LICENCE DE PHYSIQUE, FIP

ORDRES DE GRANDEUR

Mai 2008

A. Potentiel électrostatique

On note $V(\boldsymbol{r})$ le potentiel électrostatique au point d'espace $\boldsymbol{r}$. On rappelle la relation $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V$

a) Retrouver par analyse dimensionnelle, donc à une constante de proportionnalité près, l'expression du potentiel $V(r)$ créé par une charge ponctuelle e placée en $r = 0$, en fonction de e, ϵ_0, et r.

b) On considère à présent une distribution uniforme de charge suivant une ligne infine ($\perp x$, voir figure) de charge par unité de longueur λ. On cherche le potentiel $V(x)$ en fonction de λ, ϵ_0, et x. En déduire le champ électrique $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$. Commenter le résultat obtenu ? Pour quelle raison existe-t-il un problème ?

c) On s'intéresse à présent à la différence de potentiel $V(x) - V(x_0)$. Montrer que $V(x) - V(x_0)$ peut être exprimé en fonction de λ, ϵ_0 et d'une fonction arbitraire de x et x_0 de la forme $f(x/x_0)$.

d) Montrer que $f(x) - f(x') = f(x/x')$ et en déduire la fonction f.

e) Quelle serait une autre façon de résoudre le problème par analyse dimensionelle sans rencontrer de complication ? Commentez.

B. Force de Hertz

On s'intéresse à la force exercée lors du contact de deux sphères élastiques de rayon R. On rappelle que pour de faibles déformations Δa d'une barre de longueur a et de section S sous l'effet d'une force F, on a la relation

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta a}{a}, \tag{1}$$

où Y est le module d'Young.

Comme illustré par la figure ci-dessous, le problème est ici un peu plus compliqué en raison de sa géométrie. On suppose que les centres des sphères en contact sont rapprochés d'une petite longueur 2δ sous l'effet de l'écrasement par F. Il en résulte un aplatissement sur un diamètre typique a. On suppose que le matériau composant les sphères subit une déformation dans un domaine sphérique de diamètre typique a (voir figure).

a) En utilisant la relation et l'hypothèse précédentes, donner l'expression de F en fonction de Y, a et δ (à une constante de proportionnalité près).

b) A partir de considérations purement géométriques, donner l'expression de a en fonction de R et δ (à une constante de proportionnalité près).

c) Donner l'expression de F en fonction de Y, R et δ. En déduire que le potentiel d'interaction entre les deux sphères croit comme $\delta^{5/2}$.

d) Lorsque les deux sphères de masse m sont en contact après une collision, montrer que $\delta(t)$ est gouverné par une équation de la forme

$$\mu\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + K\delta^{\frac{5}{2}} = \mu V^2, \tag{2}$$

où V est la vitesse relative des deux sphères au moment de la collision. Que représente μ? Donner l'expression de K en fonction de Y et R.

e) Quelle est la déformation maximale δ_m en fonction de μ, K et V?

f) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que le temps de collision diverge à petite vitesse comme $V^{-1/5}$.

C. Conductivité thermique et électrique des métaux

Il a été observé expérimentalement par Wiedemann et Franz que sur une plage de température d'une centaine de degrés autour de la température ambiante, la rapport entre la conductivité thermique, λ, et la conductivité électrique, σ, des métaux, est proportionnel à la température, avec une constante de proportionalité égale à environ $2.10^{-8}\ W.\Omega.K^{-2}$.

a) On cherche à exprimer la conductivité thermique des électrons. On a n électrons par unité de volume et ils ont une vitesse typique v. On note $\mathcal{E}(T)$ l'énergie cinétique par électron. On suppose tout d'abord que les électrons se déplacent suivant un axe Ox. Les électrons arrivant en x ont subi leur dernière collision en $x - l$ ou en $x + l$, l étant leur libre parcours moyen. Ils ont donc respectivement les températures $T(x - l)$ et $T(x + l)$. Donner l'expression du flux de chaleur en x, j_Q, c'est à dire de l'énergie transportée par unité de surface et de temps, en fonction de dT/dx. On supposera que l'échelle de variation de T est grande par rapport au libre parcours moyen.

b) On note τ, le temps moyen entre collisions successives. En supposant que la distribution de vitesse des électrons est isotrope, généraliser le résultat précédent sous la forme, $\vec{j}_Q = -\lambda\vec{\nabla}T$. Montrer que

$$\lambda = \frac{1}{3}v^2\tau c_v,$$

où c_v est la capacité calorifique par unité de volume.

c) La conductivité électrique d'un métal, σ, a pour expression

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m},$$

où m est la masse de l'électron, et e sa charge électrique. En considérant le gaz d'électrons classique, donner l'expression de $\lambda/\sigma T$ en fonction de la constante de Boltzmann, k_B, et e. Montrer que par cette estimation, a priori incorrecte, on trouve un accord quantitatif avec la loi de Wiedemann et Franz.

La raisonnement précédent, dû à Drude, conduit à une estimation fausse de l'énergie cinétique moyenne d'un électron ainsi que de c_v, d'un facteur 100 environ. On sait en effet à présent que la statistique des électrons dans un métal n'est pas classique.

d) Estimer par analyse dimensionnelle la vitesse de Fermi, v_F, en fonction de n, $\hbar$ et m. On rappelle que l'énergie de Fermi, E_F, et la température de Fermi, T_F, sont définies par $E_F = k_\mathrm{B}T_F = m{v_F}^2/2$.

Montrer que l'énergie cinétique moyenne d'un électron est environ 100 fois plus élevée que l'estimation classique. On prendra $n \simeq 10^{30}m^{-3}$ et $T \simeq 300K$.

e) A cause du principe de Pauli, seule la fraction d'électrons située dans un voisinage $k_\mathrm{B}T$ de l'énergie de Fermi, peut être excitée thermiquement. Evaluer l'incrément d'énergie ΔE correspondant en fonction de n, k_B, T et de la température de Fermi T_F. En déduire que c_v est environ 100 fois plus faible que l'estimation classique.

f) Pouvait-on s'attendre à ce que $\lambda/\sigma T$ ne dépende pas de la statistique des électrons où l'accord obtenu par Drude était-il vraiment fortuit ?

D. Convection turbulente

On cherche à estimer la loi donnant le flux de chaleur transporté par un écoulement convectif turbulent engendré entre deux plaques horizontales, distantes de d, et portées à des température respectives T (plaque du haut) et $T + \Delta T$ (plaque du bas).

Le grandeurs physiques intervenant dans le problème sont, la densité moyenne du fluide, ρ, sa viscosité cinématique, ν, sa diffusivité thermique, κ, (dimensions, L^2/T, comme la viscosité cinématique), l'écart de température entre plaques, ΔT, le produit $g\alpha$, où g est l'accéleration de la pesanteur et α le coefficient de dilatation thermique (en K^{-1}), et la distance d.

a) Montrer que cela permet de définir deux paramètres sans dimension indépendants. On prendra

$$R \equiv \frac{g\alpha\Delta T\, d^3}{\nu\kappa}, \quad P \equiv \frac{\nu}{\kappa}.$$

Le flux de chaleur est défini par

$$Q \equiv -\kappa\frac{\partial T}{\partial z},$$

où la dérivée doit être prise à la paroi, de température moyenne T; z est l'axe vertical. On définit le flux sans dimension par

$$N \equiv \frac{Qd}{\kappa\Delta T}.$$

b) On suppose que la valeur de d a peu d'effet sur le flux. Donner une justification physique possible et en déduire que la loi $N = N(R, P)$, prend la forme

$$N \propto R^{\frac{1}{3}}.$$

c) On suppose que les coefficients de transport moléculaire, ν et κ, ont peu d'effet sur le flux. Donner une justification physique possible et en déduire que la loi $N = N(R, P)$; prend la forme

$$N \propto (RP)^{\frac{1}{2}}.$$

Discuter.