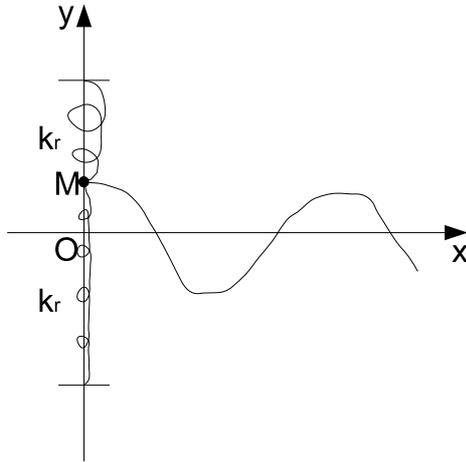


# Examen LP201

## Exercice 1 - Une masse, deux ressorts et une corde



Dans le dispositif ci-dessus, un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplace sans frottements sur l'axe vertical  $Oy$ .

Il est rappelé vers la position  $y_M = 0$  par deux ressorts identiques de raideur  $k_r$  et d'allongement nul pour  $y_M = 0$ .

Une corde infiniment longue de cote  $y(x, t)$  petite est accrochée à  $m$  de telle sorte que  $y(0, t) = y_M(t)$ . La corde, de masse linéique  $\mu$  est tendue avec la tension  $T$  (qu'on supposera de norme constante par la suite, c'est-à-dire indépendante de  $x$  et de  $t$ ). Son ébranlement se limite à celui d'une onde progressive se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants  $y(x, t) = f(t - \frac{x}{c})$ .

La pesanteur est négligée dans tout l'exercice.

On donne  $m = 0.5 \text{ kg}$ ,  $k_r = 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $\mu = 0.1 \text{ kg.m}^{-1}$ ,  $T = 10 \text{ N}$ .

1. Soit  $F(x, t)$  la composante sur  $Oy$  de la force exercée par la partie de la corde située à droite de  $x$  sur la partie située à gauche de  $x$ , et  $v(x, t) = \partial y / \partial t$  la vitesse de la corde en  $x$ . La célérité des ondes est  $c = \sqrt{T/\mu}$ .

1.1 Exprimer  $F(x, t)$  en fonction de  $T$  et de  $\partial y / \partial x$ .

1.2 Montrer que l'impédance définie par  $Z = \frac{F(x, t)}{v(x, t)}$  est constante (indépendante de  $x$  et  $t$ ), et calculer sa valeur en fonction de  $\mu$  et  $T$ . On se servira de  $y(x, t) = f(t - \frac{x}{c})$ .

1.3 Que devient la relation précédente en  $x = 0$ ? Donner alors l'expression de la composante verticale  $F_M$  de la force exercée par la corde sur la masse  $m$  en fonction de  $Z$  et de  $\dot{y}_M = \frac{\partial y_M}{\partial t}$ . Commenter.

2. On considère désormais le système {masse  $m$ }.

2.1 Établir l'équation différentielle du mouvement de  $M$ , que l'on mettra sous la forme :

$$\ddot{y}_M + 2\lambda\dot{y}_M + \omega^2 y_M = 0 \quad (\text{A})$$

Donner les expressions de  $\lambda$  et  $\omega$  en fonction de  $\mu$ ,  $T$ ,  $m$ , et  $k_r$ .

2.2 **Application numérique** : Calculer  $\lambda$ ,  $\omega$ . Montrer :  $\lambda \ll \omega$ .

2.3 Calculer le discriminant  $\Delta$  de l'équation différentielle (A). Compte-tenu de  $\lambda \ll \omega$ , comment simplifier  $\Delta$ ? Dans quel régime est-on? Que vaut la pseudo-pulsation?

2.4 On cherche une solution de l'équation (A) sous la forme  $y_M(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$ . Montrer que  $A \simeq a$  et  $\varphi \simeq 0$  sachant qu'à  $t = 0$ ,  $y_M = a$  et  $\dot{y}_M = 0$ . On se servira encore de  $\lambda \ll \omega$ .

Que vaut  $\tau$ ? Faire l'**application numérique** et montrer :  $\tau \gg T$  où  $T = 2\pi/\omega$ .

3. On considère désormais le système {masse  $m$  + ressorts}.

3.1 Écrire l'énergie mécanique  $E$  du système sous la forme de deux termes :  $E_c$ , énergie cinétique de la masse  $m$  que l'on exprimera en fonction de  $m$  et  $y_M$ , et  $E_p$ , énergie potentielle des deux ressorts, que l'on exprimera en fonction de  $k_r$  et  $y_M$ .

3.2 On admet que la dérivée de  $y_M(t) = ae^{-t/\tau} \cos(\omega t)$  peut s'approximer<sup>1</sup> par  $\dot{y}_M(t) = a(-\omega)e^{-t/\tau} \sin(\omega t)$ .

Montrer que les valeurs moyennes temporelles des énergies  $E_c$  et  $E_p$  sont égales. Notons que  $e^{-t/\tau}$  n'est pas affecté par le processus de moyenne temporelle<sup>2</sup>.

3.3 Calculer alors  $\langle E \rangle$  en fonction de  $k_r$ ,  $a$ ,  $t$  et  $\tau$ . Commenter. Où part l'énergie du système {masse  $m$  + ressorts}? Très qualitativement, qu'est-ce qui change si la corde n'est plus infinie?

3.4 Montrer que :  $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \langle F(0, t) \cdot \dot{y}_M \rangle = \langle F_M \cdot \dot{y}_M \rangle$ . Donner une interprétation à cette formule.

---

<sup>1</sup>Cela revient à ne dériver que le cosinus, ce qui est correct car  $\tau \gg T = 2\pi/\omega$ , c'est-à-dire que "le cosinus varie beaucoup plus vite que l'exponentielle".

<sup>2</sup>La moyenne temporelle est à prendre sur une période  $T$ , et "l'exponentielle n'a pas le temps de beaucoup varier sur un temps  $T$ ".