Ordres de grandeur
FIP, mai 2006

Durée de l'épreuve : 3 heures
Documents manuscrits autorisés
Les problèmes doivent être rédigés sur des feuilles séparées.
La plupart des questions peuvent être traitées indépendamment. Dans la réponse à certaines questions, vous pouvez être amenés à estimer directement un ordre de grandeur ; indiquez le clairement, et si possible justifiez le.

1 Champs magnétiques dans l'univers

De nombreux objets astrophysiques (planètes, étoiles, galaxies) possèdent un champ magnétique. Le tableau suivant donne quelques ordres de grandeur. La valeur moyenne B de l'amplitude du champ magnétique sur le volume de l'objet astrophysique, la densité moyenne ρ, la taille typique L du domaine conducteur de l'électricité, la diffusivité magnétique $\nu_m = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et σ la conductivité électrique du milieu. Les données de ce premier tableau sont en unités $MKSA$.

Milieu	B	ρ	L	ν_m	$\frac{B^2L^3}{2\mu_0}$	$\frac{B^2L\nu_m}{2\mu_0}$
Notre galaxie	10^{-10}	$2\,10^{-21}$	10^{19}	10^{17}	10^{43}	10^{22}
Soleil	10^{-4}	1	$2\,10^{8}$	10^{3}	$4\,10^{22}$	10^{9}
Jupiter	$4\,10^{-4}$	10^{3}	$5\,10^{7}$	10	10^{22}	$4\,10^{7}$
Terre	10^{-4}	10^{4}	$3\,10^{6}$	3	$2\,10^{17}$	10^{5}
Naines blanches	$10^2 - 10^4$	10^{6}	10^{7}			
Etoiles à neutrons	10^6 - 10^9	10^{15}	10^{4}			

Le tableau suivant comporte quelques données relatives à des planètes du système solaire. R_P est le rayon, R_c est le rayon du noyau interne conducteur de l'électricité, B_{CMB} est le champ magnétique moyen à la périphérie de la région conductrice, exprimée en G (on rappelle que $10^4\,G = 1\,T$). Ω est la vitesse angulaire de la planète.

1.1 Premières estimations

Les champs magnétiques d'objets astrophysiques sont souvent dipolaires. On va estimer le courant I nécessaire à engendrer le champ B en supposant que celui-ci forme une boucle circulaire de rayon R égal à la taille typique du domaine conducteur de l'électricité.

a) Quel est le champ magnétique B engendré par le courant I au centre de la boucle de rayon R ? Donner le résultat par analyse dimensionnelle. Que vaut I dans le cas de la terre, dans le cas d'une étoile à neutrons avec $B = 10^9\,T$?

Planète	R_P (km)	R_c (km)	B_{CMB} (G)	Ω $(10^{-5}s^{-1})$
Mercure	2438	1900	0.014	0.124
Terre	6371	3480	7.6	7.3
Ganymède	2634	480	2.5	1.02
Jupiter	69950	56000	17	17.6
Saturne	58300	32000	2.5	16.4
Uranus	25360	18000	1.3	10.1
Neptune	24620	20000	0.52	10.8

b) On rappelle que le moment magnétique $\mathcal{M}$ d'une boucle de courant est le produit de I par la surface de la boucle. Estimer par analyse dimensionnelle le moment magnétique d'un neutron en fonction de e, $\hbar$ et M (masse du neutron).

c) On rappelle que l'on a typiquement 10^{57} nucléons dans une étoile. En supposant que tous les moments magnétiques des neutrons sont alignés et en utilisant les résultats des questions précédentes, estimer le champ magnétique d'une étoile à neutrons. L'ordre de grandeur est-il correct ?

d) Donner l'expression d'un champ magnétique B en fonction de M, $\hbar$, e, c. Quel est l'ordre de grandeur correspondant ? En considérant le mouvement d'une charge e dans un champ B, interpréter l'expression précédente de B comme étant celle d'un maximum possible de champ magnétique.

1.2 Concentration de champ

Une approche complètement différente consiste à essayer de faire le lien entre le champ d'une étoile telle que le soleil et celui des naines blanches et des étoiles à neutrons, en considérant l'effet de l'augmentation de densité.

a) On considère un milieu sphérique de rayon R, de conductivité électrique σ, parcouru par une densité de courant $\vec{j}$ engendrant un champ magnétique $\vec{B}$. On suppose que le courant de déplacement est négligeable. Estimer le temps typique de dissipation des courants et du champ par effet Joule. Quels sont les ordres de grandeurs correspondants en années pour la galaxie, le soleil, et la terre.

b) Sur une échelle de temps courte par rapport à celle évaluée précédemment, la dissipation Joule peut être négligée, donc le milieu peut être considéré comme étant de conductivité électrique infinie. On suppose que l'on passe par contraction isotrope d'un milieu sphérique de rayon R, parcouru par une densité de courant $\vec{j}$ engendrant un champ magnétique $\vec{B}$, à un milieu sphérique de rayon R', parcouru par une densité de courant $\vec{j}'$ engendrant un champ magnétique $\vec{B}'$. Montrer que $BR^2 = B'R'^2$. Quelle relation a-t-on entre B et la densité du milieu ρ ?

c) D'où peut venir l'énergie magnétique engendrée au cours du processus de contraction ? Cette augmentation d'énergie magnétique peut-elle ou non, stopper le processus de contraction à $R > R_{\min}$?

d) Les étoiles magnétiques ont des champs typiques $10^{-4} < B < 10^{-2}\,T$ pour $L \approx 10^9\,m$. Les champs magnétiques des étoiles à neutrons sont-ils en accord avec l'approche précédente ?

1.3 Effet dynamo

Le champ magnétique des étoiles telles que le soleil ou des planètes est engendré par le mouvement d'un fluide conducteur de l'électricité (effet dynamo). Les paramètres du problème sont donc, la densité du fluide ρ, sa viscosité cinématique ν, sa vitesse typique V, sa conductivité électrique σ, la taille typique L, μ_0, et B que l'on cherche à estimer.

a) On néglige la viscosité cinématique ν dans la suite. Pouvez-vous en donner une justification ?

b) Montrer que l'on a une relation entre les densités d'énergie magnétique et d'énergie cinétique de l'écoulement sous la forme

$$\frac{B^2}{\mu_0} = \rho V^2 f(Rm),$$

où $Rm = \mu_0 \sigma L V$.

c) Pour un un écoulement de géométrie fixée, l'effet dynamo ne peut se produire que si $Rm > Rm_c$ où Rm_c est une constante. De plus pour $Rm - Rm_c$ assez faible, $f(Rm) \approx Rm - Rm_c$. Montrer que

$$B^2 \propto \frac{\rho}{\mu_0 (\sigma L)^2} (Rm - Rm_c).$$

d) Si on suppose que Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune impliquent des écoulements de géométrie identique et des valeurs de ρ, σ et $Rm - Rm_c$ du même ordre, observe-t-on un accord avec les données du deuxième tableau ?

e) On prend en compte la vitesse angulaire de rotation Ω de la planète et on suppose que sa taille caractéristique L n'est pas un paramètre important. A l'aide d'une approche analogue à la précédente, donner une estimation de B^2. L'accord est-il meilleur ?

2 Amplification paramétrique

2.1 Rappel (TD) : amplification paramétrique sous-harmonique

On considère un pendule de pulsation propre ω_0, forcé paramétriquement à $\Omega = 2\omega_0 + \delta$ ($\mid \delta \mid \ll \omega_0$). L'angle $x(t)$ que fait le pendule avec la verticale satisfait à l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2(1 + f\cos\Omega t)\sin x = 0. \qquad (1)$$

a) A quelle pulsation peut osciller le pendule paramétriqueÊ ?

b) Lorsque la solution $x = 0$ devient instable, on cherche une solution de (1) sous la forme

$$x(t) = \sqrt{\epsilon}\left[B(T)\,\exp\left(i\frac{\Omega}{2}t\right) + \bar{B}(T)\exp\left(-i\frac{\Omega}{2}t\right)\right] + \cdots \qquad (2)$$

où $B(T)$ est une amplitude complexe lentement variable en fonction du temps, $\overline{B}$ est le complexe conjugué de B et $\epsilon \ll 1$.

Quelle symétrie temporelle de l'équation (1) est-elle brisée par la solution (2)Ê ? Montrer que si $x_0(t)$ est une solution de (1), cela entraîne l'existence d'une autre solution de (1).

c) On suppose que l'équation d'amplitude pour $B(T)$ est de la forme

$$\frac{dB}{dT} = a_{1,0}B + a_{0,1}\overline{B} + a_{2,0}B^2 + a_{1,1}B\overline{B} + a_{0,2}\overline{B}^2 + a_{3,0}B^3 + a_{2,1}B^2\overline{B} + a_{1,2}B\overline{B}^2 + a_{0,3}\overline{B}^3 + \cdots \qquad (3)$$

Quels sont les coefficients de (3) qui sont nuls en raison de la symétrie brisée précédenteÊ ?

d) Quelle symétrie temporelle de l'équation (1) est-elle brisée par la solution (2) si $f = 0$Ê ? Quels sont les coefficients de (3) qui sont non nuls dans ce casÊ ?

e) On suppose $f = 0$ et $\nu = 0$. Montrer en utilisant un argument de symétrie que $a_{1,0}$ et $a_{2,1}$ doivent être imaginaires pursÊ ; on note $a_{1,0} = i\alpha$ et $a_{2,1} = i\beta$. Ecrire l'équation d'amplitude obtenue pour $B(T)$.

f) On suppose que $\nu \neq 0$ et $f = 0$. Quels sont les nouveaux termes possibles par rapport à l'équation d'amplitude précédente (jusqu'à l'ordre 3 en amplitude compris)Ê ? On suppose que ν est d'ordre ϵ. Ecrire la nouvelle équation d'amplitude obtenue pour $B(T)$ en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas.

f) On reprend le problème initial, $\nu \neq 0$ et $f \neq 0$. On suppose que ν et δ sont d'ordre ϵ. Quel est le nouveau terme obtenu à l'ordre le plus bas par rapport à l'équation d'amplitude précédenteÊ ? Quel est a priori la relation entre son coefficient et fÊ ?

2.2 Amplification paramétrique : réponse harmonique

On s'intéresse à présent à une excitation paramétrique au voisinage de la pulsation propre du pendule, soit $\Omega = \omega_0 + \delta$ ($|\delta| \ll \omega_0$).

On cherche donc $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) \propto A(T)\exp i\Omega t + \bar{A}(T)\exp -i\Omega t + \cdots \qquad (4)$$

On rappelle que si $\nu = 0$ et $f = 0$, on a une équation d'amplitude de la forme

$$\frac{dA}{dT} = i\alpha A + i\beta A^2\overline{A} + \cdots \tag{5}$$

Lorsque $f \neq 0$, on cherche à deviner quels nouveaux termes de la forme $a_{m,n}(f)A^m\overline{A}^n$ vont s'ajouter à l'équation d'amplitude précédente. On suppose que f étant petit, $a_{m,n}(f)$ peut être développé en puissance de f.

a) Montrer en utilisant une invariance de (1) et la forme de (4) que ces nouveaux termes doivent être invariants sous la transformation $f \to -f$, $A \to -A$. Ecrire la forme de l'équation d'amplitude pour $\nu \neq 0$ et $f \neq 0$ en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas.

b) La réponse à la question précédente incite à faire le choix d'échelles suivant :

$x(t) = \varepsilon\, v(t,T) = \varepsilon[v_0(t,T) + \varepsilon\, v_1(t,T) + \varepsilon^2\, v_2(t,T) + \cdots]$
$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial T}$
$\delta = \varepsilon^2\Delta$
$f = \varepsilon F$
$\nu = \varepsilon^2\Gamma$

où Δ, F, Λ sont d'ordre 1 et $\varepsilon \ll 1$.

Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

c) Effectuer le développement perturbatif jusqu'à l'ordre ε^2 pour obtenir l'équation d'amplitude. En déduire la valeur de f pour laquelle le pendule vertical perd sa stabilité (stabilité linéaire). En régime oscillant le pendule oscille-t-il de manière symétrique par rapport à la verticale ? Commenter.