

Alice Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, Paris

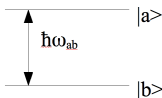
LPT Toulouse, Janvier 2022

Plan

- 1 INTRODUCTION ET RÉALISATIONS EXPÉRIMENTALES
- 2 LOIS D'ÉCHELLE ET DÉCOHÉRENCE
- 3 ETAT COMPRIMÉ FIGÉ DANS UN RÉSEAU
- 4 ETAT GHZ

Le spin collectif

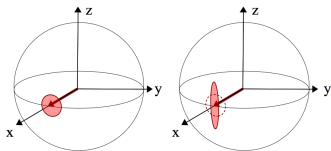
N systèmes à 2 niveaux \Rightarrow un spin collectif $N/2$:



$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (|a\rangle\langle a|_i - |b\rangle\langle b|_i)$$

$$\hat{S}_x + i\hat{S}_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |a\rangle\langle b|_i$$

Sphère de Bloch



Incertitude sur la position angulaire

$$(\Delta\phi)_{NC} = \frac{\Delta S_y}{\langle S_x \rangle} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Parametre de compression

$$\xi^2 \equiv \frac{N\Delta S_{\perp}^2}{|\langle \vec{S} \rangle|^2}$$

$$\Delta\phi = \xi (\Delta\phi)_{NC} = \frac{\xi}{\sqrt{N}}$$

Evolution avec un hamiltonien non linéaire

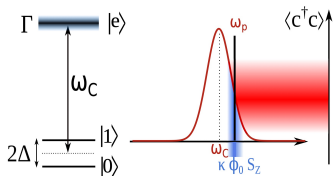
$$H_{NL} = \hbar \chi S_z^2$$



- Pour un BEC à deux composantes a , b , symétriques et qui n'interagissent pas entre elles

$$\chi = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{d\mu}{dN} \right) \quad ; \quad \mu = \rho g \quad ; \quad \rho = \frac{N_a}{V} \quad ; \quad g = \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m}$$

- Pour un ensemble d'atomes froids en cavité



$$H = \hbar(\omega_{at} + \kappa\phi_0 c^\dagger c) S_z \quad ; \quad \phi_0 \propto \frac{g_0^2}{\Delta}$$

Réalisations expérimentales

PREMIÈRES RÉALISATIONS EXPÉRIMENTALES AVEC H_{NL}

- **CBE à deux composantes** : $N \simeq 10^2 - 10^3$, $\xi^2 \simeq 0.15$

C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Estève, M. Oberthaler, *Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit* Nature (2010).

M. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. Hänsch, A. Sinatra, P. Treutlein, *Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology* Nature (2010).

- **Atomes froids en cavité** : $N \simeq 10^4$, $\xi^2 \simeq 0.3$

I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, V. Vuletić, *Implementation of cavity squeezing of a collective atomic spin* PRL (2010).

QUELQUES DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS

- **Atomes froids en cavité, mesure QND** : $N \simeq 10^5$, $\xi^2 \simeq 10^{-2}$

Kasevich, *Measurement noise 100 times lower than the quantum-projection limit using entangled atoms* Nature (2016).

- **Atomes froids en cavité, transition optique** : $N \simeq 10^2$, $\xi^2 \simeq 0.4$

Vuletić, *Entanglement on an optical atomic-clock transition* Nature (2020).

Limitations dues à la décohérence

Pour que l'état comprimé soit utile, pour un temps T fixé de la mesure :

- $\Delta\omega_{ab}$ doit être dominé pas le bruit quantique
- Les corrélations quantiques doivent survivre : $\gamma T \ll 1$

La décohérence

- Change la lois d'échelle de $\xi^2(t_{\text{best}})$ en fonction de N

$$H_{NL} = \chi S_z^2 \quad \text{Sans décohérence} \quad \xi^2(t_{\text{best}}) \propto N^{-2/3}$$

- Détermine la compression de spin maximale.

Avec décohérence on peut avoir

$$\xi^2(t_{\text{best}}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \xi_{\text{min}}^2 \ll 1$$

CBE à deux composantes : fraction non condensée

Description multimodale (Bogoliubov), limite thermodynamique :

- Limite de la compression de spin pour $N \rightarrow \infty$

$$\xi_{\min}^2 \stackrel{K_B T > \mu}{\simeq} \left(\frac{N_{\text{nc}}}{N} \right)$$

- Temps “quasi-optimal” t_η tel que $\xi^2(t_\eta) = (1 + \eta)\xi_{\min}^2$

$$\frac{\rho g}{\hbar} t_\eta \simeq \frac{1}{\sqrt{\eta \xi_{\min}^2}} \quad ; \quad \frac{t_\eta}{t_{\text{therm}}} \propto (\rho a^3)^{1/4}$$

- Un gain d'un facteur 30 sur $\Delta\phi/(\Delta\phi)_{\text{NC}}$ est possible en principe.

A. Sinatra, E. Witkowska, J.-C. Dornstetter, Y. Li, Y. Castin, *Limit of Spin Squeezing in Finite-Temperature Bose-Einstein Condensates*, PRL (2011).

A. Sinatra, E. Witkowska, Y. Castin, *Spin Squeezing in Finite Temperature Bose-Einstein Condensates : Scaling with the system size*, EPJ ST (2012).

CBE à deux composantes : effet des pertes

Description par équation pilote : pertes à 1, 2 et 3 corps

- Limite de la compression de spin

$$\xi^2(t) \simeq \xi_0^2(t) + \frac{1}{3} \frac{N_{\text{lost}}(t)}{N}$$

- Evolution de l'état comprimé en présence de pertes

$$\xi^2(t) - 1 = [\xi^2(0) - 1] e^{-\gamma t}.$$

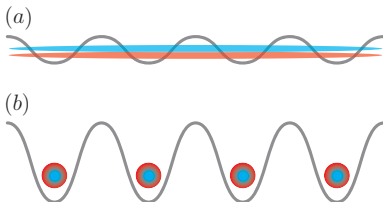
Y. Li, Y. Castin, and A. Sinatra, *Optimum Spin Squeezing in Bose-Einstein Condensates with Particle Losses*, PRL (2098).

- Observation d'un état comprimé sur 1s (expérience TACC)

M.-Z. Huang, J. A. de la Paz, T. Mazzone, K. Ott, A. Sinatra, C. L. G. Alzar, J. Reichel, *Self-amplifying spin measurement in a long-lived spin-squeezed state*, arXiv:2007.01964.

État comprimé dans une phase isolant Mott

- Un CBE dans un état interne a est préparé dans un réseau optique 3D en régime SF.
- (a) À $t = 0$, impulsion $-\pi/2 \rightarrow$ superposition $a - b$. Les interactions démarrent la **compression de spin**



- (b) Simultanément, la profondeur du réseaux est augmentée adiabatiquement. La phase de Mott est atteinte à t_{best} et le **corrélations sont "gelées" dans le réseau.**

Description théorique

Après l'impulsion $\pi/2$ à $t = 0$, réseau faible :

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{N_a=0}^N \sqrt{P(N_a)} |\Psi^0(0) : N_a, N - N_a\rangle \quad \Psi^0(0) \stackrel{MF}{\simeq} \phi(r_1)\phi(r_2)\dots\phi(r_N)$$

EVOLUTION ADIABATIQUE QUAND ON RAMPE LE RÉSEAU

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{N_a=0}^N \sqrt{P(N_a)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_0(N_a, N - N_a, t')} |\Psi_{N_a, N - N_a}^0(t) : N_a, N - N_a\rangle$$

$\Psi_{N_a, N - N_a}^0(t)$ = état fondamental $N_a, N - N_a$ atomes dans $V(t)$

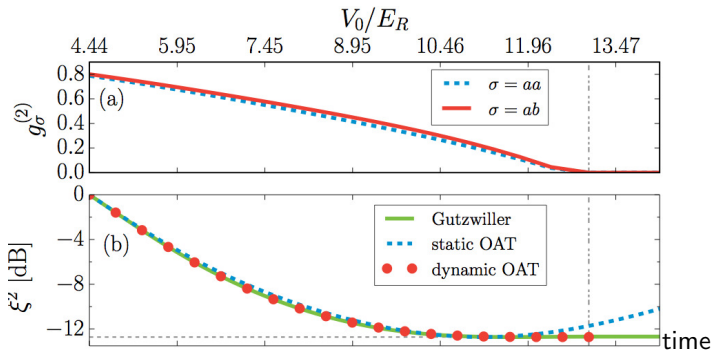
- Calcul de $E_0(N_a, N - N_a, t')$ dans l'approx. Gutzwiller
- Résultats analytiques pour N grands \rightarrow 2 modes "OAT dyn"
- Analyse de pertes et condition d'adiabaticité

Corrélations à travers la transition

Fonction de corrélation sur site

$$g_{aa}^{(2)}(t) = \frac{\langle a_i^\dagger a_i^\dagger a_i a_i \rangle}{\langle a_i^\dagger a_i \rangle^2} \quad g_{ab}^{(2)}(t) = \frac{\langle a_i^\dagger b_i^\dagger a_i b_i \rangle}{\langle a_i^\dagger a_i \rangle \langle b_i^\dagger b_i \rangle}$$

Paramètre de compression $\xi^z(t)$ pendant la rampe de $V_0(t)$



$$N = 125, a_{aa} = a_{bb} = 100.4a_0, a_{ab} = 95a_0, V_0(t) = V_i + (V_f - V_i) \frac{t}{t_{\text{best}}}$$

Approximation pour N grand en phase SF

On développe la phase nonlinéaire autour de $\bar{N}_a = \frac{N}{2}$ et $\bar{N}_b = \frac{N}{2}$

$$\varphi_{\text{NL}}(t) = \int_0^t dt' E_0(N_a, N - N_a, t') \stackrel{N \gg 1}{\simeq} \int_0^t dt' \chi(t') S_z^2 \quad \leftrightarrow \quad H_{\text{eff}} = \chi(t) S_z^2$$

2 modes avec temps renormalisé $T(t) = \int_0^t dt' \chi(t')$

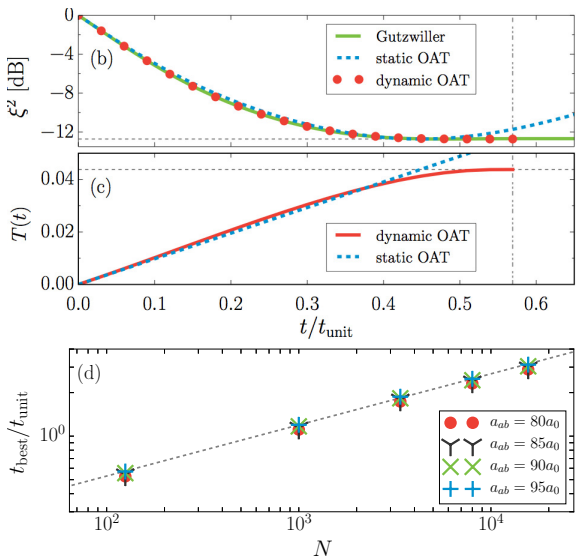
Pour une rampe linéaire $dV_0 = \frac{V_f - V_i}{t_{\text{best}}} dt$,

TEMPS OPTIMAL

$$t_{\text{best}} = \frac{3^{1/6}}{N^{2/3}} \frac{V_f - V_i}{\int_{V_i}^{V_f} dV_0 \chi(V_0)}$$

$\chi(0) = \frac{g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}}{2\hbar V}$ donne la loi d'échelle approchée : $t_{\text{best}} \propto \frac{N^{1/3}}{a_{aa} + a_{bb} - 2a_{ab}}$

Temps effectif $T(t)$ du modèle "OAT dyn" $\chi(t)\hat{S}_z^2$ et loi d'échelle de t_{best}



Paramètre $\xi^2(t)$

Solution numérique (vert) ;
OAT dyn (cercles rouge)
Pas de réseau (bleu tireté)

Temps effectif $T(t)$ (ligne rouge)

$$t_{\text{unit}}^{-1} = (a_{aa} + a_{bb} - 2a_{ab}) \frac{E_R}{\hbar\lambda}$$

$$t_{\text{best}} \propto \frac{N^{1/3}}{a_{aa} + a_{bb} - 2a_{ab}}$$

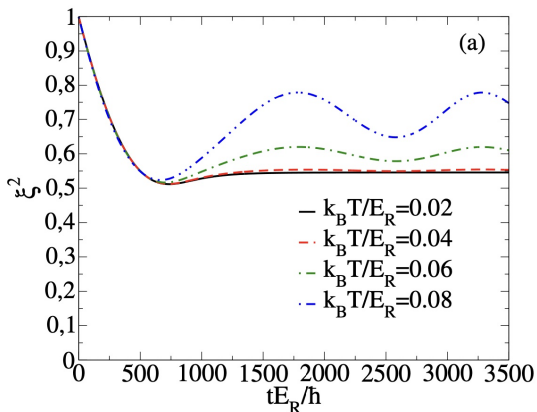
Variation de t_{best} avec N
pour différents valeurs de
 a_{ab} .

Ajustement : $t_{\text{best}} \propto N^{0.35}$

Résumé de cette partie

- **Compression de spin en phase de Mott, en branchant adiabatiquement un réseau optique dans un CBE à deux composantes**
- **Temps de rampe ajusté pour geler dans la phase de Mott les corrélations créées dans la phase superfluide.**
- **Lois d'échelle analytiques** $\xi^2(t_{\text{best}}) \propto N^{-2/3}$ **et** $t_{\text{best}} \propto N^{1/3}$
- **Temps minimal qui garantit l'adiabaticité :** $t_{\text{adiab}} \propto N^{1/3}$ **et** $t_{\text{adiab}} \ll t_{\text{best}}$ **par un facteur** $(a_{aa} + a_{bb} - 2a_{ab})/\lambda$
- **Influence des pertes. Pour ^{87}Rb en $|F = 1, m_F = -1\rangle$ (pertes à 2-corps), et $|F = 2, m_F = -2\rangle$ (pertes à 3-corps) où on peut avoir $\xi^2 \simeq 2 \times 10^{-4}$ avec $N = 4 \times 10^5$.**

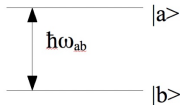
Simulations exactes 1D, $N = 4$, $k_B T \neq 0$



- L'amplitude de l'oscillation dépend de la probabilité de double occupation dans la phase de Mott.
- La période de l'oscillation est celle de l'évolution non linéaire à deux atomes.

Au-delà des état comprimés avec $H_{NL} = \chi S_z^2$

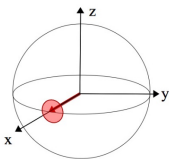
N two-level atoms



Collective spin

$$\hat{S}_x = \frac{a^\dagger b + b^\dagger a}{2}, \quad \hat{S}_y = \frac{a^\dagger b - b^\dagger a}{2i},$$

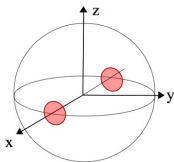
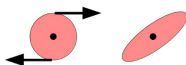
$$\hat{S}_z = \frac{a^\dagger a - b^\dagger b}{2}$$



Initial state : Phase state

$$|\varphi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\frac{e^{i\varphi/2} a^\dagger + e^{-i\varphi/2} b^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^N |0\rangle$$

Evolution $H = \chi S_z^2$
Squeezed state

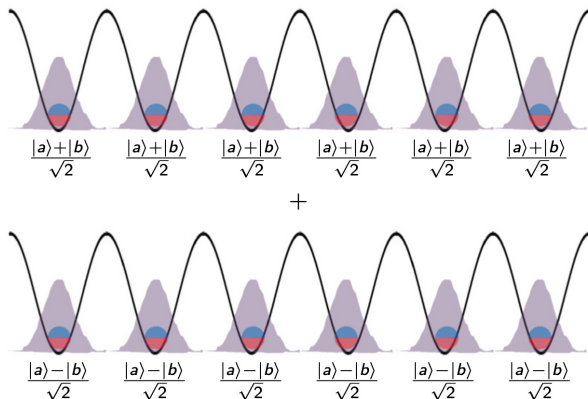


Schrödinger cat state

$$|\psi_{\text{cat}}\rangle = \frac{|\varphi = 0\rangle + |\varphi = \pi\rangle}{\sqrt{2}}$$

Simulations numériques exactes 1D pour $N = 6$

Si l'on ajuste la durée de la rampe : $t_{\text{ramp}} = t_{\text{cat}}$, on prépare un état Greenberger-Horne-Zeilinger



$$|\Psi\rangle_{\text{GHZ}, N=6} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} [|0\rangle_{MI} + i|\pi\rangle_{MI}]$$

Bibliography

- **“Spin-squeezed states for metrology”**
A. Sinatra, hal-03508213.
- **“Spin-squeezed atomic crystal”**
D. Kajtoch, E. Witkowska, A. Sinatra, EPL **123**, 20012 (2018).
- **“Adiabaticity when raising a uniform three-dimensional optical lattice in a bimodal Bose-Einstein condensate”**
D. Kajtoch, E. Witkowska, A. Sinatra, PRA **98**, 023621 (2018).
- **“Producing and storing spin-squeezed states and Greenberger-Horne-Zeilinger states in a one-dimensional optical lattice”**
M. Plodzien, M. Koscielski, E. Witkowska, A. Sinatra, PRA **102**, 013328 (2020).