Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°6 : Développement en échelles multiples

Sylvain Nascimbène

1 Un oscillateur non linéaire

On étudie le mouvement d'une masse ponctuelle maintenue en position par un ressort de raideur k et se déplaçant le long d'une droite.

1. Écrire l'équation du mouvement de la masse.
2. On suppose que la constante de raideur du ressort dépend de l'écart à la position d'équilibre sous la forme (exotique) $k = k_0(1 + \mu x^4)$. Montrer que ce problème est équivalent à celui du mouvement d'une particule dans un puits de potentiel $V(x)$ que l'on précisera.
3. En se limitant aux mouvements de petites amplitudes, nous allons étudier l'effet de l'écart à l'harmonicité de cet oscillateur sur sa fréquence propre. Suivant le signe de μ, le puits de potentiel est-il plus ou moins raide que le potentiel harmonique ?
4. On veut faire un développement pour des oscillations de petites amplitudes et on note $x = \epsilon^{1/4} X$.

   a – Par un changement d'échelle de temps, écrire une équation dans laquelle k_0/m n'apparaisse plus.

   b – Développer X sous la forme d'une série en ϵ. Introduire une seconde échelle de temps et effectuer un développement en échelles multiples jusqu'au premier ordre pertinent.

   c – Quel est le changement de fréquence causé par l'anharmonicité ? Dans quel cas la fréquence augmente-t-elle ? Comparer à un calcul direct du changement de fréquence causé par l'anharmonicité.

2 Le pendule paramétrique

Une masse m est fixée à l'extrémité d'un fil de longueur l et oscille dans un plan vertical.

1. Quelle est l'équation du mouvement de cette masse ?
2. On déplace le point d'attache du fil en lui communiquant une accélération $A \cos \Omega t$. Dans le référentiel lié au point d'attache, montrer que cela revient à faire intervenir une gravité effective modulée à la pulsation Ω.

   Quelle est la position d'équilibre du pendule en l'absence de forçage ? Qualitativement, comprenez-vous pourquoi, si $\Omega = 2\sqrt{g/l}$, cette position d'équilibre peut être déstabilisée ?
3. Nous allons étudier une variante de l'équation précédente :

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 (1 + f \cos \Omega t) x - \omega^2 x^3 = 0 \tag{1}$$

   Quelle est l'origine des nouveaux termes ?
4. Nous nous limitons au cas de faible dissipation (ν petit), près d'une résonance $\Omega = 2\omega_0 + \delta$ avec δ petit. On écrit donc $\delta = \epsilon \Delta$ et $\nu = \epsilon \Gamma$. Comme la dissipation est faible, il faut un forçage très petit pour déstabiliser la solution $x = 0$ et on écrit dont $f = \epsilon F$.

a – Introduire un temps de croissance lent pour l'amplitude d'oscillation et développer la solution en série de ϵ sous la forme :

$$x = \sqrt{\epsilon}\Big(u_0(t,T) + \epsilon u_1(t,T) + \dots\Big) \tag{2}$$

Montrer qu'à l'ordre 0, on retrouve l'équation du pendule simple.

b – Montrer que l'ordre suivant permet d'écrire une équation pour l'amplitude $A(T)$ de ce pendule. On utilisera la relation $\delta t = \Delta T$ où T est le temps de croissance lent.

c – Faire le changement de variable $A = Be^{i(\Delta/2)T}$ et écrire une équation pour le module r et la phase θ de B.

d – On cherche les solutions stationnaires vérifiant $\partial_T r = \partial_T \theta = 0$. À quelle condition a-t-on des solutions avec r non nul ? Il s'agit de la condition d'instabilité. Montrer que les comportements sont différents suivant le signe de δ. Comment l'amplitude des oscillations dépend de f dans le cas où δ est positif ?