

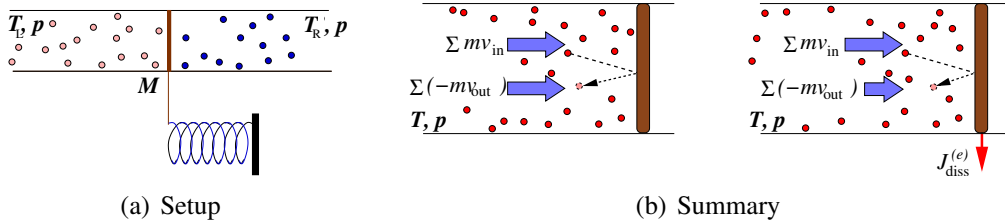
ORDRES DE GRANDEUR

Mercredi 30 mai 2012, 14h-17h

Durée de l'épreuve : 3 heures. (Salle L380 (=T15))
 Documents manuscrits autorisés. Téléphone portable, tablette, etc. tous interdits.
 Chaque partie doit être rédigée sur des feuilles séparées.
 (N'oubliez pas votre nom/numéro.)
 De nombreuses questions sont posées de façon plus ou moins indépendamment.
 Le rattrapage aura lieu début juillet. Si besoin autrement pour Magistère de P7, me contacter ¹.

1 Cinétique de gaz et Mouvement d'un objet "Brownien"

1. Description de montage :



On considère le montage comme montré sur le schéma 1(a).

(i) paroi mobile : Une paroi (la barre épaisse verticale) de masse M et de surface S de chaque côté est insérée dans un cylindre infiniment long et la paroi peut se déplacer horizontalement, selon l'axe x , sans aucun frottement de la part du cylindre. Cette paroi mobile est, cependant, piégée par le potentiel $U(X) = K \frac{X^2}{2}$, où $x = X$ est la position de la paroi mobile et $K(> 0)$ est la raideur de ressort. Cette paroi sépare donc deux cylindres semi-infinis, à gauche (L) et à droite (R).

(ii) gaz : Dans chaque cylindre semi-infini, le gaz parfait de masse de particule m est confiné. La température du gaz est préparée d'être à T_L et à T_R , respectivement, dans chaque cylindre. Les densités du gaz, ρ_L et ρ_R , sont ajustées telles que la pression du gaz sont les mêmes, étant p dans les deux cylindre. ² On suppose que $m \ll M$.

(iii) collision : Il n'y a pas de collision entre les particules du gaz. Les particules du gaz peuvent subir des collisions élastiques avec la paroi mobile. Lors d'une telle collision, la particule de gaz percutante change la composante de sa vitesse selon l'axe x , alors que les composantes perpendiculaires à l'axe x ne seront pas changées. La vitesse de la paroi mobile doit aussi changée lors de collision de

1. ken.sekimoto@espci.fr
 2. C'est à dire, $p = \rho_L k_B T_L = \rho_R k_B T_R$.

telle façon que la loi de conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement totale soient vérifiées.

Pour justement confirmer ; si la paroi verticale était immobilisée, la force moyennée dans le temps sur la surface L de la paroi et celle sur la surface R seraient, respectivement, de $+pS$ dans la direction $+x$ et de $-pS$, avec n'importe quelles températures, T_L et T_R . Dorénavant, on considère *seulement* la composante x de la vitesse et de la force.

2. Hypothèses sur le mouvement aléatoire de paroi mobile :

Due aux collisions de particules légères du gaz sur les deux côtés, la paroi mobile subit apparemment un mouvement aléatoire. On supposera que, tant que $m \ll M$ et $|T_L - T_R|/T_L + T_R \ll 1$ sont vérifiées, ce mouvement aléatoire réalise approximativement la distribution de Maxwell avec une température, T_{kin} .³ Il est raisonnable de s'attendre que T_{kin} se trouve entre T_L et T_R .

3. Vitesse thermique [moyenne], fréquence de collision, et transfert de quantité de mouvement :

Q.A1) En utilisant l'analyse dimensionnelle (DA), déterminer la vitesse typique de particule du gaz à côté gauche, $v_{th,L}$, en terme de m et $k_B T_L$. Mettre le facteur numérique égal à 1, dans l'esprit de la loi de equi-partition. (On introduira $v_{th,R}$, de même façon.)

Q.A2) En utilisant DA, déterminer la fréquence (taux d'occurrence) de collision des particules sur la surface gauche (L) de la paroi mobile, $f_{coll,L}$ en terme de S , $v_{th,L}$ et $\rho_L (= p/k_B T_L)$ à un facteur numérique près. Mettre ce facteur numérique égal à $\frac{1}{2}$ dans l'esprit que la moitié des particules vont vers la droite. (Indice : on peut s'attendre la propriété extensive, $f_{coll,L} \propto S$.) On va introduire $f_{coll,R}$, de la même façon.

Dans le cas où la paroi est immobilisée d'une manière ou d'une autre, la force moyennée dans le temps sur la surface gauche (L) doit être obtenue comme le taux de transfert de quantité de mouvement sur la paroi par le gaz à côté gauche.

Q.A3) Vérifier, avec votre $v_{th,L}$ et $f_{coll,L}$, que la force moyennée dans le temps est de pS , comme prévu.

(Indice : Typiquement, une particule dirigée vers la droite percutant la paroi apporte la quantité de mouvement, $mv_{th,L}$, et est rejetée avec la quantité de mouvement, $-mv_{th,L}$.)

Q.A3bis) De la même façon trouver que la force moyennée sur la surface à droite est de $-pS$.

4. Coefficients de frottement :

Pour le moment oublions le potentiel $U(X)$ sur le schéma 1(a).

On va trouver les coefficients de frottement pour la paroi mobile vis-à-vis du gaz à gauche, γ_L , et contre le gaz à droite, γ_R . Ils sont définis tels que, lorsque la paroi se déplace avec la vitesse V , la force moyennée dans le temps F_L sur la surface à gauche de la paroi soit $F_L = pS - \gamma_L V + O(V^2)$ et celle sur la surface à droite de la paroi F_R soit $F_R = (-pS) - \gamma_R V + O(V^2)$.

3. C'est à dire, la densité de probabilité pour la vitesse V obeit $\sqrt{\frac{M}{2\pi k_B T_{kin}}} e^{-\frac{MV^2}{2k_B T_{kin}}}$.

Q.B1) Preliminairement, construire γ_L en terme de S, ρ_L, m et $v_{th,L}$ en employant seulement DA et l'argument d'extensivité.

Q.B2) Comment la fréquence $f_{coll,L}$ est modifiée par l' "effet de Doppler" avec $V(\neq 0)$? Et aussi quelle sera $f_{coll,R}$? (indice : Rappeler que, vues par la paroi mobile, les particules vers la droite dans le cylindre L se déplacent avec la vitesse $v_{th,L} - V$, alors que les particules vers la gauche dans le cylindre R se déplacent avec la vitesse $-v_{th,R} - V$.)

Q.B3) Combien de quantité de mouvement est-elle transmise à la paroi par la collision d'une particule dirigée vers la droite dans le cylindre L? (indice : Utiliser l'indice précédente pour la vitesse relative avant la collision, et noter que la particule repartira la paroi avec la vitesse relative de signe opposé. Pour $m \ll M$ le changement de V sur une collision apporte un effet de l'ordre plus élevé de m/M et donc négligeable ici.)

Q.B3bis) Faire la même chose pour la surface à droite

Q.B4) En combinant les résultats de Q.B2 et de Q.B3, trouver la formule pour F_L et donc pour γ_L . (Vous pouvez vérifier vos résultats en comparant avec votre réponse à Q.B1 sauf le facteur numérique.)

Q.B4bis) Faire la même chose pour la surface à droite.

5. Taux de transfert d'énergie :

On revient au montage avec le potentiel $U(X)$ (voir le schéma 1(a)). La vitesse de paroi V est donc nulle en moyenne dans le temps.

Pour $M/m < \infty$, des particules de gaz et la paroi mobile échangent de l'énergie, autant que la quantité de mouvement, lors de chaque collision. C'est par ce processus que l'énergie se coule entre le cylindre L et le cylindre R si $T_L \neq T_R$. (C'était Richard Feynman qui a premièrement remarqué que le mouvement Brownien de la paroi mobile provoque la conduction de la chaleur bien que la paroi elle-même n'ait pas de capacité calorifique.) Nous allons évaluer par l'argument basé sur DA le taux de transport de la chaleur. D'ici, on suppose que $T_L > T_{kin} > T_R$. Soit $J_{diss,L}^{(e)} (> 0)$ l'énergie qui s'échappe par unité de temps du cylindre L. Aussi soit $J_{diss,R}^{(e)} (< 0)$ l'énergie qui s'échappe par unité de temps du cylindre R. (C'est à dire, $-J_{diss,R}^{(e)} (> 0)$ entre dans le cylindre R per unité de temps.)

Q.C1) Par DA, exprimer $J_{diss,L}^{(e)}$ en terme de γ_L, M , et $k_B T_L - k_B T_{kin}$.

Q.C1bis) De la même façon, exprimer $J_{diss,L}^{(e)}$ en terme de γ_R, M , et $k_B T_R - k_B T_{kin}$.

La loi de conservation de l'énergie requiert, $J_{diss,L}^{(e)} + J_{diss,R}^{(e)} = 0$.

Q.C2) Déterminer $k_B T_{kin}$, et puis exprimer $J_{diss}^{(e)} \equiv J_{diss,L}^{(e)} = -J_{diss,R}^{(e)}$ en terme de $\gamma_L, \gamma_R, M, k_B T_L$ et $k_B T_R$

6. Vitesse de particule de gaz après la collision et la dissipation d'énergie :

(Attention ! Dorénavant, ne substituer PAS vos formules pour $J_{diss}^{(e)}, f_{coll,R}, v_{th,L}$, etc.)

Le rapport $\frac{J_{diss}^{(e)}}{f_{coll,L}}$ représente l'énergie dissipée par chaque collision sur la surface

gauche de la paroi mobile.⁴ On va analyser l'incidence de cette perte d'énergie sur la transfert de quantité de mouvement lors de la collision. On va imaginer que une particule de gaz dans le cylindre L ayant une vitesse typique, $v_{th,L}$, a percuté la surface gauche de la paroi et que cette particule a perdu l'énergie, $\frac{J_{diss}^{(e)}}{f_{coll,L}}$.

Q.D1) Ecrire le bilan de l'énergie entre l'énergie cinétique initiale, $\frac{m}{2}v_{th,L}^2$, la quantité mentionnée ci-dessus $\frac{J_{diss}^{(e)}}{f_{coll,L}}$, et l'énergie cinétique finale, $\frac{m}{2}(v'_L)^2$, où $v'_L (< 0)$ est la vitesse typique de la particule de gaz après la collision. (Remarque. Lorsqu'on calcule le bilan d'énergie, on peut négliger la vitesse de la paroi, V , car celle-ci a déjà été pris en compte dans $\frac{J_{diss}^{(e)}}{f_{coll,L}}$.)

Q.D2) En utilisant le résultat précédent et en supposant que $\frac{J_{diss}^{(e)}}{f_{coll,L}} \ll \frac{m}{2}v_{th,L}^2$, trouver la formule approximative pour $mv_{th,L} - (-mv'_L)$ en terme de $J_{diss}^{(e)}$, $f_{coll,L}$ and $v_{th,L}$, au premier ordre de $J_{diss}^{(e)}$.

Q.D2bis) En utilisant des procédures pareils aux Q.D1 et Q.D2 maintenant pour la vitesse typique de particule de gaz $v'_R (> 0)$ après la collision sur la surface droite de la paroi, trouver $mv'_R - mv_{th,R}$ au premier ordre de $J_{diss}^{(e)}$. (indice : Attention ! La particule dans le cylindre R gagne, pas perd, de l'énergie $\frac{J_{diss}^{(e)}}{f_{coll,R}}$ lors de la collision. Donc $mv'_R - mv_{th,R}$ doit être positive.)

7. La force nette due à hors l'équilibre :

On connaît déjà la quantité de mouvement transmise à la paroi lorsque une particule arrive avec la vitesse $v_{th,L}$ et part avec la vitesse $v'_L (< 0)$ après la collision sur la surface à gauche. Aussi on connaît la quantité de mouvement transmise à la paroi lorsque une particule arrive avec la vitesse $-v_{th,R}$ et part avec la vitesse $v'_R (> 0)$ après la collision sur la surface à droite. On a aussi les expressions pour v'_L et v'_R .

Q.E1) En multipliant la quantité de mouvement transmise lors d'une collision sur la surface L, i.e., $mv_{th,L} - mv'_L$, par la fréquence de collision $f_{coll,L}$, trouver la force moyennée dans le temps sur la surface gauche de la paroi.

Q.E1bis) Pareil à Q.E1, en multipliant la quantité de mouvement transmise lors d'une collision de le cylindre R, $(-mv_{th,R}) - mv'_R$, par la fréquence de collision $f_{coll,R}$ trouver la force moyennée dans le temps sur la surface droite de la paroi.

Q.E2) En ajoutant les résultats de Q.E1 et de Q.E1bis, donner la force *nette* moyennée dans le temps sur la paroi par les deux parties, L et R. Cette force *nette*, qu'on appellera F_{neq} , est purement d'origine hors l'équilibre due à la dissipation d'énergie, car les forces à l'équilibre $\pm pS$ s'annulent.

Q.E3) Par rapport à l'équilibre, $T_L = T_R$, dans quelle direction la paroi mobile se déplace-t-elle en moyenne dans le temps lorsque $T_L > T_R$?

Q.E4) En résumé, regarder le schéma 1(b), et expliquer au maximum en 3 lignes le mécanisme essentiel par lequel la paroi mobile reçoit la force sous la pression

4. Puisque la paroi est piégée par $U(X)$, on utilisera $f_{coll,L}$ avec $V = 0$.

de gaz égale mais sous la gradient de température.

8. Epilogue⁵

5. Vous pouvez lire cette partie après l'épreuve :

Now let us remove the spring potentiel $U(X)$ from figure 1(a). The movable wall will start to move and eventually reach the steady state, with a finite time-averaged velocity \bar{V} . We expect that this velocity is the result of balance among F_{neq} and the frictional forces : $-(\gamma_L + \gamma_R)\bar{V} + F_{neq} = 0$, with the aforementioned friction coefficients. Therefore $\bar{V} = (\gamma_L + \gamma_R)^{-1} F_{neq}$. One might worry about an additional heat dissipation like $(\gamma_L + \gamma_R)\bar{V}^2$ due to this motion. But the last contribution is smaller than $J_{diss}^{(e)}$ by a factor of order $m/M (\ll 1)$.

Up to here, we have completely ignored (or implicitly assumed) the “double collision” where the same gas particle collides with the wall more than once. This negligence is justified as long as $v_{th,L}$ and $v_{th,R}$ are much bigger than the velocity of the wall. In fact there can be very rare cases where an extremely fast gas particle collides with the wall causing the velocity of wall of order of $v_{th,L \text{ or } R}$. But, by order of magnitude argument, the probability of occurrence of such event is singularly rare $\sim e^{-\frac{c}{\epsilon}}$ with $c = O(1)$. Any perturbative expansion in $\epsilon \equiv \frac{m}{M}$ cannot take into account this effect.

2 Evolution d'un système quantique ayant une perturbation indépendante de temps

Dans la représentation de Shrödinger de système quantique de degrés de liberté finis, l'état $|\psi(t)\rangle$ s'évolue par

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1)$$

où \mathcal{H} est l'opérateur de l'énergie, donc hermitien, et on suppose qu'il a un spectre discret et non-dégénéré. On cherche l'évolution de $|\psi(t)\rangle$ avec $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{W}$ qui ne dépende pas de temps. On suppose que \mathcal{H}_0 est diagonalisable par une base orthonormée, $\{|\phi_m\rangle\}$, comme

$$\mathcal{H}_0 |\phi_m\rangle = E_m |\phi_m\rangle, \quad \langle \phi_k | \phi_m \rangle = \delta_{k,m}.$$

On suppose que les valeurs propres de \mathcal{H}_0 lui-même sont aussi non-dégénérés. c'est-à-dire, $E_k \neq E_m$ for $k \neq m$.

A partir de la condition initiale $|\psi(0)\rangle \equiv |\phi_n\rangle$, où $|\phi_n\rangle$ est un des états propres de \mathcal{H}_0 , on introduit la perturbation $\epsilon \mathcal{W}$ au temps $t = 0$. La "règle d'or de Fermi" (en fait développé par Dirac) dit que le taux de transition aux autres états $|\phi_k\rangle$ ($k \neq n$) est de $\propto |\langle \phi_k | \epsilon \mathcal{W} | \phi_n \rangle|^2$ per unité de temps. La perturbation ne doit, donc, pas être valable pour $\epsilon^2 t \sim 1$, mais que pour $\epsilon t \sim 1$. On s'intéresse à ce dernier regime.

Q.1) Montrer que la perturbation régulière de Eq.(1) à l'ordre ϵ (qu'on va écrire "à $O(\epsilon)$ ") engendre un terme hétérogène résonant sauf si $\langle \phi_n | \mathcal{W} | \phi_n \rangle = 0$.

Ce terme résonant fait invalider la condition de normalisation $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 + O(\epsilon^2)$ à cause de l'apparition de terme séculaire. On a donc besoin de traiter ce terme séculaire.

Q.2) Retrouver, soit par la méthode des échelle multiple soit par la méthode de groupe de renormalisation, la solution $|\psi(t)\rangle$ telle que l'erreur au $\epsilon t \sim 1$ reste à $O(\epsilon)$. La reponse doit être représentée dans la forme suivante : (indice : C'est $a_k(t)$, avec $k = n$ où on a besoin de traitement de perturbation singulière.)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t) |\phi_k\rangle.$$

Epilogue⁶

6. Vous pouvez lire après l'épreuve.

If you solve the above problem correctly, the solution must be also consistent with the normalization condition since $O(\epsilon)$ correction to $|\psi(t)\rangle$ does not contain the component parallel to $|\phi_n\rangle$.

3 Condensation de Bose-Einstein dans des gaz atomiques dilués

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de quelques propriétés des condensats de Bose-Einstein atomiques réalisés en laboratoire. La première partie de l'exercice consiste en une étude qualitative du phénomène ; la seconde partie traite du calcul détaillé du profil de densité d'un condensat de Bose-Einstein en interaction et dans un piège harmonique.

On considère tout d'abord un gaz parfait de N particules bosoniques de masse m dans une boîte de volume V .

1. Peut-on former une échelle de température classique avec ces paramètres et la constante de Boltzmann ?
2. En introduisant également la constante de Planck \hbar , déterminer par analyse dimensionnelle l'ordre de grandeur de la température critique de condensation de Bose-Einstein T_c . On justifiera la dépendance de T_c avec le nombre d'atomes N en considérant la limite thermodynamique $N, V \rightarrow \infty$, avec $n = N/V$ constant.

On considère maintenant un gaz dilué d'atomes bosoniques de ^{87}Rb (Rubidium) à basse température, tel que ceux produits en laboratoire.

Ces gaz sont isolés de l'environnement en étant placés sous vide et maintenus en lévitation dans un champ magnétique inhomogène. Pour des atomes de spin polarisé, l'énergie potentielle d'un atome dans un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est égale à $\mu_B B(\mathbf{r})$, ou $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T est le magnéton de Bohr.

3. Evaluer la courbure de champ magnétique produite par deux bobines de taille $L \simeq 10$ cm, espacées d'une distance $D \simeq L$, formée chacune de 100 tours de fil conducteur et parcourues par un courant $I = 100$ A. En déduire la fréquence typique $\omega/2\pi$ de piégeage des atomes dans une zone de minimum local du potentiel.
4. Evaluer l'extension $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ du niveau harmonique fondamental, et justifier pourquoi le potentiel de piégeage peut être considéré comme harmonique à l'échelle d'un condensat de Bose-Einstein.

Le modèle de condensation de Bose-Einstein dans une boîte ne convient pas pour l'étude des gaz atomiques confinés dans un piège harmonique. Cependant, on peut évaluer T_c en utilisant le calcul effectué pour un gaz homogène de la manière suivante : à la température critique T_c du gaz piégé, la densité atomique n au fond du piège doit satisfaire à la relation $T_c(n)$ d'un gaz homogène.

5. Utiliser ce raisonnement pour calculer la température critique d'un gaz de N particules dans un piège harmonique de fréquence $\omega/2\pi$. La densité du gaz à T_c pourra être évaluée en considérant un gaz classique (distribution de Boltzmann).
6. Application numérique : Calculer l'ordre de grandeur de la température critique de superfluidité d'un gaz contenant $N = 10^6$ atomes. Connaissez-vous un système dans la nature dans cette gamme de température ?

On s'intéresse maintenant à l'effet des interactions sur un condensat de Bose-Einstein atomique. On suppose que l'énergie d'interaction d'un atome localisé en \mathbf{r} avec les autres atomes est proportionnel à la densité atomique $n(\mathbf{r})$ en \mathbf{r} .

7. Montrer que la constante de proportionnalité g peut s'écrire sous la forme

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m},$$

où a est une longueur caractérisant la force des interactions entre atomes et appelée la longueur de diffusion.

On cherche à évaluer l'ordre de grandeur de la longueur de diffusion a . On considère l'interaction entre deux atomes neutres, modélisée par un coeur dur de rayon r_0 et une force attractive de Van der Waals :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}}(r) &= +\infty, & r < r_0 \\ &= -C_6/r^6, & r > r_0, \end{aligned}$$

avec $C_6 = 4 \times 10^{-76} \text{ J m}^6$ pour des atomes de Rubidium.

8. Montrer qu'on peut former deux échelles de longueur avec les paramètres r_0 et C_6 . Comment se compare l'énergie typique de collisions entre atomes (donnée par T_c) par rapport à la profondeur du potentiel d'interaction ? Dans le cas des collisions ultrafroides où seule la queue du potentiel est explorée, l'ordre de grandeur de la longueur de diffusion a est déterminé par le paramètre C_6 . Donner une valeur typique pour a .

La seconde partie de cet exercice consiste en l'étude détaillée du profil de densité d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège harmonique et en tenant compte des interactions. Les atomes occupent tous la même fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$, qui obéit à une équation de Schrödinger non linéaire

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + N\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\psi(\mathbf{r})|^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}),$$

où μ est le potentiel chimique (correspondant à l'énergie nécessaire pour ajouter une particule au condensat).

9. Donner une interprétation physique du terme non linéaire.
10. Intégrer l'équation de Schrödinger pour dériver l'équation

$$\begin{aligned} E_c + E_p + E_i &= \mu, \\ E_c &= \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{r} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2, \\ E_p &= \frac{1}{2}m\omega^2 \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 r^2, \\ E_i &= N\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^4, \end{aligned}$$

dont on interprétera chacun des termes.

11. Supposons tout d'abord que le profil de densité soit faiblement altéré par les interactions. Calculer un ordre de grandeur de chacun des termes et montrer que le rapport E_i/E_c est de l'ordre de Na/a_0 . Calculer un ordre de grandeur de ce facteur et en déduire que le profil est fortement altéré par les interactions.
12. Le signe de la longueur de diffusion est positif pour l'atome de Rubidium, correspondant à des interactions répulsives entre atomes. Expliquer pourquoi il est légitime de négliger le terme d'énergie cinétique, et en déduire le profil de densité

$$n(\mathbf{r}) = N|\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} \text{Max} \left[\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, 0 \right].$$

13. Exprimer la condition de normalisation de la fonction d'onde pour trouver la relation entre μ et N .
En déduire l'expression du rayon du condensat

$$R = a_0 \left(\frac{15Na}{a_0} \right)^{1/5}.$$

14. On cherche à affiner le calcul du profil de densité en tenant compte du terme d'énergie cinétique.
Dans quelle région s'attend-t-on à un effet important de ce terme ?

On peut montrer que la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ respecte la symétrie sphérique du problème et peut être choisie réelle. On souhaite résoudre l'équation de Schrödinger non linéaire complète autour de $r = R$ uniquement.

15. Montrer que pour $|r - R| \ll R$ on peut approximer l'équation de Schrödinger par

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\psi}{dr^2} + F(r - R)\psi + N \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \psi^3 = 0,$$

avec $F = m\omega^2 R$.

16. On souhaite écrire cette équation sous forme adimensionnée. En posant $\psi(r) = \xi^{-3/2} \phi(u = r/d)$,
montrer qu'on peut se ramener à l'équation

$$\phi'' = (u + \phi^2)\phi,$$

pour des valeurs de ξ et d que l'on explicitera. Calculer le rapport d/R et commenter.

La solution de cette équation différentielle est inconnue. Nous nous intéressons aux comportements asymptotiques pour $u \rightarrow \pm\infty$.

17. Expliquer pourquoi le terme non linéaire peut être négligé lorsque $u \rightarrow +\infty$.
18. On s'intéresse au comportement asymptotique de la solution de l'équation différentielle $\phi'' = u\phi$ pour $u \rightarrow +\infty$. Quel est l'infiniment petit dans cette équation différentielle ?
19. La forme de l'équation différentielle suggère un traitement de type WKB. On pose donc $\phi(u) = \exp(f(u))$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $f(u)$?
20. On effectue un développement perturbatif de $f(u)$ sous la forme $f(u) = f_0(u) + f_1(u) + \dots$. On cherche tout d'abord le terme d'ordre minimal sous la forme $f_0(u) = Au^\alpha$. Déterminer les valeurs des constantes A et α .
21. On cherche également le terme suivant sous la forme d'une puissance de u : $f_1(u) = Bu^\beta$. Montrer que ce choix conduit à une contradiction.
22. Montrer qu'un choix admissible pour $f_1(u)$ est la forme $f_1(u) = B \log(u)$, et donner la valeur de B .
23. Conclure en donnant la forme du développement asymptotique de $\phi(u)$ en prenant en compte les termes f_0 et f_1 .
24. Quel est le comportement de $\phi(u)$ pour $u \rightarrow -\infty$? Vérifier que ce comportement est compatible avec la solution de l'équation de Schrödinger obtenue en négligeant le terme d'énergie cinétique.
25. Tracer l'allure de la fonction $\phi(u)$ pour u quelconque.