" Introduction à la TGC

2007 - 2008

B

B.1. $$S \equiv -m \int_{t_i}^{t_F} dt \sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|^2}$$

$t \to t(s)$ où s est un paramètre croissant ie.

$\frac{dt}{ds} > 0$ sur $[s_i; s_F]$

Par changement de variable

$$S = -m \int_{s_i}^{s_F} ds \, \frac{dt}{ds} \sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|^2}$$

$$= -m \int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|^2}_{\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2}}$$

$\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2$ par dérivation des fonctions composées.

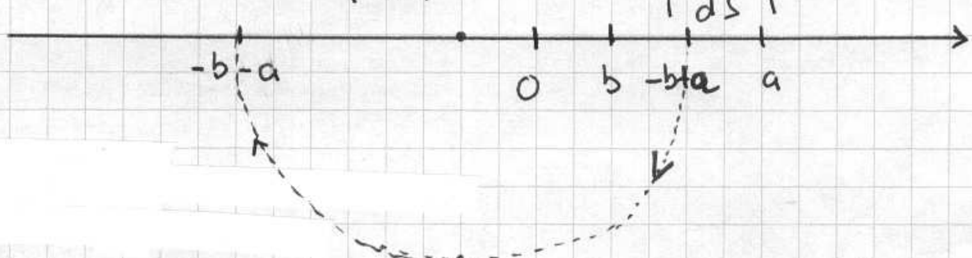
$$S = -m \int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2}$$

B.2. Pour une trajectoire du genre espace

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2 > 0$$

Fixons s_0 et posons $\left(\frac{dt}{ds}\right)^2(s_0) = a$ $\quad \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2(s_0) = b < a$

$a \to a e^{-2i\theta}$



θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$

Continuation $a-b \to a e^{-2i\theta} - b$

est donc $-\frac{\pi}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\sqrt{a-b} \rightarrow -i\sqrt{a+b}$$ dans la rotation de Wick

et

$$iS = -im\int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2} \rightarrow$$

$$-im\int_{s_i}^{s_F} ds\,(-i)\sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2} = -m\,L(\gamma)$$

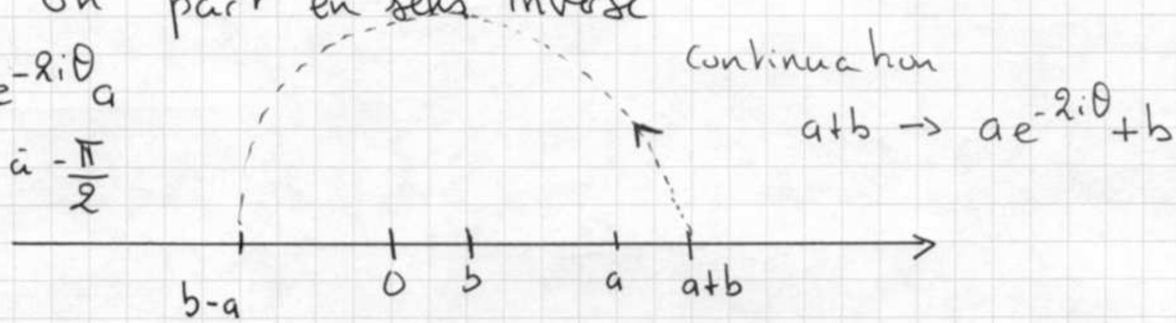
où $L(\gamma) = \int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2}$ est la longueur

euclidienne du chemin γ.

B.3 On part en sens inverse

$a \to e^{-2i\theta}a$

θ de 0 à $-\frac{\pi}{2}$



L'argument de la racine carrée $\sqrt{ae^{-2i\theta}+b}$ est donc

$\frac{\pi}{2}$ pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ donc

$$\sqrt{a+b} \rightarrow i\sqrt{a-b}$$ dans la rotation de Wick

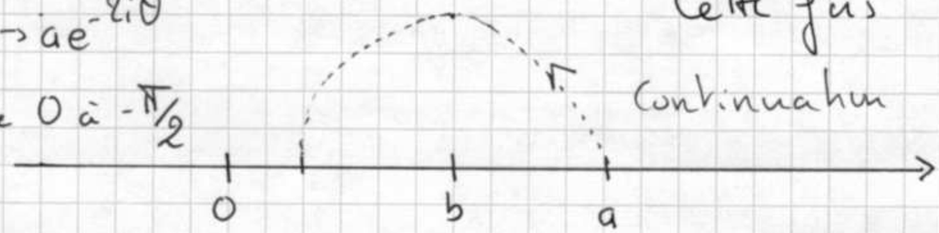
et $$-mL = -m\int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2} \rightarrow$$

$$-m\int_{s_i}^{s_F} ds\; i\sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2} = iS$$

On peut ensuite inverser pour un chemin de genre temps

$a \to a e^{-2i\theta}$ Cette fois $b > a$

θ de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ Continuation $a+b \to a e^{-2i\theta} + b$



L'argument de la racine carrée $\sqrt{a e^{-2i\theta} + b}$ est donc 0 pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ donc $\sqrt{a+b} \to \sqrt{b-a}$ dans la rotation de Wick, et

$$-mL \to -m \int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2 - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \quad \text{pour un}$$

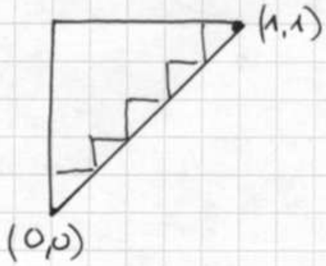
chemin de genre temps. et par continuation analytique depuis l'espace euclidien

$$e^{-mL(\gamma_{-\pi/2})} = e^{-m \int_{s_i}^{s_F} ds \sqrt{\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2 - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2}}$$

qui n'est plus de module 1 comme pour les chemins de genre espace, mais exponentiellement petit et réel.

B.5 Pour un chemin arbitraire, on n'a pas forcement $\frac{dt}{ds} \not> 0$, et on obtient des trajectoires qui remontent le temps.

C.1. En passant de $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{L}_d(a)$, l'invariance par rotation et l'invariance par translation continue sont brisée, il ne reste que "quelques" rotations discrètes et les translations discrète du réseau.



Tous les chemins de même point de départ et d'arrivée qui sont tels que x et y ne décroissent jamais ont la même longueur.

par exemple de $(0,0)$ à (1.1) si a est l'inverse d'un entier, le segment à pour longueur $\sqrt{2}$ et les meilleurs approximation réseau ont longueur 2 !

On ne gagne rien à prendre "a" petit!

C.2. Naïvement $\gamma = ma$.

C.3. Une configuration est un chemin de 0 à x fait d'arêtes successives du réseau, et l'énergie est le nombre de monomères donc la fonction de partition est $\sum_{\Gamma} e^{-\frac{1}{kT} n(\Gamma)}$ qui coïncide avec

$Z(x)$ pour $kT\gamma = 1$.

C.4. Dans ce cas, la fonction de partition s'obtient en ne sommant que sur les chemins dont le dernier pas va de $x-a\varepsilon$ à x, le poids d'un tel chemin,

est celui du chemin allant de 0 à $x-a\varepsilon$ multiplié par le poids du dernier pas, $e^{-\nu}$. La somme sur les chemins de 0 à $x-a\varepsilon$ reconstitue $Z(x-a\varepsilon)$ donc la fonction de partition cherchée est $Z(x-a\varepsilon)e^{-\nu}$.

<u>C.5.</u> On partitionne l'espace des chemins de 0 à x :

Un chemin est soit de longueur nulle (et alors il joint 0 à x seulement si $x=0$) soit de longueur au moins 1 et il arrive en x en venant d'un de ses voisins $x-a\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon \in D$.

La somme sur tous les chemins donne donc

$$\delta_{x,0} + \sum_{\varepsilon \in D} Z(x-a\varepsilon)e^{-\nu}$$ où le premier

terme est la contribution du chemin de longueur 0, et les autres termes sont la contribution des chemins dont la dernière arête joint $x-a\varepsilon$ à x, d'après la question C.4. Donc

$$Z(x) = \delta_{x,0} + \sum_{\varepsilon \in D} Z(x-a\varepsilon)e^{-\nu}$$

O peut se décrire comme la suite de ses positions x_m après m pas. Le $m^{ième}$ pas mène d'un site x_{m-1} à $x_m = x_{m-1} + a\,\varepsilon_m$ pour un certain $\varepsilon_m \in D$. Donc
$$\begin{cases} x_m = a(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m) & m \geq 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Quand chaque ε_m décrit librement D, pour $m = 1, \ldots, n$, on obtient tous les chemins Γ de n pas une fois et une seule. Le chemin arrive en x si et seulement si $a(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = x$ d'où

$$W_n(x) = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in D} \delta_{x,\, a(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)}$$

C.7. On en déduit

$$\sum_x W_n(x)\, e^{i k\cdot x} = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in D} e^{i k\cdot(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) a}$$
$$= \left(\sum_{\varepsilon_1 \in D} e^{i k\cdot \varepsilon_1 a}\right) \cdots \left(\sum_{\varepsilon_n \in D} e^{i k\cdot \varepsilon_n a}\right)$$
$$= \left(\sum_{\varepsilon \in D} e^{i k\cdot \varepsilon a}\right)^n$$

Les $\varepsilon \in D$ sont les vecteurs dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une, qui vaut ± 1. Donc

$$\sum_{\varepsilon \in D} e^{i k \varepsilon a} = 2\cos k_1 a + \cdots + 2\cos k_d a$$

Par transformée de Fourier inverse

$$W_n(x) = \int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{-i k \cdot x} \left(2(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a)\right)^n$$

<u>C. 8.</u> $\sum_x W_n(x)$ est simplement le nombre total de chemins de n pas, et à chaque pas on a $2d$ choix (choix d'un element de d)

donc $\sum_x W_n(x) = (2d)^n$

Comme $W_n(x)$ est positif on a

$$\sum_x Z(x) = \sum_{n,x} W_n(x) e^{-\nu n}$$

Le second membre vaut

$$\sum_n \sum_x W_n(x) e^{-\nu n} = \sum_n \left(2d e^{-\nu}\right)^n$$

Cette serie converge si et seulement si $2de^{-\nu} < 1$

ie $\nu > \nu_c = \log 2d$. Dans ce cas

$$\sum_x Z(x) = \frac{1}{1 - 2de^{-\nu}}$$

<u>C. 9.</u> $Z(x)$ est une somme de termes positifs donc si $\sum_x Z(x)$ converge, la somme definissant $Z(x)$ converge.

x

de $Z(x)$ peut dépasser une valeur fixée. Donc

pour tous les x sauf un nombre fini $Z(x) < \alpha$

En particulier $Z(x) \to 0$ pour $|x| \to +\infty$.

C.10. Pour $2de^{-\nu} < 1$ toutes les séries et intégrales manipulées sont absolument convergentes, donc on peut les permuter librement

et
$$Z(x) = \sum_n W_n(x) e^{-n\nu} = \sum_n \underbrace{\int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{ik\cdot x}}_{\to (2(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a))^n e^{-n\nu}}$$

$$Z(x) = \int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{ik\cdot x} \sum_n \left(2(\cos k_1 a + \cdots \cos k_d a)\right)^n e^{-n\nu}$$

$$Z(x) = \int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{ikx} \frac{1}{1 - 2e^{-\nu}(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a)}$$

$\boxed{D}$

D.1 : Pour $d = 1$ il vient

$$Z(x) = \delta_{x,0} + \left(Z(x-a) + Z(x+a)\right) e^{-\nu}$$

pour $x \in a\mathbb{Z}$.

Pour $x \neq 0$ il vient (vg $x > 0$)

$$C e^{-\mu x} = \left(C e^{-\mu(x-a)} + C e^{-\mu(x+a)} \right) e^{-\nu}$$

(vg $x < 0$)

$$C e^{\mu x} = \left(C e^{\mu(x-a)} + C e^{\mu(x+a)} \right) e^{-\nu}$$

Les deux cas donnent la même équation :
($C \neq 0$ car sinon l'équation pour $x=0$ n'est pas vérifiée)

$$1 = \left(e^{\mu a} + e^{-\mu a} \right) e^{-\nu}$$

Pour $x = 0$

$$C = 1 + 2 C e^{-\mu a} e^{-\nu}$$

Donc
$$\begin{cases} \nu = \log 2 \operatorname{ch} \mu a \\ C = \dfrac{1}{\operatorname{th} \mu a} \end{cases}$$

D.2. : ν fixé $\Longleftrightarrow$ μa fixé donc si $a \to 0$ à ν fixé $\mu \to +\infty$ et pour $|x|$ fixé $e^{-\mu|x|} \to 0$ donc $Z(x) \to 0$ sauf peut être à $x = 0$

$|x|$ croît de $\frac{1}{\mu}$ donc $\frac{1}{\mu}$ est l'échelle typique sur laquelle $Z(x)$ varie significativement

Si l'on veut une physique macroscopique il faut donc que μ reste fini quand $a \to 0$

Pour μ fini et $a \to 0$ on a

$$\nu = \log 2 \operatorname{ch} \mu a = \underbrace{\log 2}_{\nu_{cr} \text{ pour } d=1} + \log \operatorname{ch} \mu a \quad \text{d'où}$$

$$\nu - \nu_c \sim \frac{\mu^2 a^2}{2} \text{ quand } a \to 0 \ \mu \text{ fixé, ie}$$

$$\sqrt{2(\nu - \nu_c)} \sim \mu a$$

D.L. Dans la limite $a \to 0$ μ fixé on a

$$C \sim \frac{1}{\mu a} \quad \text{d'où}$$

$$Z(x) = \frac{2}{a} \frac{e^{-\mu|x|}}{2\mu} \quad \text{d'où}$$

$$G_1(x) = \frac{e^{-\mu|x|}}{2\mu}$$

L'équation pour Z est

$$Z(x) = \delta_{x,0} + e^{-\nu}\left[Z(x-a) + Z(x+a)\right]$$

$$e^{-\nu} = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \mu a} \quad \text{d'où}$$

$$\ldots \frac{\ldots}{2+\mu^2 a^2+\cdots}$$

c'est à dire $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\mu^2\right) G_1(x,\mu) \sim \frac{1}{a}\delta_{x,0}$

La maille du reseau est a et $\delta_{x,0}$ vaut 0 pour $x \neq 0$ et $\frac{1}{a}$ pour $x=0$. Donc quand $a \to 0$

$$\frac{1}{a}\delta_{x,0} \to \delta(x) \text{ la distribution de Dirac.}$$

Par exemple si $f(x)$ $x \in \mathbb{R}$ est assez lisse

$\int f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$ et la discretisation du membre de gauche comme une somme de Riemann.

$$\sum_{x \in L_1(a)} f(x) \underbrace{\frac{1}{a}\delta_{x,0}}_{\sim \delta(x)} \cdot \underbrace{a}_{\sim dx} \quad \text{donne aussi } f(0)$$

Donc $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\mu^2\right) G_1(x,\mu) = \delta(x)$.

Enfin $$Z(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{(2\pi/a)}\, e^{ikx} \frac{1}{1-\frac{\cos ka}{\operatorname{ch} \mu a}}$$

et pour $a \to 0$

$$Z(x) \sim \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\frac{1}{k^2+\mu^2}$$

$$\int_{-\infty} \frac{\quad}{2\pi} \qquad \frac{\quad}{k^2+\mu^2}$$

D.5 On reconnait le propagateur euclidien en une dimension, et μ est la masse.

D.6.
$$-a\,\frac{d\log Z(x)}{d\nu} = \frac{1}{Z(x)} \sum_{\Gamma} a n(\Gamma)\, e^{-\nu n(\Gamma)}$$

$\dfrac{e^{-\nu n(\Gamma)}}{Z(x)}$ est la probabilité du chemin

Γ de 0 à x et $a n(\Gamma)$ est sa longueur

donc $-a\,\dfrac{d\log Z(x)}{d\nu}$ est la longueur moyenne

des chemins de 0 à x.

De $e^{\nu} = 2\operatorname{ch}\mu a$ on déduit

$$e^{\nu} d\nu = 2a\operatorname{sh}\mu a \; d\mu \quad \text{d'où} \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{a\operatorname{th}\mu a}$$

$$\log Z(x) = \log C - \mu|x| \quad \text{et}$$

$$\bar{L} = -a\left(\frac{d\log C}{d\mu} - |x|\right)\frac{d\mu}{d\nu}$$

$$\bar{L} = -a\left(-\frac{a}{\operatorname{ch}\mu a\operatorname{sh}\mu a} - |x|\right)\frac{1}{a\operatorname{th}\mu a}$$

$$\underline{\bar{L} = \frac{a}{\operatorname{sh}^2\mu a} + \frac{|x|}{\operatorname{th}\mu a}}$$

D.4. Pour $a \to 0$ μ fixe

$$\bar{L} \sim \frac{1}{a\mu^2}\left(1+\mu|x|\right)$$

Cette longueur diverge comme $\frac{1}{a}$, et le nombre de pas moyens comme $\frac{1}{a^2}$ quand $a \to 0$ μ fixé. Donc les chemins qui contribuent à $Z(x)$ pour avoir une physique non triviale à distance macroscopique quand la maille du réseau tend vers 0 ont une longueur qui diverge comme $\frac{1}{a}$ et sont très différent des chemins réguliers décrits par les solutions des équations classiques du mouvement.

E

E.1.

$$Z(x) = \int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d}\, e^{ik\cdot x}\, \underbrace{\frac{1}{1-2e^{-\nu}(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a)}}$$

pour ν fixé $> \nu_c$ l'integrand tend vers $\frac{1}{1-2de^{-\nu}}$ et le domaine
$a \to 0$

d'integration vers $\mathbb{R}^d$ d'où

$$Z(x) \sim a^d \int\!\!\cdots\!\!\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{1-2de^{-\nu}} = \frac{a^d}{1-2de^{-\nu}} \delta^d(x)$$

E.2. D'après la formule d'Euler

$$\left(2\left(\cos ak_1 + \cdots + \cos ak_d\right)\right)^{s/a^2} \sim (2d)^{s/a^2}\left(1-\frac{a^2}{2d}\left(k_1^2+\cdots+k_d^2\right)\right)^{s/a^2}$$

$$\sim (2d)^{s/a^2} e^{-s\frac{|k|^2}{2d}}$$

Mais $W_{s/a^2}(x) = \int\!\cdots\!\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{ikx} \left(2\left(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a\right)\right)^{s/a^2}$

En insérant la formule précédente et en faisant $a \to 0$ on obtient

$$W_{s/a^2}(x) \sim a^d (2d)^{s/a^2} \int\!\cdots\!\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} e^{-s\frac{|k|^2}{2d}}$$

L'intégrale multiple est gaussienne et il vient

$$W_{s/a^2}(x) \sim a^d (2d)^{s/a^2} \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} e^{-d\frac{|x|^2}{2s}}$$

E.3. $Z(x) = \sum_n W_n(x) e^{-\nu n}$

$$= \sum_{s \in a^2\mathbb{N}} W_{s/a^2}(x) e^{-\nu s/a^2}$$

Posant $\delta s = a^2$ (écart entre deux valeurs successives de s), il vient

$$s \in a^2\mathbb{N} \quad a^2 \quad s/a^2$$

Pour $a \to 0$, il vient

$$Z(x) \sim a^{d-2} \sum_{s \in a^2\mathbb{N}} (2de^{-\nu})^{s/a^2} \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2s}} \delta s$$

si $2de^{-\nu} < 1$ est fixé et $a \to 0$ tous les termes sont "écrasés" et $Z(x)$ est petit pour tout $x \neq 0$.

E.4. En revanche si l'on ajuste $2de^{-\nu} = 1 + O(a^2)$ on obtient une somme de Riemann

Posant $\nu(a) = \log 2d + \frac{(\mu a)^2}{2d} + o(a^2)$ il vient $2de^{-\nu(a)} \sim 1 - \frac{\mu^2 a^2}{2d}$ et

$$Z(x) \sim a^{d-2} \sum_{s \in a^2\mathbb{N}} \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} e^{-\frac{d}{2s}|x|^2} e^{-\frac{s}{2d}\mu^2} \delta s$$

$$\sim a^{d-2} \int_0^\infty \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} e^{-\frac{d}{2s}|x|^2} e^{-\frac{s}{2d}\mu^2} ds$$

s/a est la longueur des chemins

E.5. Cette formule ne fait intervenir x que par $|x|^2$ donc à la limite continue la symétrie par rotation est rétablie

E.6. C'est simplement un changement de variable pour simplifier un peu l'expression.

E.7. $$Z(x) = \int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{ik\cdot x} \frac{1}{1 - 2e^{-\nu}(\cos k_1 a + \cdots \cos k_d a)}$$

si $\nu = \nu(a)$ est tel que

$$2d e^{-\nu} \sim 1 - \frac{\mu^2 a^2}{2d} \quad \text{et } a \to 0$$

$$1 - 2e^{-\nu}(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a) \sim \frac{\mu^2 a^2}{2d} + \frac{1}{d}\left(\frac{k_1^2 a^2}{2} + \cdots \frac{k_d^2 a^2}{2}\right)$$
$$\sim \frac{a^2}{2d}\left(\mu^2 + |k|^2\right)$$

En prenant aussi la limite dans le domaine d'intégration il vient

$$Z(x) \sim 2d\, a^{d-2} \int \cdots \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{|k|^2 + \mu^2}$$

D'après la question E.6. qui définit $G_d(|x|, \mu)$, il vient $$G_d(|x|, \mu) = \int \cdots \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{|k|^2 + \mu^2}$$
qui est le propagateur euclidien en dimension d. pour la masse μ.

de l'équation discrète

$$Z(x) = \delta_{x,0} + e^{-\gamma} \sum_{\varepsilon \in D} Z(x - a\varepsilon)$$

on passe à la limite continue

$$\sum_{\varepsilon \in D} Z(x - a\varepsilon) \simeq 2d\, Z(x) + a^2 \Delta Z(x) + o(a^2)$$

par un développement limité à l'ordre 2 en a

D'autre par $2d\, e^{-\gamma} \sim 1 - \frac{\mu^2 a^2}{2d}$ d'où

l'on déduit $(-\Delta + \mu^2)\, G_d(|x|, \mu) \sim \frac{1}{a^d} \delta_{x,0}$

Le second membre tend vers $\delta^d(x)$ quand $a \to 0$

par un argument identique à celui donné pour $d = 1$.

Finalement l'équation discrète donne bien la limite continue attendue, i.e l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le propagateur euclidien $(-\Delta + \mu^2)\, G_d(|x|, \mu) = \delta^d(x)$

E.8.

$$\frac{e^{\gamma} - 2(\cos k_1 a + \cdots + \cos k_d a)}{a^2} = |k|^2 + \mu^2 + \frac{a^2}{12}(k_1^4 + \cdots + k_d^4)$$

à des termes d'ordre a^4 près.

$|k|^2 \lesssim \mu^2$ $\qquad \frac{a^2}{12}\left(k_1^4 + \dots + k_d^4\right) \lesssim 10^{-3}\left(|k|^2 + \mu^2\right)$

pour $|k|^2$ donné, le membre de gauche est maximal quand une seule composante de k est non nulle, et il vaut alors $\frac{da^2}{12}|k|^4$. Si l'inégalité est vraie pour $|k|^2 = \mu^2$ elle l'est pour $|k|^2 \leq \mu^2$

donc on veut $\quad \frac{da^2}{12}\mu^4 \lesssim 10^{-3} \cdot 2\mu^2$

Faisant $d=4$ il vient

$$a^2\mu^2 \lesssim 6 \cdot 10^{-3} \quad \text{ou très}$$

grossièrement $\quad \mu a \lesssim 10^{-1}$

$$\nu - \nu_{cr} \sim \frac{\mu^2 a^2}{2d} \quad \text{d'où}$$

$$\nu - \nu_{cr} \lesssim 10^{-3}$$

<u>E.9</u> et <u>E.10</u> : le raisonnement est identique à ceux des questions B.2, B.3 et B.4