

Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°3 : Fermions dégénérés

Sylvain Nascimbène

On s'intéresse au comportement physique de quelques systèmes de fermions dans le régime de dégénérescence quantique : le gaz électronique dans les métaux, les étoiles à neutrons et les gaz d'atomes fermioniques ultrafroids. Bien que leurs caractéristiques physiques (densité, température) diffèrent de plusieurs ordres de grandeur ces systèmes présentent de fortes analogies.

1 Gaz d'électrons dans les métaux

On s'intéresse dans cette partie à diverses échelles d'énergie d'un gaz d'électrons dans un métal.

1. Considérons le gaz d'électrons comme un gaz parfait à l'équilibre thermique, à une température T . Montrer que l'on peut former une échelle de température T_F à partir des constantes fondamentales k_B , \hbar , de la masse de l'électron m_e et de la densité électronique n .
2. Calculer la valeur de la température de Fermi d'un gaz d'électrons dans un métal usuel.
3. A quoi correspondent les régimes $T \ll T_F$ et $T \gg T_F$?
4. Calculer l'ordre de grandeur de l'interaction électrostatique V_e entre deux électrons séparés d'une distance $n^{-1/3}$.
5. Pourquoi est-ce que le gaz d'électrons dans les métaux est assez bien décrit comme un gaz de fermions en interaction faible ?
6. Le phénomène de supraconductivité est basé sur l'interaction attractive entre électrons médiée par les phonons du réseau ionique. On prendra pour valeur typique de cette interaction la valeur $V = -k_B \times 4000$ K. En utilisant le théorème II, montrer que la température critique de superfluidité s'exprime comme

$$T_c = T_F f(V/k_B T_F),$$

où f est une fonction inconnue.

7. La supraconductivité est en général observée pour des températures de l'ordre de 1 K. Proposer une expression pour la fonction f .

2 Etoiles à neutrons

Les étoiles à neutrons sont formées suite à l'effondrement gravitationnel des naines blanches dont la masse dépasse une valeur critique M_0 .

1. La notion de masse critique a-t-elle un sens pour un gaz électronique non relativiste ? Calculer le rayon d'équilibre d'une naine blanche dans la limite non relativiste. On écrira l'équilibre hydrostatique entre la pression de Fermi électronique et la force de gravitation.
2. Comment s'écrit la pression de Fermi d'un gaz de fermions ultra-relativiste ? On remarquera que la densité d'états d'un gaz ultra-relativiste de N particules dans un volume V est du même ordre que celle d'un oscillateur harmonique de fréquence $\omega = c/V^{1/3}$, pour lequel l'énergie de Fermi vaut $E_F \sim \hbar\omega N^{1/3}$.

3. On donne l'expression de la pression de Fermi au second ordre en c/v_F :

$$P_F \sim \hbar c n^{4/3} \left(1 - \frac{c^2}{v_F^2} \right).$$

Calculer le rayon d'équilibre d'une naine blanche dont les électrons sont ultra-relativistes. On introduira un rayon et une masse caractéristiques par analyse dimensionnelle.

4. Estimer la masse critique au delà de laquelle une naine blanche s'effondre en une étoile à neutrons.
5. Estimer la densité moyenne d'une étoile à neutrons.
6. La température moyenne d'une étoile à neutrons est de l'ordre de 10^7 K. Est-ce que les neutrons forment un système de fermions dégénérés ?

3 Gaz d'atomes ultrafroids

La physique des ensembles de fermions dégénérés peut être étudiée en laboratoire sur des gaz d'atomes ultrafroids. On prend comme exemple un ensemble typique de $N = 10^5$ atomes fermioniques de ${}^6\text{Li}$ piégés dans une pince optique.

Le piégeage des atomes par une pince optique repose sur l'énergie potentielle d'un atome polarisable dans un champ laser de champ électrique E . Le potentiel de piégeage est donné par l'expression

$$U(\mathbf{r}) = -\alpha E(\mathbf{r})^2.$$

1. Donner l'expression de la polarisabilité α d'un atome par analyse dimensionnelle, en fonction de la charge e de l'électron, de sa masse m_e , et de la fréquence de transition atomique ω_0 .
2. On considèrera une pince optique de puissance $P = 1$ W et focalisée sur une taille $w = 10 \mu\text{m}$. Calculer la profondeur U_0 de la pince optique.
3. Donner par analyse dimensionnelle l'expression de la fréquence ω_1 des oscillations d'un atome au fond de la pince optique, en fonction de U_0 , w et de la masse m de l'atome. Calculer l'ordre de grandeur de la fréquence de piégeage.
4. Calculer la température de Fermi correspondante et commenter le résultat.