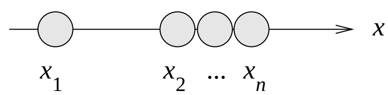
ORDRES DE GRANDEUR
Mercredi 26 Mai 2010

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents manuscrits autorisés. Les trois parties doivent être rédigés sur des feuilles séparées. De nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment.

1 Collisions entre particules le long d'une ligne

On considère un système de n particules identiques assujetties à se déplacer le long de l'axe x (voir schéma ci-dessous).



Dans l'état de référence, la position de i-ème particule, x_i, est $x_i = Di$ où D est le diamètre de chaque particule. Cet état est réalisé au temps de "l'impact initial", $t = 0$. On mesure le déplacement de chaque particule, $u_i(t)$, à partir de cet état, $x_i(t) = Di + u_i(t)$. L'équation de mouvement s'écrit :

$$m\frac{d^2u_i}{dt^2} = f(-u_i + u_{i-1}) - f(-u_{i+1} + u_i), \qquad (1)$$

où m est la masse d'une particule. La force entre les particules voisines de la paire $(i, i+1)$, dépend du déplacement relatif $u_{i+1} - u_i$ de la façon suivante : si $-u_{i+1} + u_i < 0$ (non contact), la force $f(-u_{i+1} + u_i)$ est nulle. Si $-u_{i+1} + u_i > 0$ (interpénétration), la force est non-nulle et repulsive, $f(-u_{i+1} + u_i) > 0$.

On suppose qu'elle suit une loi de puissance avec un exposant α (≥ 0), i.e.

$$f(\delta) = \begin{cases} A\delta^\alpha & pour\ \delta \geq 0 \\ 0 & pour\ \delta < 0 \end{cases},$$

où $A(> 0)$ est une constante. Pour faciliter le traitement des particules aux bords ($i = 1$ et n), on prend $u_0 = -\infty$ et $u_{n+1} = +\infty$.

Q1 Pour une collision binaire i.e. $n = 2$, trouver par analyse dimensionnelle la durée de collision τ_c pendant laquelle $\delta > 0$, en fonction de m, A et de la vitesse relative initiale d'impact $v_0 \equiv d(u_1(t) - u_2(t))/dt$ ($t < 0$).
Donner l'allure de τ_c vs v_0 pour différentes valeures de $\alpha(> 0)$.

Q2 Si la particule est sphérique et constituée d'une matière élastique homogène, on sait que $\alpha = 3/2$ (loi de Hertz) pour δ petit. Donner par analyse dimensionnelle l'expression de A en fonction du module élastique (de Young) E et du diamètre de la particule D.

Q3 On considère toujours une sphère de matière élastique homogène. Donner par l'analyse dimensionnelle, le temps τ_p qui caracterise la propagation d'une onde élastique dans la particule en fonction de E, D et de la masse volumique de la particule, ρ.

Q4 Afin que l'équation (1) soit une bonne approximation, laquelle des deux conditions suivantes, $\tau_p \ll \tau_c$ ou $\tau_p \gg \tau_c$ est-elle nécessaire ? .
En particulier, pour le cas $\alpha = 3/2$, expliciter cette condition nécessaire en fonction de ρ, E, D, et v_0.
Faut-il que la vitesse d'impact v_0 soit grande ?

On suppose que les conditions de validité de l'équation (1) sont satisfaites et on considère le processus avec la condition initiale particulière à $t = 0$:

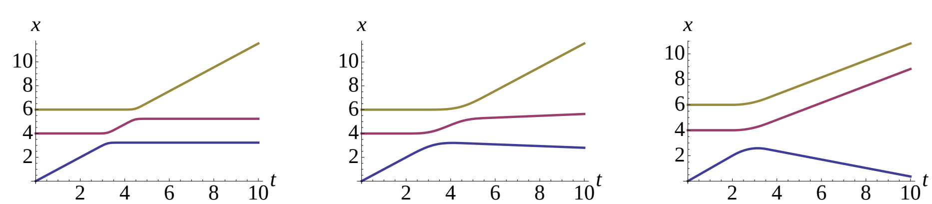
$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0, \quad \frac{du_1}{dt} = v_0(> 0), \; \frac{du_2}{dt} = \ldots = \frac{du_n}{dt} = 0.$$

Ceci signifie que la première particule impacte la deuxième avec toutes les particules sauf la première au repos et en contact .

Q5 Etant donné le nombre de particules, n, de quels paramètres dépend le rapport $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{v_0}\frac{du_i}{dt}$, parmi i, α, A/m, D et v_0 ? Répondre par analyse dimensionnelle pour α quelconque.

La résolution numérique a été effecuée pour le modèle (1) avec les exposants, $\alpha = 1/10, 3/2$ et 10 avec $n = 3$. Les trajectoires du centre de masse des particules sont représentées en fonction du temps. Le diamètre de particule est $D = 2$, et la vitesse d'impact est $v_0 = 1$. Dans ces schémas les positions initiales et le temps initial (i.e. le moment du premier impact) sont décalés à $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ et $t = 2$, respectivement.

Q6 Parmi les trois schémas ci-dessous, lequel correspond à l'exposant $\alpha = 10$? Donnez-en la justification.



Q7 Si on remplace les particules sphériques et homogènes par des ballons de caoutchouc sphériques, quel sera la valeur approximative de l'exposant α ?

2 Quelques exercices d'analyse dimensionnelle

2.1 Pulsations sous l'effet de la gravité ou de la tension de surface

On considère un volume sphérique de rayon R contenant un liquide de densité ρ.

Q1 On suppose que le liquide est en attraction sous son propre champ de gravité et on note G la constante d'attraction universelle. Donner par analyse dimensionnelle l'expression de la pulsation de déformations de la sphère de longueur d'onde λ.

Q2 Des pulsations de période de quelques heures sont observées pour des étoiles telles que le soleil, alors qu'elles sont de quelques dizaines de minutes pour des naines blanches. Que pouvez-vous en déduire ?

On considère à présent une goutelette de liquide soumise uniquement aux forces de tension de surface, σ (on néglige dans un premier temps la gravité).

Q3 Donner par analyse dimensionnelle l'expression de la pulsation de déformations de la sphère de longueur d'onde λ.

Q4 A quelle condition sur R, σ, ρ et g peut-on négliger le champ de gravité g dans le calcul précédent ?

2.2 Echelles caractéristiques dans les plasmas

On considère un plasma comportant N électrons de masse m et de charge $-e$ et N/Z ions (supposés au repos) de charge Ze dans un volume V. On note, $n = N/V = \overline{d}^{-3}$ et $q^2 = e^2/\epsilon_0$.

Q5 On suppose que la température T est nulle. Montrer que l'on ne peut définir qu'une seule pulsation caractérisitique, ω_p, à partir de n, q et m.

Q6 Dans le cas d'un milieu dense avec un électron libre par atome, donner l'ordre de grandeur de la pulsation plasma ω_p en fonction des unités atomiques. A quel domaine de fréquences correspond-elle ?

Q7 A quel type de phénomène correspond la pulsation plasma ? Comment l'engendrer ? Pourquoi les métaux alcalins sont-ils transparents dans l'ultraviolet ?

On considère à présent que la température est très élevée, $kT \gg q^2/\overline{d}$. On définit la longueur de Debye λ_D par $\lambda_D^2 = kT/nq^2$.

Q8 Le nombre d'électrons dans la sphère de rayon λ_D est-il important ? Quel est l'ordre de grandeur des fluctuations de ce nombre et donc des fluctuations de charge correspondantes ?

Q9 En déduire une interprétation physique pour la longueur de Debye à partir des fluctuations d'énergie électrostatique. Pourquoi est-ce la longueur d'écrantage électrostatique ?

2.3 Polymères dilués

On considère un polymère dans un solvant. Ce polymère est supposé être composé de N maillons de longueur a, attachés l'un au bout de l'autre (voir schéma ci-dessous). Dans *ces premières questions, on suppose que les maillons ont des directions indépendantes les unes des autres et qu'ils ne se gênent pas mutuellement. On s'intéresse à la taille moyenne R_0 du polymère, c'est-à-dire la distance entre les deux extrémités de la chaîne.*

Q10 Par une analogie avec un exemple de diffusion bien connu que l'on donnera, donner les caractéristiques statistiques de la position relative des deux extrêmités $\vec{x}_N - \vec{x}_0$ et la valeur de l'exposant ν dans l'équation $\langle R_0 \rangle \propto N^\nu a$.

Q11 Au repos à la température T, le polymère est donc replié en *pelote* et a une taille caractéristique R_0. Supposons que l'on fixe l'une des extrêmités et que l'on tire sur l'autre avec une force f. Soit δR l'allongement du polymère. Par analyse dimensionnelle, relier δR à la force appliquée, à la température et à la taille caractéristique R_0. Que devient cette formule lorsque la force est faible ?

Le modèle de Flory des polymères prend en compte les interactions entre maillons qui ne peuvent donc plus se recouper (volume exclu). On définit ainsi un volume caractéristique V prenant en compte ces interactions. Soit R la taille caractéristique du polymère.

Q12 Quelle est l'énergie par maillon due à ces interactions en fonction de V, $c = N/R^3$ la concentration en maillons et la température ? Justifier le fait que cette énergie soit prise dans la suite proportionnelle à c.

Q13 En déduire l'énergie E de la chaîne et sa variation en fonction de N et R.

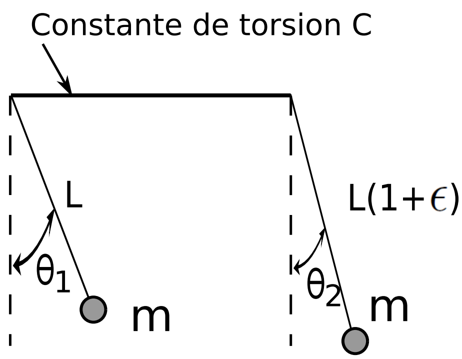
Q14 L'entropie est une fonction de R : comment doit-elle varier lorsque R augmente ? A partir de calculs exacts dans le modèle idéal ci-dessus, on peut déterminer l'entropie $S(R) \simeq S_0 - k_B \alpha \frac{R^2}{R_0^2}$ où R_0 est donné à question 1 et α est un paramètre géométrique sans dimension : quel doit alors être son signe ?

Q15 Minimiser l'énergie libre $F = E - TS$ obtenue en fonction de R pour obtenir la taille caractéristique R_F dans ce modèle en fonction de N, a, V et α. Quel est alors l'exposant ν' de N dans l'expression de R_F ? Vérifier que la chaîne a bien "gonflé" par rapport au cas idéal.

3 Méthodes perturbatives

3.1 Pendules couplés linéairement

On considère deux pendules consitués d'une masse m au bout d'un fil. Le fil du premier pendule a une longueur L, tandis que celui du second pendule a une longueur $L(1+\epsilon)$, avec $\epsilon \ll 1$. Les deux pendules sont couplés par un fil de torsion de constante C, et se meuvent dans le plan perpendiculaire à ce fil. On appelle θ_1 et θ_2 les angles que font chacun des pendules avec la verticale.



Q1 Déterminer les équations (couplées) d'évolution de θ_1 et θ_2.

Q2 Adimensionner ces équations en utilisant $\sqrt{L/g}$ comme échelle de temps.

Q3 On suppose que le couplage est faible, et on note $C/(mgL) = \gamma\epsilon$, où γ est une quantité $\mathcal{O}(1)$. En gardant la dépendance des coefficients des équations jusqu'au premier ordre inclus en ϵ, montrer que l'on obtient le système d'équations :

$$\ddot{\theta}_1 = -\sin(\theta_1) + \gamma\epsilon(\theta_2 - \theta_1) \tag{1}$$

$$\ddot{\theta}_2 = (\epsilon - 1)\sin(\theta_2) - \gamma\epsilon(\theta_2 - \theta_1) \tag{2}$$

Q4 On souhaite obtenir une solution de ce système d'équations à l'aide d'un développement en échelles multiples. On définit alors un temps lent $T = \epsilon t$, et on pose :

$$\theta_1 = \sqrt{\epsilon}(\theta_1^{(0)}(t,T) + \epsilon\theta_1^{(1)}(t,T) + ...) \tag{3}$$

$$\theta_2 = \sqrt{\epsilon}(\theta_2^{(0)}(t,T) + \epsilon\theta_2^{(1)}(t,T) + ...) \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

A l'ordre $\sqrt{\epsilon}$, montrer que :

$$\theta_1^{(0)} = A(T)e^{it} + c.c. \tag{6}$$

$$\theta_2^{(0)} = B(T)e^{it} + c.c. \tag{7}$$

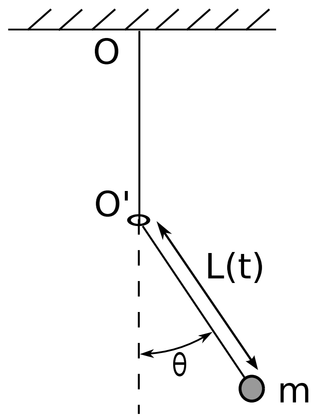
$$\tag{8}$$

Q5 En utilisant la condition de solvabilité à l'ordre $\epsilon^{3/2}$, déterminer le système d'équation qui régit l'évolution temporelle de $A(T)$ et $B(T)$.

Q6 On cherche des solutions accrochées en fréquence sous la forme $A(T) = r_1 e^{i\phi_1(T)}$ et $B(T) = r_2 e^{i\phi_2(T)}$, où r_1 et r_2 sont indépendants du temps. Montrer que dans ce cas les deux pendules oscillent soit en phase soit en opposition de phase.

3.2 Pendule de longueur variable

On considère un pendule constitué d'un fil au bout duquel est attachée une masse m. Le fil est fixé à un support horizontal et passe par un anneau dont la hauteur est réglée par l'expérimentateur. On obtient ainsi un pendule dont la longueur $L(t)$ varie dans le temps.



Q1 Déterminer l'équation d'évolution de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale. Cette équation fait intervenir (entre autres) L et ses dérivées temporelles.

Q2 On définit la coordonnée $\xi(t) = L(t)\theta(t)$. ξ est la longueur algébrique de l'arc de cercle reliant la position du pendule à sa position au repos. On suppose $\theta \ll 1$, et on ne gardera que les termes du premier ordre en θ. Montrer que ξ vérifie l'équation :

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{L(t)}\xi = 0 \tag{9}$$

On suppose que l'expérimentateur change L très lentement dans le temps. On note alors $L(\epsilon t)$, avec $\epsilon \ll 1$, et on souhaite obtenir une solution approchée pour ξ à l'aide de la méthode WKB.

Q3 Faire le changement de variable $T = \epsilon t$ dans l'équation (9).

Q4 On pose alors :

$$\xi(T) = e^{\frac{1}{\epsilon}(S_0(T)+\epsilon S_1(T)+\ldots)} \tag{10}$$

Montrer qu'à l'ordre le plus bas on obtient $\frac{dS_0}{dT}$.

Q5 Calculer S_1 à l'aide du problème à l'ordre suivant.

Q6 Montrer que l'énergie mécanique E_m du pendule est proportionnelle à sa fréquence d'oscillation. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle à la position de repos du pendule, et on ne gardera que le terme dominant de l'énergie cinétique. On définit la constante

h comme étant le rapport entre E_m et la pulsation d'oscillation du pendule. Donner l'expression de h en fonction de m, de g, de la longueur initiale du pendule $L(t = 0)$ et de l'angle depuis lequel est laché le pendule à l'instant initial $\theta(t = 0)$ (sans vitesse).

Q7 Qu'est-ce qui apporte de l'énergie au pendule lorsque sa longueur L diminue ? Connaissez-vous un autre oscillateur qui vérifie cette relation énergie-fréquence ?

Q8 On définit $p_\xi = m\dot{\xi}$. Montrer que le mouvement du pendule vérifie la relation $\sqrt{< p_\xi^2 >< \xi^2 >} = h$, où $< . >$ est une moyenne sur une période d'oscillation. Commenter.