Ordres de grandeur
mai 2005

Les problèmes doivent être rédigés sur des feuilles séparées.

1 Echelles caractéristiques dans les plasmas

On considère un plasma comportant N électrons de masse m et de charge $-e$ et N/Z ions (supposés au repos) de charge Ze dans un volume V. On note, $n = N/V = \overline{d}^{-3}$ et $q^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$.

1.1 Pulsation de plasma

On suppose que la température T est nulle.

a) Montrer que l'on ne peut définir qu'une seule pulsation caractérisitique, ω_p, à partir de n, q et m.

b) Dans le cas d'un milieu dense avec un électron libre par atome, donner l'ordre de grandeur de la pulsation plasma ω_p en fonction des unités atomiques. A quel domaine de fréquences correspond-elle?

c) A quel type de phénomène correspond la pulsation plasma? Comment l'engendrer? Pourquoi les alcalins sont-ils transparents dans l'ultraviolet?

1.2 Longueur de Debye

On considère à présent $T \neq 0$ avec $kT \gg q^2/\overline{d}$. On définit la longueur de Debye λ_D par $\lambda_D^2 = kT/nq^2$.

a) Le nombre d'électrons dans la sphère de rayon λ_D est-il important? Quel est l'ordre de grandeur des fluctuations de ce nombre et donc des fluctuations de charge correspondantes.

b) En déduire une interprétation physique pour la longueur de Debye. Pourquoi est-ce la longueur d'écrantage électrostatique?

2 Fluctuations

2.1 Loi de Planck

On considère un gaz de photons contenu dans un volume V en équilibre à température T. On note $u(T)$ l'énergie par unité de volume et $u_\nu(\nu, T)d\nu$, l'énergie par unité de volume entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$.

a) Donner la forme générale de l'expression de $u_\nu(\nu, T)$ par analyse dimensionnelle.

b) Que devient cette expression si l'on ne prend pas en compte la constante de Planck? Montrer que l'on retrouve le résultat donné par l'équipartition de l'énergie entre modes.

2.2 Bruit thermique

On considère une résistance de conductance $G = 1/R$ en équilibre thermique à la température T. En raison des fluctuations thermique du mouvement des électrons, le courant que l'on observerait si la résistance était en court-circuit comporterait des fluctuations de valeur moyenne nulle mais de variance non nulle $\langle I^2 \rangle$. On définit la densité spectrale $|\hat{I}(\nu)|^2$ de ces fluctuations par

$$\langle I^2 \rangle = \int_0^\infty |\hat{I}(\nu)|^2 d\nu. \tag{1}$$

Dans cette première partie, on ne considère pas de grandeur microscopique car on suppose qu'elles sont prises en compte dans l'expression de R.

a) Donner l'expression de la densité spectrale par analyse dimensionnelle.

b) De même, en boucle ouverte, la tension mesurée aux bornes de la résistance fluctue. On définit de façon identique sa densité spectrale $|\hat{V}(\nu)|^2$. Donner son expression.

c) Afin de calculer la constante de proportionalité qui reste à déterminer dans l'expression précédente, on considère le circuit ci-dessous. La tension due aux fluctuations thermiques y est représentée par le générateur V. La résistance est bouclée sur un circuit résonant qui va filtrer toutes les fréquences du bruit thermique sauf ν_0.

Montrer que l'on a

$$|\hat{V}_C(\nu)|^2 = \frac{|\hat{V}(\nu)|^2}{1 + R^2 \left(2\pi\nu C - \frac{1}{2\pi\nu L}\right)^2},$$

où $\hat{V}_C(\nu)$ est la composante de Fourier de la tension aux bornes de la capacité.
Quelle relation impose le théorème d'équipartition de l'énergie pour l'énergie électrostatique moyenne de la capacité?
On suppose que la bande passante du filtre est très étroite par rapport à la bande de fréquences excitées par le bruit thermique. En déduire l'expression de $|\hat{V}(\nu_0)|^2$.

d) Une autre façon de retrouver ce résultat consiste à relier deux résistances R identiques par une ligne électrique de longueur L.

On considère la ligne seule. Donner l'expression des fréquences de résonance ν des ondes électromagnétiques stationnaires en fonction de c, L et d'un entier n.
Combien de modes a-t-on dans une bande de fréquences de grande largeur $\Delta\nu$? Quelle est l'énergie correspondante à la limite classique?
On ferme la ligne sur deux résistances R égale à l'impédance itérative de la ligne. L'énergie de la ligne est donc intégralement absorbée par les résistances sans réflexion. L'ensemble restant isotherme, quelle est la puissance fournie par chaque résistance à la ligne.
En déduire la variance des fluctuations de courant dans la bande de fréquences $\Delta\nu$ puis celle des fluctuations de tension.

e) Le bruit thermique peut-il posséder une densité spectrale indépendante de la fréquence à toute fréquence? Donner différentes bornes supérieures pour ce comportement

- en faisant intervenir la constante de Planck,
- en faisant intervenir le temps caractéristique τ de collision pour les électrons libres de la résistance,
- en faisant intervenir une inductance parasite L_R en série avec R.

Quelle est la borne qui vous semble la plus restrictive?
Une résistance R implique toujours une inductance parasite L_R. Donner une expression pour une borne inférieure pour L_R.

2.3 Bruit de grenaille

On considère les fluctuations de courant dans un tube composé d'une cathode chauffée émettant des électrons attirés par l'anode. On cherche à évaluer la densité spectrale des fluctuations qui résultent du caractère corpusculaire des charges $-e$.

a) Donner la forme générale de l'expression de la densité spectrale en fonction du courant électrique moyen $\langle I \rangle$, de la charge e et de ν par analyse dimensionnelle.

b) Afin de déterminer le comportement limite de la fonction inconnue dans l'expression précédente, on suppose que les charges traversent le tube très rapidement. Autrement dit, on ne cherche à déterminer la densité spectrale que pour des fréquences faibles par rapport à l'inverse du temps de passage. Le courant comporte donc une succession d'impulsions très brèves correspondant au passage d'un électron. Quelle est la transformée de Fourier d'un pic de Dirac? Comment se simplifie l'expression précédente?

c) On reprend l'expression obtenue au 2.2.a. On suppose que les charges $-e$ traversent la résistance à une vitesse moyenne v. On rappelle l'expression de la conductivité électrique $\sigma = ne^2\tau/m$. Pouvez-vous obtenir l'expression des fluctuations de courant associées au bruit de grenaille à partir de celle associée au bruit thermique? Comment décroit le bruit de grenaille en fonction du rapport entre libre parcourt moyen l et longueur de la résistance L?

d) On suppose à présent que la densité spectrale des fluctuations de courant ne dépend que de $\langle I \rangle$ et de ν. Quel est son comportement en fréquence?

3 Accrochage de fréquences

On se propose de montrer par méthode perturbative à échelles multiples quelques phénomènes simples résultant du couplage non-linéaire entre deux oscillateurs: l'inhibition d'un oscillateur par l'autre et l'accrochage de fréquences, c'est à dire la synchronisation d'un oscillateur par l'autre.

3.1 Oscillateur de van der Pol

$x(t)$, proportionnel au courant dans l'oscillateur électronique proposé par van der Pol, obéit à l'équation suivante:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0, \tag{2}$$

où $\omega_0 = O(1)$ et $0 < \epsilon \ll 1$.

On suppose $x \approx 0$ et on cherche des solutions (transitoires) sous la forme $x \propto \exp st$. Donner l'expression de s à l'ordre 1 compris en ϵ. En déduire que la solution ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) est instable et que la solution proportionnelle à $\exp st$ possède deux échelles de temps, t et $T = \epsilon t$.

3.2 Suppression de l'oscillation par un forçage extérieur

On force périodiquement l'oscillateur de van der Pol:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = f sin \Omega t. \tag{3}$$

On suppose tout d'abord, $f = O(1)$ et $\Omega \neq \omega_0$. On cherche une solution approchée sous la forme

$$x(t) = y(t, T) = y_0(t, T) + \epsilon y_1(t, T) + \cdots \tag{4}$$

a) Ecrire l'équation pour y_0. Montrer que la solution comporte deux fréquences d'oscillation distinctes.

b) Ecrire l'équation pour y_1. Montrer que la condition de solvabilité permet de déterminer une équation pour l'amplitude complexe $A(T)$ de l'oscillation à pulsation ω_0.

c) Calculer l'amplitude d'oscillation $|A|$ pour $f = 0$. Monter que pour f supérieure à une valeur critique que l'on déterminera, l'oscillation à pulsation ω_0 est inhibée.

3.3 Accrochage de fréquences

On considère à présent une perturbation de l'oscillateur de van der Pol forcé de la forme,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon x^2 + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = f sin \Omega t. \tag{5}$$

avec $\Omega = 2\omega_0 + \epsilon\nu$ ($\nu = O(1)$).

a) Ecrire l'équation pour y à l'ordre ϵ compris en fonction des paramètres Ω, ν et f. Résoudre pour y_0.

b) En utilisant la condition de solvabilité à l'ordre suivant, trouver l'équation pour l'amplitude complexe $B(T)$ de l'oscillation à pulsation $\Omega/2$.

c) Montrer que cette équation admet à la fois des solutions stationaires, i.e. telles que x est périodique, et des solutions oscillantes, i. e. telles que x est non périodique. Donner la condition sur f et ν pour que les solutions stationaires ne soient pas possibles.

3.4 Equation d'amplitude pour une bifurcation de Hopf en présence d'un forçage externe

a) Pour quelle valeur de ϵ la solution ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) de l'équation (2) subit-elle une bifurcation de Hopf?

b) Au voisinage de la bifurcation, on considère

$$x(t) = A(T) \exp i\omega_0 t + c.c. + \cdots, \tag{6}$$

où c.c. désigne le complexe conjugué de l'expression qui précède et on cherche l'équation d'amplitude pour $A(T)$. Quelle est la symétrie brisée à la bifurcation? Montrer que celle-ci détermine la forme de l'équation d'amplitude pour $A(T)$.

c) On considère à présent la même bifurcation en présence d'un petit forçage externe à la pulsation $\Omega = \frac{n}{p}\omega_0 + \epsilon\nu$, avec n et p entiers, et on écrit

$$x(t) = A(T) \exp i\omega_0 t + c.c. + \cdots = B(T) \exp i\frac{p}{n}\Omega t + c.c. + \cdots. \tag{7}$$

Quelle est la symétrie discrète brisé à la bifurcation? Montrer que l'équation d'amplitude pour $B(T)$ admet en plus des termes existant dans l'équation pour $A(T)$, un terme impliquant le complexe conjugué de B, $\overline{B}$, à une puissance que l'on déterminera en fonction de n. Montrer que p doit intervenir dans le coefficient de ce terme.