A1. $\frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda\hat{c}}\,\hat{d}\,e^{-\lambda\hat{c}}\right) = e^{\lambda\hat{c}}\,[\hat{c},\hat{d}]\,e^{-\lambda\hat{c}}$

$$= e^{\lambda\hat{c}}\,h\,e^{-\lambda\hat{c}} = h$$

$e^{\lambda\hat{c}}\,\hat{d}\,e^{-\lambda\hat{c}}\Big|_{\lambda=0} = \hat{d}$ donne la condition initiale, d'où par intégration

$$\underline{e^{\lambda\hat{c}}\,\hat{d}\,e^{-\lambda\hat{c}} = \hat{d} + \lambda h}$$

Comme $[-\hat{d},\hat{c}] = h$ on obtient par la substitution $\left\{\begin{array}{l} \hat{d} \to \hat{c} \\ \hat{c} \to -\hat{d} \\ h \to h \\ \lambda \to \rho \end{array}\right.$

$$\underline{e^{-\rho\hat{d}}\,\hat{c}\,e^{\rho\hat{d}} = \hat{c} + \rho h}$$

ce qui donne $\hat{c}\,e^{\rho\hat{d}} = e^{\rho\hat{d}}(\hat{c}+\rho h)$

On développe en puissances de ρ cette identité pour obtenir $\hat{c}\,\frac{\hat{d}^n}{n!} = \frac{\hat{d}^n}{n!}\hat{c} + h\,\frac{\hat{d}^{n-1}}{(n-1)!}$ $n \geq 2$

d'où $\underline{\hat{c}\,\hat{d}^n = \hat{d}^n\hat{c} + h\,n\,\hat{d}^{n-1}}$ $n \geq 2$

A.2 On pose $G(\lambda) \equiv e^{-\rho\hat{d}}\,e^{\lambda\hat{c}}\,e^{\rho\hat{d}}$. Alors

$$G'(\lambda) = e^{-\rho\hat{d}}\,e^{\lambda\hat{c}}\,\hat{c}\,e^{\rho\hat{d}}$$

$$= e^{-\rho\hat{d}}\,e^{\lambda\hat{c}}\left(e^{\rho\hat{d}}(\hat{c}+\rho h)\right) \text{ d'après A.1}$$

$G'(d) = G(d)(\hat{c} + \rho h)$. Mais $G(0) = 1$

d'où par intégration $G(d) = e^{d(\hat{c}+\rho h)}$

Mais $[\hat{c}, h] = 0$ donc

$$\underline{e^{-\rho\hat{d}}\, e^{d\hat{c}}\, e^{-\rho\hat{d}} = e^{d\rho h}\, e^{d\hat{c}}}$$

A.3 Comme $F(t)$ est un produit de trois exponentielles, la formule de dérivation d'un produit donne trois termes. Il faut simplement ne pas faire commuter des termes qui ne commutent pas ! On obtient, en utilisant que si $\hat{O}$ est un opérateur constant (indépendant de t) quelconque $\frac{d}{dt} e^{t\hat{O}} = \hat{O} e^{t\hat{O}} = e^{t\hat{O}} \hat{O}$, les trois termes annoncés en choisissant pour chacun le côté où l'on place $\hat{O}$.

Le second et le troisième termes se simplifient pour donner

$$F'(t) = e^{-t\rho\hat{d}}\, {-\rho\hat{d}}\, e^{t(\rho\hat{d}+d\hat{c})}\, e^{-td\hat{c}}$$

$$+ e^{-t\rho\hat{d}}\, e^{t(\rho\hat{d}+d\hat{c})}\, \rho\hat{d}\, e^{-td\hat{c}} \quad *$$

Dans la formule de A.1

$$e^{\lambda \hat{c}}\,\hat{d}\,e^{-\lambda \hat{c}} = \hat{d} + \lambda h$$ on fait la

substitution
$$\lambda \to t$$
$$\hat{c} \to \lambda \hat{c} + \rho \hat{d}$$
$$\hat{d} \to \rho \hat{d}$$
$$h \to \lambda \rho h = [\lambda \hat{c} + \rho \hat{d}, \rho \hat{d}]$$

pour obtenir

$$e^{t(\rho \hat{d} + \lambda \hat{c})}\,\rho \hat{d}\,e^{-t(\rho \hat{d} + \lambda \hat{c})} = \rho \hat{d} + t \lambda \rho h$$

i.e. $e^{t(\rho \hat{d} + \lambda \hat{c})}\rho \hat{d} = (\rho \hat{d} + t \lambda \rho h)\, e^{t(\rho \hat{d} + \lambda \hat{c})}$

qu'on reporte dans $*$ pour obtenir

$$F'(t) = e^{-t\rho \hat{d}}\,(t\rho\lambda h)\,e^{t(\rho \hat{d} + \lambda \hat{c})}\,e^{-t\lambda \hat{c}}$$
$$= t\lambda\rho h\; e^{-t\rho \hat{d}}\,e^{t(\rho \hat{d} + \lambda \hat{c})}\,e^{-t\lambda \hat{c}}$$

car $[h, \hat{d}] = 0$ d'où

$$F'(t) = t\,\lambda\rho h\; F(t).$$

A.4 . Comme $F(0) = 1$ par intégration il vient $F(t) = e^{\frac{t^2}{2}\lambda\rho h}$

Faisant $t = 1$ et multipliant à droite par $e^{\lambda \hat{c}}$ et à gauche par $e^{\rho \hat{d}}$ il vient

$$\underline{e^{\rho \hat{d} + \lambda \hat{c}} = e^{\frac{1}{2}\rho\lambda h}\, e^{\rho \hat{d}}\, e^{\lambda \hat{c}}}$$

A.5 $\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a}) \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, i(\hat{a}^+ - \hat{a})$

$[\hat{q},\hat{p}] = \frac{i}{2}[\hat{a}^+ + \hat{a}, \hat{a}^+ - \hat{a}] = i$ ce qui est bien la relation canonique entre position et impulsion.

A.6 $\hat{H}_0 = ?$

$$p^2 = \frac{\omega}{2}(2a^*a - a^2 - a^{*2})$$

$$q^2 = \frac{1}{2\omega}(2a^*a + a^2 + a^{*2})$$

$$\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = \omega a^* a$$

$$\underline{\hat{H}_0 = \omega \hat{a}^+ \hat{a}}$$

cependant $\hat{p}^2 = \frac{\omega}{2}(\hat{a}^+ a + \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})$

$$\hat{q}^2 = \frac{1}{2\omega}(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})$$

$$\frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) = \frac{1}{2}\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) = \omega(\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) = \hat{H}_0 + \frac{\omega}{2}$$

Avec la convention $|-1\rangle \equiv 0$ il vient pour $n \geq 0$

$$\hat{H}_0|n\rangle = \omega\, \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \omega\, \hat{a}^+ \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$= \omega\sqrt{n}\,\sqrt{n}\,|n\rangle = \omega n|n\rangle$$

Donc le spectre de $\hat{H}_0$ est $\{\omega n \,;\, n=0,1,\dots\}$ car les $|n\rangle$ forment une base orthonormée de $\mathcal{F}$.

<u>A.7</u> $$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{y})\right] = \frac{i}{2L^d} \sum_{\vec{k},\vec{\ell} \in I} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}^+_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right), \sqrt{\omega_{\vec{\ell}}}\left(\hat{a}^+_{\vec{\ell}} e^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{y}} - \hat{a}_{\vec{\ell}} e^{i\vec{\ell}\cdot\vec{y}}\right)\right]$$

$$= \frac{i}{2L^d} \sum_{\vec{k},\vec{\ell} \in I} \left(0 + \delta_{\vec{k},\vec{\ell}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{\ell}}}{\omega_{\vec{k}}}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\vec{\ell}\cdot\vec{y}} + 0 + \delta_{\vec{k},\vec{\ell}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{\ell}}}{\omega_{\vec{k}}}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\vec{\ell}\cdot\vec{y}}\right)$$

$$= \frac{i}{2L^d} \sum_{\vec{k} \in I} e^{i\vec{k}(\vec{y}-\vec{x})} + e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= \frac{i}{2}\left(\delta_L(\vec{y}-\vec{x}) + \delta_L(\vec{x}-\vec{y})\right) = i\,\delta_L(\vec{x}-\vec{y})$$

Ce sont bien les relations de commutation canonique pour les champs.

<u>A.8</u> On écrit

$$(\vec{\nabla}\phi)^2_{(\vec{x})} = \frac{-1}{2L^d} \sum_{\vec{k},\vec{\ell} \in I} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{\ell}}}}\, \vec{k}\cdot\vec{\ell}$$

$$\left(a^*_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)\left(a^*_{\vec{\ell}} e^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{\ell}} e^{i\vec{\ell}\cdot\vec{x}}\right)$$

On utilise alors que pour $\vec{q} \in I$

$$\int_{[0,L]^d} d^d\vec{x} \; e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = L^d \, \delta_{\vec{q},\vec{0}} \quad \text{pour obtenir}$$

$$\int_{[0,L]^d} d^d\vec{x} \, (\vec{\nabla}\phi)^2 = -\frac{1}{2L^d} \sum_{\vec{k},\vec{\ell} \in I} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{\ell}}}} \vec{k}\cdot\vec{\ell}$$

$$\Big(a^*_{\vec{k}} a^*_{\vec{\ell}} \; L^d \delta_{\vec{k}+\vec{\ell},\vec{0}} - a^*_{\vec{k}} a_{\vec{\ell}} \, L^d \delta_{\vec{k},\vec{\ell}}$$

$$- a_{\vec{k}} a^*_{\vec{\ell}} \, L^d \delta_{\vec{k},\vec{\ell}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{\ell}} \; L^d \delta_{\vec{k}+\vec{\ell},0} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in I} \frac{\vec{k}^2}{\omega_{\vec{k}}} \Big(a^*_{\vec{k}} a^*_{-\vec{k}} + a^*_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \Big)$$

De même

$$\int_{[0,L]^d} d^d\vec{x} \, (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in I} \frac{\vec{k}^2}{\omega_{\vec{k}}} \Big(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \Big)$$

On calcule de même

$$\int_{[0,L]^d} d^dx \, \Pi^2 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in I} \omega_{\vec{k}} \Big(-a^*_{\vec{k}} a^*_{-\vec{k}} + a^*_{\vec{k}} a_{k} + a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} - a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \Big)$$

$$\int_{[0,L]^d} d^dx \, \phi^2 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in I} \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} \Big(a^*_{\vec{k}} a^*_{-\vec{k}} + a^*_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \Big)$$

et les correspondants quantiques. (avec les ^) (7)

Finalement, il vient

$$\int_{[0,L]^d} d^d x \left(\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\vec{k} \in I} a^*_{\vec{k}} a^*_{-\vec{k}} \underbrace{\left(-\omega_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}^2 + m^2}{\omega_{\vec{k}}} \right)}_{0}$$

$$+ a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \underbrace{\left(-\omega_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}^2 + m^2}{\omega_{\vec{k}}} \right)}_{0}$$

$$+ \left(a^*_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} \right) \underbrace{\left(\omega_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}^2 + m^2}{\omega_{\vec{k}}} \right)}_{2\omega_{\vec{k}}}.$$

et le correspondant quantique

$$\int_{[0,L]^d} d^d x \left(\frac{1}{2} \hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in I} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \right)$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k} \in I} \omega_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}$$

$\hat{H}_0$ est diagonal dans la base $|\bar{n}\rangle$

$$\hat{H}_0 |\bar{n}\rangle = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \quad \text{si } \bar{n} = (n_{\vec{k}})_{\vec{k} \in I}$$

$\int_{[0,L]^d} d^d x \, \frac{1}{2} \hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2$ diffère de $\hat{H}_0$ par

la constante (infinie) $\sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2}$, et ceci opérateur n'agit donc pas sur F.

B.1 On a $H = H_0 + \frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2) : q^2 :$

En A.6 on a calculé $q^2 = \frac{1}{2\omega}(2a^*a + a^2 + a^{*2})$

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\Omega^2-\omega^2}{4\omega}(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^2 + \hat{a}^{*2})$$

$\hat{H}$ est le produit normal d'une fonction de $\hat{a}$ et a^* ne contenant pas de terme constant donc $\langle 0|\hat{H}|0\rangle = 0$. Autre raisonnement, tout terme de $\hat{H}$ a soit un $\hat{a}^\dagger$ à gauche soit un a à droite, dans le premier cas $\langle 0|$ est annihilé, dans le second c'est $|0\rangle$. Donc $\langle 0|\hat{H}|0\rangle = 0$.

B.2 Comme $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sont bien adjoints l'un de l'autre, l'adjoint de $\hat{b}$ est

$$\left(\frac{(\Omega+\omega)a + (\Omega-\omega)a^\dagger}{2\sqrt{\omega\Omega}}\right)^\dagger = \frac{(\Omega+\omega)a^\dagger + (\Omega-\omega)a}{2\sqrt{\omega\Omega}}$$ qui est bien $\hat{b}^\dagger$. (ω et Ω sont réels)

$$[\hat{b},\hat{b}^\dagger] = \frac{1}{4\omega\Omega}\left[(\Omega+\omega)a + (\Omega-\omega)a^\dagger, (\Omega+\omega)a^\dagger + (\Omega-\omega)a\right]$$

$$= \frac{1}{4\omega\Omega}\left((\Omega+\omega)^2 + 0 + 0 - (\Omega-\omega)^2\right) = 1$$

B.3 Calculons $\Omega \hat{b}^\dagger \hat{b}$

$$\Omega \hat{b}^\dagger b = \frac{1}{4\omega}\left((\Omega+\omega)\hat{a}^\dagger + (\Omega-\omega)\hat{a}\right)\left((\Omega-\omega)\hat{a}^\dagger + (\Omega+\omega)\hat{a}\right)$$

$$= \frac{1}{4\omega}(\Omega^2-\omega^2)\left[\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2\right] + \frac{1}{4\omega}(\Omega+\omega)^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$+ \frac{1}{4\omega}(\Omega-\omega)^2 \hat{a}\hat{a}^\dagger$$

$$= \frac{1}{4\omega}(\Omega^2-\omega^2)\left(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2\right) + \underbrace{\frac{1}{4\omega}\left((\Omega+\omega)^2 + (\Omega-\omega)^2\right)}_{= \omega + \frac{1}{2\omega}(\Omega^2-\omega^2)} \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$+ \frac{(\Omega-\omega)^2}{4\omega}$$

Dans la première ligne on reconnait $\hat{H}$.

Donc $\hat{H} = \Omega b^\dagger b - \dfrac{(\Omega-\omega)^2}{4\omega}$

$$E_0(\Omega, \omega) = \frac{(\Omega-\omega)^2}{4\omega}$$

Le spectre formel de $\hat{H}$ est $\left\{ \Omega n - \frac{(\Omega-\omega)^2}{4\omega}, n = 0, 1, \dots \right\}$

B.4 On a vu en B.1 que $\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = 0$

d'où $\Omega \underbrace{\langle 0 | \hat{b}^\dagger \hat{b} | 0 \rangle}_{\| b|0\rangle \|^2} - E_0(\Omega, \omega) \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_{1} = 0$ donc

$E_0(\Omega, \omega) = \Omega \; \| b|0\rangle \|^2$ doit bien être ≥ 0

B.5 Calculons $\hat{a} \sum_{n\geq 0} c_n |n\rangle$ et $\hat{a}^+ \sum_{n\geq 0} c_n |n\rangle$

$$\hat{a} \sum_{n\geq 0} c_n |n\rangle = \sum_{n\geq 1} c_n \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$

$$= \sum_{n\geq 0} c_{n+1} \sqrt{n+1}\, |n\rangle$$

$$\hat{a}^+ \sum_{n\geq 0} c_n |n\rangle = \sum_{n\geq 0} c_n \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$$

$$= \sum_{n\geq 0} c_{n-1} \sqrt{n}\, |n\rangle$$

Comme $\hat{b}$ est proportionnel à $(\Omega+\omega)\hat{a} + (\Omega-\omega)\hat{a}^+$

$\hat{b} \sum c_n |n\rangle = 0$ se ramène à

$$(*) \quad (\Omega+\omega)\, c_{n+1} \sqrt{n+1} + (\Omega-\omega)\, c_{n-1} \sqrt{n} = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

$n=0$ donne $c_1 = 0$ puis par récurrence $c_n = 0$ pour tout n impair. Pour les autres coefficients, on peut réécrire $(*)$ sous la forme $(\Omega+\omega)\, c_{n+2} \sqrt{n+2} = (\omega-\Omega)\, c_n \sqrt{n+1}$

d'où par récurrence

$$c_{2n} = \left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^n \sqrt{\frac{2n-1}{2n}\, \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}}\; c_0$$

$$= \left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^n \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!}}\; c_0 = \left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^n \sqrt{\frac{(2n)!}{4^n\, n!^2}}\; c_0$$

La norme de l'état $\sum_{n\geq 0} c_n |n\rangle$ est donc

$$\sum_{n\geq 0} c_n^2 = \sum_{n\geq 0} c_{2n}^2 = \left(\sum_{n\geq 0} \left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{4^n\, n!^2}\right) c_0^2$$

$$= c_0^2 \left(1-\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^2\right)^{-1/2}$$

justifié car $\left|\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right| < 1$

Si $\sum_n c_n |0\rangle$ est normalisé et a un c_0 reel positif alors

$$c_0 = \left(1-\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^2\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{4\omega\Omega}{(\omega+\Omega)^2}}$$

Donc $$|0\rangle_\Omega = \sqrt[4]{\frac{4\omega\Omega}{(\omega+\Omega)^2}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)^n \frac{1}{n!} \sqrt{(2n)!}\, |2n\rangle$$

mais $\sqrt{m!}\,|m\rangle = (\hat{a}^\dagger)^m |0\rangle$ d'où

$$|0\rangle_\Omega = \sqrt[4]{\frac{4\omega\Omega}{(\omega+\Omega)^2}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)\right)^n (\hat{a}^\dagger)^{2n} |0\rangle$$

$$|0\rangle_\Omega = \sqrt[4]{\frac{4\omega\Omega}{(\omega+\Omega)^2}}\; e^{\frac{1}{2}\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\hat{a}^{\dagger 2}} |0\rangle$$

$$\hat{f}|0\rangle_\Omega = -\frac{(\omega-\Omega)^2}{4\omega}|0\rangle_\Omega$$

B.6 Comme $|0\rangle_\Omega$ est un état normalisé dans F annihilé par $\hat{b}$, la théorie standard de l'oscillateur harmonique s'applique, et en conséquence les $\{|n\rangle_\Omega\}_{n=0,1,\ldots}$ forment un système orthonormé dans $\mathcal{F}$. Pour des raisons de symétrie, on pourrait obtenir $|0\rangle$ puis les $|n\rangle$ à partir des $\{|n\rangle_\Omega\}$ (en échangeant les rôles de ω et Ω) donc le système $\{|n\rangle_\Omega\}_{n=0,1,\ldots}$ est total.

B.7 : $\hat{U}$ est diagonal dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles, donc $\hat{U} = \hat{U}^\dagger$.

De plus $\hat{U}^2 = \mathbb{1}$ donc $\hat{U} = \hat{U}^{-1}$.

On écrit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \oplus \mathcal{F}_-$ où $\mathcal{F}_\pm$ est engendré par les $|n\rangle$, n $\begin{cases}\text{pairs}\\ \text{impairs}\end{cases}$ et le sous espace propre $\begin{cases}+1\\ -1\end{cases}$ de $\hat{U}$.

Par définition $\hat{a}\,\mathcal{F}_\pm \subset \mathcal{F}_\mp$ (cf. son action sur les $|n\rangle$, et idem $\hat{a}^\dagger\,\mathcal{F}_\pm \subset \mathcal{F}_\mp$.

Donc $\hat{U}\hat{a}\hat{U}^{-1} = -\hat{a}$ $\quad \hat{U}\hat{a}^\dagger\hat{U}^{-1} = -\hat{a}^\dagger$.

Mais $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$ sont des combinaisons linéaires de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ donc $\hat{U}\hat{b}\hat{U}^{-1} = -\hat{b}$ et $\hat{U}\hat{b}^\dagger\hat{U}^{-1} = -\hat{b}^\dagger$.

$\hat{H}_0$ et $\hat{H}$ sont quadratiques en $a, a^\dagger$ donc commutent avec $\hat{U}$

Comme leurs spectres ne contiennent aucune dégénérescence, $\hat{U}$ est diagonal sur les états propres de $\hat{H}$. Par continuité, il est pair sur $|0\rangle_\Omega$, et vaut $(-1)^n$ sur les $|n\rangle_\Omega$.

Ceci confirme le calcul explicite.

<u>C.1</u> : On écrit $\hat{H} = H_0 + :\int_{[0,L]^d} d^dx \, \frac{1}{2}(M^2-m^2)\phi^2 :$

et on peut réutiliser les formules de la question A.8.

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{M^2-m^2}{4\omega_{\vec{k}}} \left(2\hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k - \hat{a}^\dagger_k \hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \right)$$

On a aussi
$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_k \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} + \frac{M^2-m^2}{4\omega_k} \left(2a^\dagger_{-\vec{k}} a_{-\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} - \hat{a}_k \hat{a}_{-\vec{k}} \right)$$

On peut donc récrire $\hat{H}$ comme la demi somme

$$\hat{H} = \sum_{k} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left(\hat{a}^\dagger_k \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \right) + \frac{M^2-m^2}{4\omega_{\vec{k}}} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \right)$$

Alors posant $\hat{H}^{(\vec{k})} = \frac{\omega_{\vec{k}}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}}\right)$

$$+ \frac{M^2-m^2}{4\omega_{\vec{k}}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}a^\dagger_{-\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}}\right).$$

On a bien $\hat{H} = \sum_{\vec{k}} H^{(\vec{k})}$ et $\hat{H}^{(\vec{k})} = \hat{H}^{(-\vec{k})}$

pour $\vec{k}, \vec{\ell} \in I$ si $\vec{k} = \pm\vec{\ell}$ alors

$\hat{H}^{(\vec{k})} = H^{(\vec{\ell})}$ d'où commutation, et si

$\vec{k} \neq \pm \ell$ $\hat{H}^{(\vec{k})}$ et $H^{(\vec{\ell})}$ ne fait intervenir

aucun mode des $\hat{a}_\cdot$ $\hat{a}^\dagger_\cdot$ commun d'où

commutation.

Donc $\left[\hat{H}^{(\vec{k})}, \hat{H}^{(\vec{\ell})}\right] = 0$ $\vec{k}, \vec{\ell} \in I$.

<u>C.2</u> : Comme $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$ est bien l'adjoint de $\hat{a}_{\vec{k}}$

pour tout $\vec{k}$, $\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}$ est bien l'adjoint de $\hat{b}_{\vec{k}}$

par un calcul trivial analogue à celui de B.2

$$\left[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{\ell}}\right] = \frac{1}{4\sqrt{\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{\ell}}\Omega_{\vec{\ell}}}}\Big[(\Omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}})\hat{a}_{\vec{k}} + (\Omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}})\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}},$$

$$(\Omega_{\vec{\ell}}+\omega_{\vec{\ell}})\hat{a}^\dagger_{\vec{\ell}} + (\Omega_\ell - \omega_{\vec{\ell}})\hat{a}_{-\vec{\ell}}\Big];$$

Le commutateur vaut $(\Omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}})(\Omega_{\vec{\ell}}+\omega_{\vec{\ell}})\delta_{\vec{k}\vec{\ell}} + 0 + 0$

$$- (\Omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}})(\Omega_{\vec{\ell}}-\omega_{\vec{k}})\delta_{\vec{k},\vec{\ell}} = 4\Omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\delta_{\vec{k},\vec{\ell}}$$

d'où le résultat. De même $[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{\ell}}]$ est proportionnel à

$$\left[(\Omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}})\hat{a}_{\vec{k}} + (\Omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}})\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}},\ (\Omega_{\vec{\ell}}+\omega_{\vec{\ell}})\hat{a}_{\ell} + (\Omega_{\vec{\ell}}-\omega_{\vec{\ell}})\hat{a}^\dagger_{-\vec{\ell}}\right]$$

$$= 0 + (\Omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}})(\Omega_{\vec{\ell}}-\omega_{\vec{\ell}})\,\delta_{\vec{k}+\vec{\ell},0}$$

$$- (\Omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}})(\Omega_{\vec{\ell}}+\omega_{\vec{\ell}})\,\delta_{\vec{k}+\vec{\ell},0} + 0 = 0$$

On obtient la dernière relation en prenant l'adjoint.

<u>C.3</u> $$\left\| e^{s_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}} a^\dagger_{-\vec{k}}} |\bar{0}\rangle \right\|^2 = \sum_{m,n \geq 0} (s_{\vec{k}})^{m+n}$$

$$\langle \bar{0} | \underbrace{\frac{(\hat{a}_k \hat{a}_{-k})^m}{m!}} \underbrace{\frac{(\hat{a}^\dagger_k \hat{a}^\dagger_{-k})^n}{n!}} |\bar{0}\rangle$$

$$\frac{(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}})^n}{\sqrt{n!}} |\bar{0}\rangle$$ état normalisé avec n quantas $\vec{k}$ et n quanta $-\vec{k}$.

idem $n \leftrightarrow m$ donc

le produit scalaire est simplement $\delta_{m,n}$ d'où

$$\left\| e^{s_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}} |\bar{0}\rangle \right\|^2 = \sum_m (s_{\vec{k}})^{2n}$$ mais

$$|s_{\vec{k}}| = \left| \frac{\omega_{\vec{k}} - \Omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{k}}} \right| < 1$$ donc la série

est convergente et vaut $\dfrac{1}{1 - s_{\vec k}^2} = \dfrac{(\omega_{\vec k} + \Omega_{\vec k})^2}{4\omega_{\vec k}\Omega_{\vec k}}$

D'après la formule pour $b_{\vec k}$, $b_{\vec k} \propto \hat a_{\vec k} - s_{\vec k} \hat a^\dagger_{-\vec k}$

$$\left(\hat a_{\vec k} - s_{\vec k} \hat a^\dagger_{-\vec k}\right) \sum_{n \geq 0} \frac{(s_{\vec k})^n}{n!} \left(\hat a^\dagger_{\vec k}\right)^n \left(\hat a^\dagger_{-\vec k}\right)^n |\bar 0\rangle = ?$$

D'après la question A-1 on sait que

$$\hat a_{\vec k} \left(\hat a^\dagger_{\vec k}\right)^n = \left(\hat a^\dagger_{\vec k}\right)^n \hat a_{\vec k} + n\left(\hat a^\dagger_{\vec k}\right)^{n-1}$$

De plus $\hat a_{\vec k}$ commute avec $\hat a^\dagger_{-\vec k}$ et annihile $|\bar 0\rangle$ donc

$$? = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(s_{\vec k})^n}{(n-1)!} \left(\hat a^\dagger_{\vec k}\right)^{n-1} \left(\hat a^\dagger_{-\vec k}\right)^n - \sum_{n \geq 0} \frac{(s_{\vec k})^{n+1}}{n!} \left(\hat a^\dagger_{\vec k}\right)^n \left(\hat a^\dagger_{-\vec k}\right)^{n+1} \right) |\bar 0\rangle$$

changeant n en $n-1$ dans la première somme il vient $? = 0$ donc

$e^{s_k a^\dagger_k a^\dagger_{-k}} |\bar 0\rangle$ est bien annihilé par $\hat b_{\vec k}$, et par symétrie aussi par $\hat b_{-\vec k}$..

C.4 : Le calcul suit le calcul de B.3.

$$\Omega_k\left(\hat b^+_{\vec k}\hat b_{\vec k}+\hat b^+_{-k}\hat b_{-\vec k}\right)$$

$$=\frac{1}{4\omega_{\vec k}}\Big\{\left((\Omega_{\vec k}+\omega_{\vec k})\hat a^+_{k}+(\Omega_{\vec k}-\omega_{\vec k})\hat a_{-\vec k}\right)\left((\Omega_{\vec k}+\omega_{\vec k})\hat a_{\vec k}+(\Omega_{\vec k}-\omega_{\vec k})\hat a^+_{-k}\right)+\left((\Omega_k+\omega_k)\hat a^+_{-k}+(\Omega_k-\omega_{\vec k})\hat a_{\vec k}\right)\left((\Omega_{\vec k}+\omega_{\vec k})\hat a_{-\vec k}+(\Omega_{\vec k}-\omega_{\vec k})\hat a^+_{\vec k}\right)\Big\}$$

$$=\frac{1}{4\omega_{\vec k}}\Big\{(\Omega_{\vec k}+\omega_{\vec k})^2\left(\hat a^+_{\vec k}\hat a_{\vec k}+\hat a^+_{-\vec k}\hat a_{-\vec k}\right)+(\Omega_{\vec k}-\omega_{\vec k})^2\left(\hat a_{\vec k}\hat a^+_{\vec k}+\hat a_{-\vec k}\hat a^+_{-k}\right)+2(\Omega^2_{\vec k}-\omega^2_{\vec k})\left(\hat a_{\vec k}\hat a_{-\vec k}+\hat a^+_{\vec k}a^+_{-\vec k}\right)\Big\}$$

Dans la deuxieme ligne on ramene l'ordre normal, d'où

$$=\underbrace{2E_0(\Omega_{\vec k},\omega_{\vec k})}_{\frac{(\Omega^2_k-\omega^2_{\vec k})^2}{4\omega_{\vec k}}}+\frac{1}{2\omega_{\vec k}}\Big\{\overbrace{(\Omega^2_{\vec k}+\omega^2_{\vec k})}^{M^2-m^2+2\omega^2_k}\left(\hat a^+_{\vec k}\hat a_{\vec k}+\hat a^+_{-k}\hat a_{-\vec k}\right)+\underbrace{(\Omega^2_k-\omega^2_k)}_{M^2-m^2}\left(\hat a^+_{\vec k}\hat a^+_{-\vec k}+\hat a_{\vec k}\hat a_{-\vec k}\right)\Big\}$$

Donc $\Omega_{\vec k}\left(\hat b^+_{\vec k}\hat b_{\vec k}+\hat b^+_{-\vec k}\hat b_{-\vec k}\right)$

$$=\hat H^{(k)}+\hat H^{(-k)}+2E_0(\Omega_{\vec k},\omega_{\vec k})$$

Comme $\mathcal{F}_{GFT}$ contient un état annihilé par $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}_{-\vec{k}}$, le spectre de $\hat{H}^{(\vec{k})} + \hat{H}^{(-\vec{k})}$ sur $\mathcal{F}_{GFT}$ est

$$\left\{ (n_{\vec{k}} + n_{-\vec{k}})\,\Omega_{\vec{k}} - \frac{(\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})^2}{2\omega_{\vec{k}}} \right\}_{n_{\vec{k}}, n_{-\vec{k}} = 0,1,\dots}$$

Il est dégénéré par tous les autres oscillateurs.

C.5 : $\log \dfrac{(\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}} = \log\left(1 - \left(\dfrac{\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}}\right)^2\right)^{-1}$

à grand $|\vec{k}|$ $\quad \Omega_{\vec{k}} = \sqrt{M^2 + |\vec{k}|^2} \sim |\vec{k}|\left(1 + \dfrac{M^2}{2|\vec{k}|^2} + \dots\right)$

donc $\dfrac{\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}} \sim \dfrac{M^2 - m^2}{4|\vec{k}|^2}$ et

$$\log\left(1 - \frac{(\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})^2}{(\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}})^2}\right)^{-1} \sim \left(\frac{M^2 - m^2}{4}\right)^2 \frac{1}{|\vec{k}|^4}$$

donc $\displaystyle\sum_{\vec{k} \in I} \log \frac{(\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}$ converge si et seulement si $d < 4$ d'après le résultat rappelé dans l'énoncé.

En conséquence, le produit infini

$$\prod_{\vec{k}\in I} \frac{(\omega_{\vec{k}}+\Omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}$$ converge si et seulement si

$d<4$

C.6 $$\frac{1}{2}\sum_{k\in I} \hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{a}^{+}_{-\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}-\Omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}+\Omega_{\vec{k}}}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{a}^{+}_{\vec{0}}\hat{a}^{+}_{\vec{0}} \frac{\omega_{\vec{0}}-\Omega_{\vec{0}}}{\omega_{\vec{0}}+\Omega_{\vec{0}}} + \sum_{k\in I}{}' s_{\vec{k}}\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}}$$

où $\sum_{k\in I}{}'$ signifie que l'on somme sur les

paires $\{\vec{k},-\vec{k}\}$ distincts, $\vec{k}\neq\vec{0}$

Le premier terme relève de la partie B., et

le second de C.3. La norme de

$e^{\frac{1}{2}\sum_{k\in I}\frac{\omega_{\vec{k}}-\Omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}+\Omega_{\vec{k}}}\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{a}^{+}_{-\vec{k}}}|\vec{0}\rangle$ est donc

→ même convention

$$\left(\frac{(\omega_{\vec{0}}+\Omega_{\vec{0}})^2}{4\omega_{\vec{0}}\Omega_{\vec{0}}}\right)^{1/4} \prod_{k\in I}{}' \left(\frac{(\omega_{\vec{k}}+\Omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2}$$

qui peut se récrire sous la forme ($d<4$)

$$\prod_{k\in I}\left(\frac{(\omega_{\vec{k}}+\Omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}\right)^{1/4}$$ produit convergent car $d<4$

et cet état est annihilé par $\hat{b}_{\vec{k}}$, $k \in I$

car $b_{\vec{k}}$, $\vec{k} \neq \vec{0}$ commute avec $a^{+}_{\vec{\ell}} a^{+}_{-\vec{\ell}}$ pour

$\vec{k} \neq \pm \vec{\ell}$ et annihile $e^{s_{\vec{k}} \hat{a}^{+}_{\vec{k}} \hat{a}^{+}_{-\vec{k}}} |\bar{0}\rangle$

le cas de $b_{\vec{0}}$ se traite de même.

Pour $d<4$ F_{QFT} est donc un espace de Fock adapté à la fois aux $\hat{a}_{\vec{k}}$, $\hat{a}^{+}_{\vec{k}}$ et aux $\hat{b}_{\vec{k}}$, $\hat{b}^{+}_{\vec{k}}$.

En revanche, si $d \geq 4$, F_{QFT}, espace de Fock pour les $\hat{a}_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}}$, donne une représentation unitaire des relations de commutation canonique des $\hat{b}^{+}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}$ très différente de la représentation de Fock usuelle des $\hat{b}^{+}_{\vec{k}}$, $\hat{b}_{\vec{k}}$, puisqu'elle ne contient pas de vide.

<u>C.7</u>: D'après les calculs du C.5, on a

$$\frac{(\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}} \sim \left(\frac{M^2 - m^2}{4}\right)^2 \frac{1}{|k|^3}$$ donc la

série proposée converge si et seulement si $d<3$

C.8 : On a $\hat{H} = \sum_{\vec{k}\in I} \hat{H}^{(\vec{k})}$

$$= H^{(\vec{0})} + \sum_{\vec{k}\in I}{}' \hat{H}^{(\vec{k})} + \hat{H}^{(-\vec{k})}$$

Comme $d<3$, on peut écrire, d'après B.3 et C.4

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\in I} \Omega_{\vec{k}}\, b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}} - \underbrace{\sum_{\vec{k}\in I} \frac{(\Omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}}}_{<+\infty}$$

$$\equiv \mathcal{E}_0(M,m)$$

Puisque $d<3<4$, $\mathcal{F}_{AFT}$ est un espace de Fock pour les $b^{+}_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}$ et le spectre de $\hat{H}$ sur $\mathcal{F}_{AFT}$ est simplement le spectre usuel du champs libre de masse M décalé de la constante $\mathcal{E}_0(M,m)$,

L'état $|\vec{n}\rangle_M$ obtenu par action de

$$\prod_{\vec{k}\in I} \frac{(b^{+}_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} |\vec{0}\rangle_M \qquad \left(\sum_{\vec{k}\in I} n_{\vec{k}} < +\infty\right)$$

a pour énergie $\sum_{\vec{k}\in I} \Omega_{\vec{k}}\, n_{\vec{k}} - \mathcal{E}_0(M,m)$

Si $d > 3$ on peut trouver pour tout $K > 0$ un sous ensemble I_K de I tel que

$$\sum_{\vec{k} \in I_K} E_0(\Omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}}) = \sum_{\vec{k}} \frac{(\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}} > K$$

et ça ne coute rien de suppose que $-\vec{k} \in I_K$ si $\vec{k} \in I_K$.

Si $$|\varphi_K\rangle \equiv \prod_{\vec{k} \in I_K} \left(\frac{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}{(\omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{k}})^2}\right)^{1/4} e^{\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \hat{a}^{+}_{\vec{k}} \hat{a}^{+}_{-\vec{k}}} |\bar{0}\rangle$$

alors $|\varphi_K\rangle$ est anihilé par $\hat{b}_{\vec{k}}$ $\vec{k} \in K$,

mais aussi par $\hat{a}_{\vec{k}}$ $\vec{k} \notin K$

Donc $\langle \varphi_K | \hat{H}^{(\vec{k})} | \varphi_K \rangle = 0$ $\vec{k} \notin K$ mais

$$\langle \varphi_K | \hat{H}^{(\vec{k})} | \varphi_K \rangle = -E_0(\Omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}}) \quad \vec{k} \in K.$$

Donc $$\langle \varphi_K | \hat{H} | \varphi_K \rangle = -\sum_{\vec{k} \in K} E_0(\Omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}}) < -K$$

et $\hat{H}$ n'est pas borné inferieurement

C.9 : On sait que pour $L \to \infty$

$$\sum_{\vec{k} \in I} f(\vec{k}) \to \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int d^d\vec{k}\, f(\vec{k}) \quad \text{si}$$

f est une fonction assez régulière. Pour $d < 3$ on a donc

$$\lim_{L \to \infty} -\frac{\mathcal{E}_0(M,m)}{L^d} = \frac{-1}{(2\pi)^d} \int d^d\vec{k}\, \frac{(\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_k}$$

C.10 : $d = 2$ Comme $\omega_{\vec{k}}$ et $\Omega_{\vec{k}}$ ne dépendent que de $|\vec{k}|$ on passe en coordonnées polaires on pose $k = |\vec{k}|$ et il vient

$$\lim_{L \to \infty} -\frac{\mathcal{E}_0(M,m)}{L^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\, 2\pi \int_0^\infty k\, dk\, \frac{\left(\sqrt{k^2+M^2} - \sqrt{k^2+m^2}\right)^2}{4\sqrt{k^2+m^2}}$$

Prenant k^2 comme variable d'intégration, il reste une intégrale élémentaire

$$\lim_{L \to \infty} -\frac{\mathcal{E}_0(M,m)}{L^2} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty ds\, \frac{\left(\sqrt{s+M^2} - \sqrt{s+m^2}\right)^2}{4\sqrt{s+m^2}}$$

$$= -\frac{1}{24\pi}\, \frac{c^4}{\hbar^2}\, (M-m)^2(2M+m)$$

car énergie = masse $\cdot\, c^2$ longueur $= \dfrac{\hbar}{\text{masse} \cdot c}$

$$\frac{\text{énergie}}{\text{longueur}^2} = \frac{(\text{masse})^3 c^4}{\hbar^2}$$