Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°4 : Quelques propriétés des écoulements turbulents

Sylvain Nascimbène

1 Force et puissance dissipée

On met en mouvement un objet de taille L à vitesse v dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν. Le fluide exerce une force F sur le liquide.

1. Que peut-on dire par analyse dimensionnelle de la loi qui relie la force aux paramètres du problème ? Montrer qu'on peut utiliser un nombre sans dimension qui compare deux temps : un temps construit sans la viscosité (c'est le temps inertiel) et un temps construit sans la vitesse (c'est le temps diffusif).
2. La loi dite de Stokes donne la force qui s'exerce sur une sphère de rayon R se déplaçant à vitesse v. Elle s'écrit $F = 6\pi\rho\nu Rv$. Quelle doit être la forme de la fonction inconnue du nombre sans dimension pour obtenir cette loi ?
3. Pour de petites vitesses (plus exactement pour de petits nombres de Reynolds), la force est linéaire en viscosité. Comment s'exprime-t-elle ?
4. Pour de hauts Reynolds, la force est indépendante de ν. Quelle forme a-t-elle ?
5. Le résultat précédent peut aussi s'interpréter en utilisant le calcul du 3- et en y remplaçant la viscosité cinématique par une viscosité effective de l'écoulement. Quelle est la forme de cette viscosité effective dite viscosité turbulente ?
6. Quelle est la puissance mécanique transmise par l'objet au fluide ? L'écoulement a lieu sur une distance caractéristique L. Comment s'exprime la puissance dissipée par unité de masse dans l'écoulement, notée ϵ ? Evaluer cette puissance ainsi que le nombre de Reynolds pour un cumulus, un océan, un sportif, un bateau d'aviron. On donne, pour l'air $\nu = 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, pour l'eau $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

2 Ecriture des équations

Quelle est l'équation qui régit l'évolution du champ de vitesse d'un fluide newtonien dans un écoulement incompressible ?

On suppose que l'écoulement est créé entre deux plans espacés de L et dont l'un est mis en mouvement à la vitesse V. Ecrire l'équation d'évolution du champ de vitesse de façon adimensionée. Quel nombre sans dimension apparaît ?

3 Modèle de Kolmogorov 41 de la turbulence

Dans un écoulement turbulent, la vitesse fluctue spatialement et temporellement. On la décompose alors en une vitesse fluctuante et de moyenne nulle qui se superpose à la vitesse moyenne. De très nombreux travaux visent à étudier la partie fluctuante du champ de vitesse, que l'on notera $\vec{v}(\vec{r})$. La transformée de Fourier du champ de vitesse fluctuant est définie par :

$$\vec{v}(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int \hat{\vec{v}}(\vec{k}) e^{i\vec{k}.\vec{r}} d\vec{k}$$

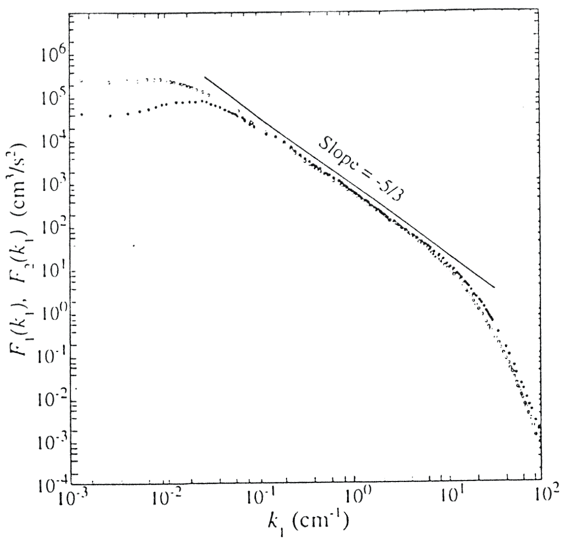
L'énergie cinétique totale de $\vec{v}(\vec{r})$ s'écrit

$$E = \rho L^3 \int E(k) dk$$

où $E(k)dk$ correspond à l'énergie cinétique des composantes dans l'espace de Fourier de vecteur d'onde de norme comprise entre k et $k + dk$. Dans un écoulement turbulent le champ de vitesse varie sur une très large gamme d'échelles spatiales, ainsi $E(k)$ nous renseigne sur l'énergie des fluctuations de vitesse sur une taille de l'ordre de $2\pi/k$.

A l'aide de quelques hypothèses dimensionnelles simples, nous allons retrouver divers résultats, qui sont plus ou moins prouvés, et souvent très bien vérifiés pour une turbulence dite homogène et isotrope. (C'est-à-dire que les propriétés du champ de vitesse ne dépendent ni de la direction ni la position).

1. On injecte de l'énergie (par exemple avec un moteur entrainant une hélice) et la puissance injectée par unité de masse est, en régime stationnaire, égale à la puissance dissipée par unité de masse dans l'écoulement ϵ. L'injection d'énergie a lieu sur une certaine taille caractéristique L. Quel est le vecteur d'onde correspondant (on appelle cette taille l'échelle intégrale) ?
2. La viscosité dissipe fortement les fluctuations de vitesse à très petite échelle, c'est-à-dire sur des tailles inférieures à la taille caractéristique η_k construite à partir de la viscosité cinématique ν et de ϵ (on appelle cette taille l'échelle dissipative). A quel vecteur d'onde cela correspond-il ?
3. Quelle est la dimension de $E(k)$? Entre les vecteurs d'onde intégral et dissipatif, le spectre d'énergie dépend de ϵ, de k mais ne dépend ni de l'échelle intégrale ni de la viscosité : c'est ce que l'on appelle la cascade d'énergie, ou le régime inertiel. Prédire dimensionnellement l'expression de $E(k)$ dans ce régime.
4. La courbe expérimentale suivante représente des valeurs mesurées de $E(k)$. Identifier la longueur d'injection, la longueur de dissipation, et la cascade d'énergie.



5. Dans la limite de haut Reynolds, comment le rapport entre les vecteurs d'onde intégral et dissipatif varie-t-il avec le Reynolds ? Pour augmenter la plage sur laquelle on teste la loi précédente, on veut augmenter le rapport entre ces échelles.

   Supposons que l'on veuille agrandir l'expérience en utilisant un moteur dont la puissance est fixée. Comment la vitesse de l'écoulement s'exprime-t-elle en fonction de la puissance du moteur et de la taille de l'expérience ? Comment le rapport entre les échelles croît-il avec le volume de l'expérience ?

   Même question si l'on augmente la puissance du moteur en gardant le volume de l'expérience fixé.