

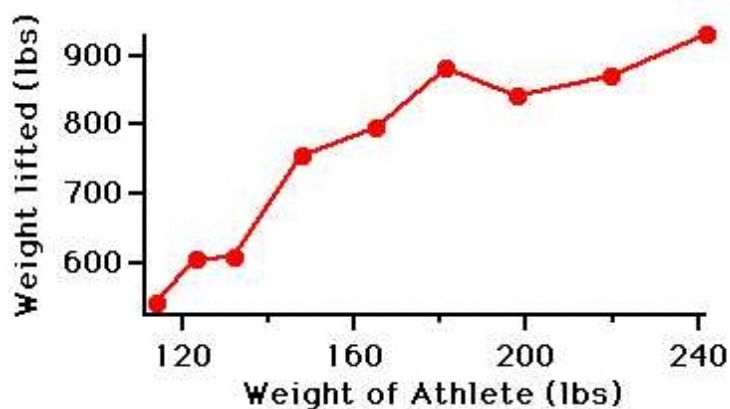
Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°1 : Exemples sportifs

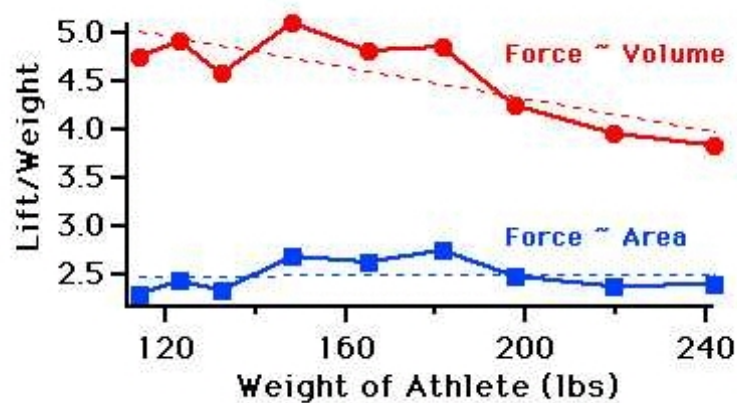
Sylvain NASCIMBÈNE

1 Force d'un athlète

On s'intéresse à la variation de la force d'un athlète selon sa masse. La courbe ci-dessous présente les records du monde d'haltérophilie en fonction de la masse de l'athlète.



1. On note L la taille caractéristique de l'athlète. Supposons que la force est proportionnelle au volume de l'athlète. Comment dépend-elle de sa masse ?
2. Supposons que la force est proportionnelle à la surface perpendiculairement à laquelle elle est dirigée (donc à la section de l'athlète). Comment dépend-elle de sa masse ?
3. Dans la figure ci-dessous, on a représenté une grandeur proportionnelle à la force divisée par la masse à la puissance α avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2/3$.



Quel est l'exposant associé à chacune des courbes ? Suivant ces mesures, comment la force d'un athlète dépend-elle de sa taille ?

2 Hauteur maximale d'un saut

On s'intéresse à la hauteur maximale qu'un animal peut sauter. On note L la taille caractéristique de l'animal considéré. La puissance que leurs muscles est capable de délivrer est supposée proportionnelle au cube de cette taille.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la hauteur que peut sauter un homme, un cheval, un chat ?
2. On modélise un muscle comme une chaîne de maillons élémentaires de longueur δ . Lorsque le muscle se contracte, les maillons se contractent simultanément d'une longueur δ_r en un temps t_0 . Comment la vitesse de contraction du muscle dépend-elle de sa longueur ?
3. En déduire la dépendance de la force que peut exercer un muscle en fonction de sa longueur. Comment l'accélération que peut produire un animal dépend-elle de sa taille ? Déduire que l'on a intérêt à être petit dans les sports où de fortes accélérations doivent être produites.
4. Qu'obtient par analyse dimensionnelle si l'on suppose que la force maximale que peut produire un athlète est fixée par sa taille L , le temps de contraction t_0 du muscle et la puissance du muscle par unité de volume p_v ?
5. Pour atteindre sa vitesse maximale, l'animal doit effectuer un nombre N_0 de foulées (environ une dizaine, quelle que soit l'espèce). Comment cette distance d'accélération dépend-elle de la taille de l'animal ? En déduire la dépendance de la hauteur maximale d'un saut en fonction de la taille de l'animal.

3 Vitesse d'un bateau à rames

On s'intéresse à la vitesse d'un bateau d'aviron, et, plus précisément à comment celle-ci dépend du nombre de rameurs n .

Chaque rameur ajoute au bateau une masse m et peut fournir une puissance p_0 . On note L la taille caractéristique du bateau. Changer le nombre de rameur impose de changer toutes les longueurs du bateau comme cette taille caractéristique.

1. Comment le volume immergé dépend-il du nombre de rameurs ? La taille caractéristique du bateau est la racine cubique de ce volume. Comment dépend-elle du nombre de rameurs ?
2. On verra ultérieurement que pour maintenir une vitesse constante v , la force qui doit être appliquée (et qui équilibre les forces de frottement) dépend de la masse volumique du fluide ρ , de la vitesse v et de la taille du bateau L . Comment s'exprime cette force ?
3. La vitesse maximale est atteinte quand la puissance fournie par les rameurs est égale à la puissance de la force de frottement calculée précédemment. Comment la vitesse maximale dépend-elle du nombre de rameurs ? Comment le temps de parcours sur une distance D en dépend-il ?
4. Que pouvait-on dire a priori par analyse dimensionnelle ?

4 Stratégie optimale de course

On veut comprendre quelle est la stratégie la plus efficace pour courir. En d'autres mots, comment gérer son effort pour parcourir une distance D fixée en un temps T le plus bref possible.

On suppose que le coureur contrôle la force qu'il exerce pour accélérer et que sa vitesse est régie par :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = f(t) \quad (1)$$

où v/τ modélise l'effet des divers frottements. Par ailleurs l'énergie par unité de masse que peuvent utiliser les muscles vérifie :

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - f(t)v(t) \quad (2)$$

où σ est la quantité d'énergie que le corps peut fournir aux muscles par unité de temps et par unité de masse. Au départ de la course, l'énergie disponible est E_0

1. Quelle est la vitesse initiale ? Comment D , T et v sont-ils reliés ?
2. On suppose que la force que peut exercer un coureur est limitée par une valeur maximale F . Par ailleurs son énergie doit rester positive. Que peut-on dire par analyse dimensionnelle de la dépendance de T avec D ?

On va essayer de déterminer l'expression de T pour certaines valeurs limites des paramètres.

3. Cas des distances très courtes : quels paramètres ne jouent pas ? Que peut-on alors dire par analyse dimensionnelle ?
4. Que peut-on dire par analyse dimensionnelle pour des distances plus longues mais pour lesquelles l'équation concernant l'énergie n'intervient pas non plus ? Que trouve-t-on dans cette limite pour des temps très longs devant τ ?
5. Faire le calcul pour des distances courtes. À partir de quelle distance D_c n'est-on plus dans ce régime ?
6. Pour des distances plus longues, le calcul est plus difficile. La stratégie optimale consiste à accélérer à fond puis maintenir une vitesse constante ce qui implique de ralentir sur la dernière partie de la course. On trace le temps prédit par ce modèle en fonction de la distance de course. Les points correspondent aux différents records du monde. Les paramètres choisis pour le modèle sont :

$$\begin{aligned} E_0 &= 575 \text{ cal/kg} \\ \sigma &= 9,93 \text{ cal/kg/s} \\ F &= 12,2 \text{ m/s}^2 \\ \tau &= 0,892 \text{ s} \end{aligned}$$

On rappelle qu'une calorie vaut 4,18 joules. Quelles parties de la courbe ont été comprises dans les questions précédentes ? Que vaut D_c ?

7. Pour des courses très longues, supposons que le coureur prenne un rythme de course constant (ce n'est pas, d'après le modèle de la stratégie la plus efficace). Calculer alors par analyse dimensionnelle la durée de la course en fonction de D . Estimer le temps du record du monde de marathon.
8. Quelles sont les limites du modèle ?

