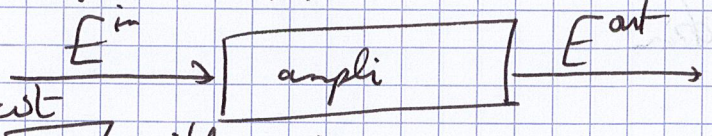
Physique des lasers

I Intro : ingrédients de base d'un laser

1 - Un amplificateur optique

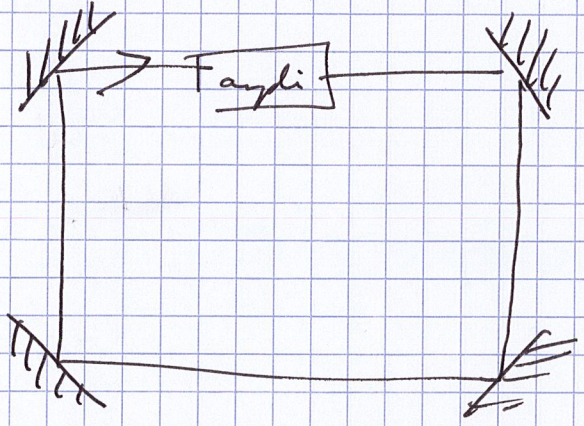
$E^{in} = E_0 \cos \omega t$



$E^{out} = \sqrt{G}\, e^{i\varphi} E^{in}$

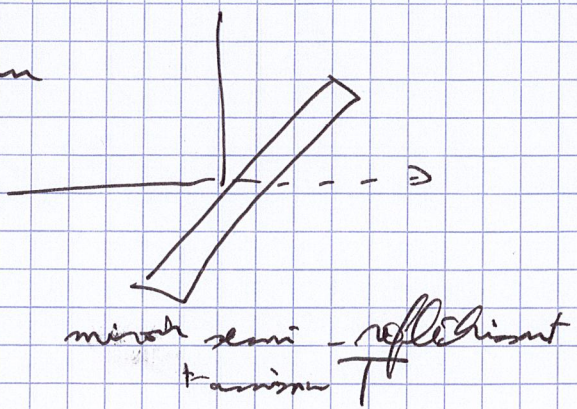
en général G et φ sont fonction de ω

2 - Une boucle de rétroaction



Cavité de type Fabry-Pérot de longueur L

3 - Un couplage avec l'extérieur



L'effet laser en 3 équations

- Equilibre gain / pertes

$$G(E^{in}(t)) - 1 = A + T$$

Importance de la non linéarité de $G(I)$

- Conservation de la phase sur un tour

$$\omega_m \frac{L}{c} = 2\pi m \quad \rightarrow \text{modes } \omega_m$$

- Conservation de la distribution transverse du champ

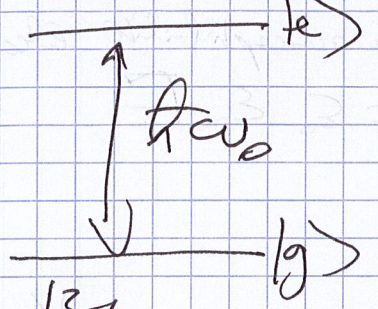
Un mécanisme de focalisation doit compenser l'étalement du faisceau par diffraction

II) Mécanisme de l'amplification optique

1_ Interaction lumière matière : modèle classique

Modèle le plus simple de matière : un atome

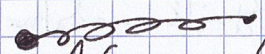
a_ Electron élastiquement lié



représenté par

$\frac{\omega_0}{2\pi} \sim 3\times10^{14}\,Hz$

$\Gamma/2\pi \sim 10\,MHz$



fréquence de résonance ω_0

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\Gamma\frac{d\vec{r}}{dt} - eE\cos(\omega t - kz)\vec{\varepsilon}$$

En notation complexe, et avec $\vec{p} = -e\vec{E}$:

$$\vec{p} = \frac{e^2\vec{E}}{m(\omega_0^2-\omega^2) - im\Gamma\omega}$$

Proche de résonance

$$\vec{p} = \frac{e^2\vec{E}}{2m\omega_0\left[(\omega_0-\omega) - i\frac{\Gamma}{2}\right]}$$

On introduit la polarisabilité $\vec{p} = \varepsilon_0\alpha\vec{E}$

$$\alpha = \alpha' + i\alpha''$$

$$\alpha' = \frac{e^2(\omega_0-\omega)}{2m\omega_0\varepsilon_0}\,\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4}$$

$$\alpha'' = \frac{e^2\Gamma}{4m\omega_0\varepsilon_0}\,\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4}$$

6- Propagation d'une onde dans un milieu dispersif

Densité électronique n_{at} → densité de polarisation $\vec{P} = n_{at}\vec{p}$

$$\vec{P} = n_{at}\varepsilon_0 \alpha \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

↳ susceptibilité électrique

Permittivité relative : $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi = \underline{n}^2$$

Pour un milieu dilué $\chi \ll 1$ et $\underline{n} \simeq 1 + \frac{\chi}{2}$

On introduit l'indice et la longueur d'absorption par

$$\underline{n} = n + i\frac{1}{2\xi k_0}$$

Onde plane progressive dans le milieu :

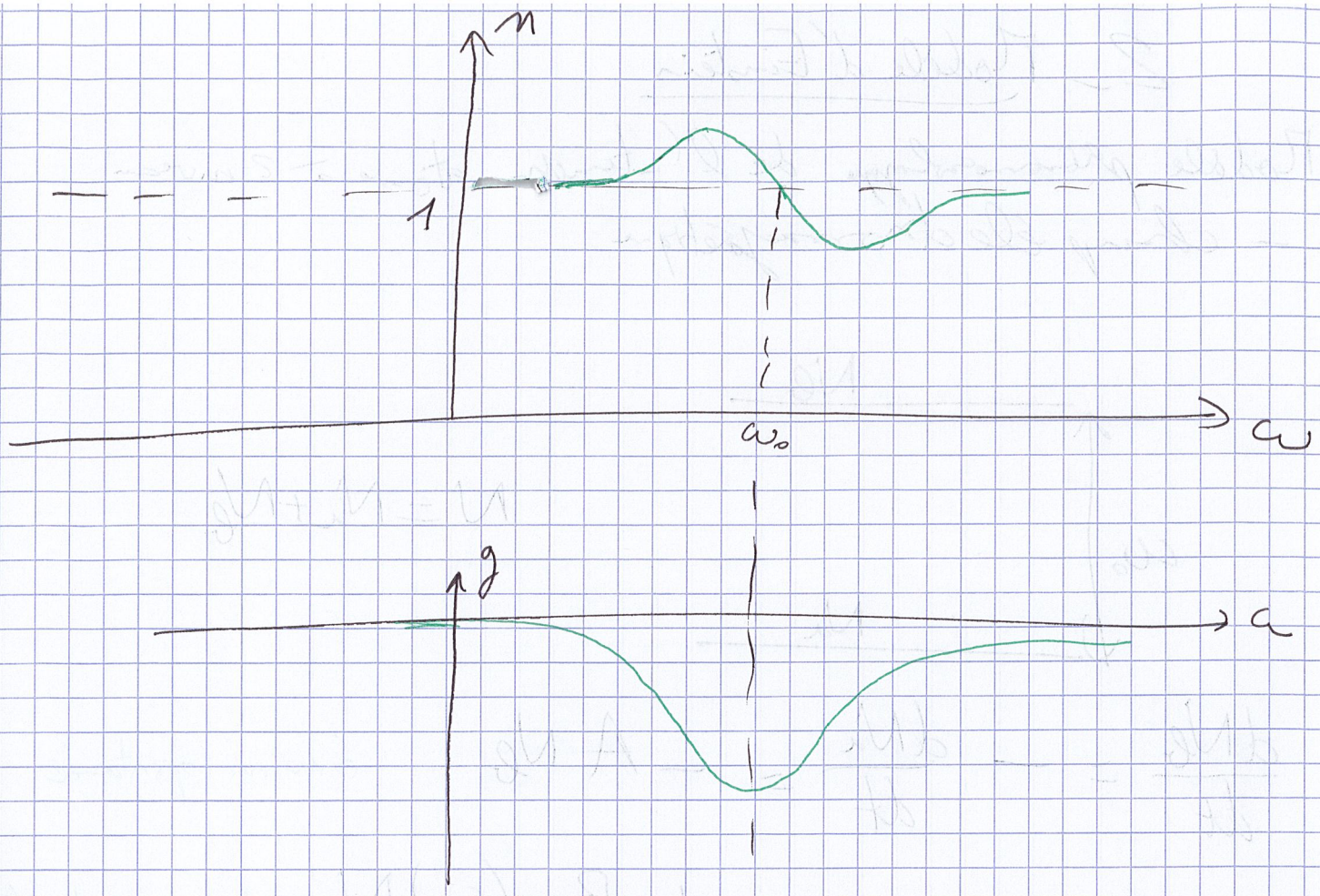
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\vec{\varepsilon}$$

avec $k = n\frac{\omega}{c}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(nk_0 z - \omega t)}\vec{\varepsilon}\, e^{-\frac{z}{2\xi}}$$

Or $I = I(\vec{r},t) = I(z,t)\, e^{-z/\xi}$

On pose aussi le gain en intensité $g = \frac{1}{\xi}$



- le milieu est toujours absorbant!
- Indice < 1 : vitesse de phase $v_\varphi > c$

Plus grave :

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

vitesse $> c$

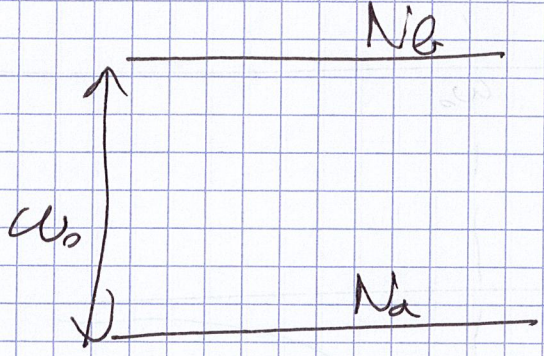
Mais dans ce cas il y a beaucoup d'absorption en même temps

On peut montrer que cela n'implique pas $v_{information} > c$

Limitations du modèle : pas d'effet de saturation dus à l'excitabilité finie d'un atome à 2 niveaux

2- Modèle d'Einstein

Modèle phénoménologique de l'interaction atome à 2 niveau
- champ électromagnétique



$$N = N_a + N_b$$

$$\frac{dN_b}{dt} = -\frac{dN_a}{dt} = -A N_b \quad \text{émission spontanée}$$

$$+ B u(\omega_0) N_a \quad \text{émission stimulée par densité photon à } \omega_0$$

$$- B u(\omega_0) N_b \quad \text{absorption}$$

Intérêt de ce modèle : raisonnement thermique
A température finie :

$$\begin{cases} \frac{dN_a}{dt} = 0 \\ N_b = N_a e^{-\hbar\omega_0/k_B T} \end{cases}$$

D'où $A + B u = u B e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}}$

$$u = \frac{A}{B} \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1}$$

à comparer à la loi de Planck du corps noir

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega_0^3}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1}$$

Cette loi a permis de résoudre la divergence de la théorie classique du champ e.m. (chaque mode peuplé à une énergie $\frac{k_B T}{2}$ $\Rightarrow$ divergence de l'énergie)

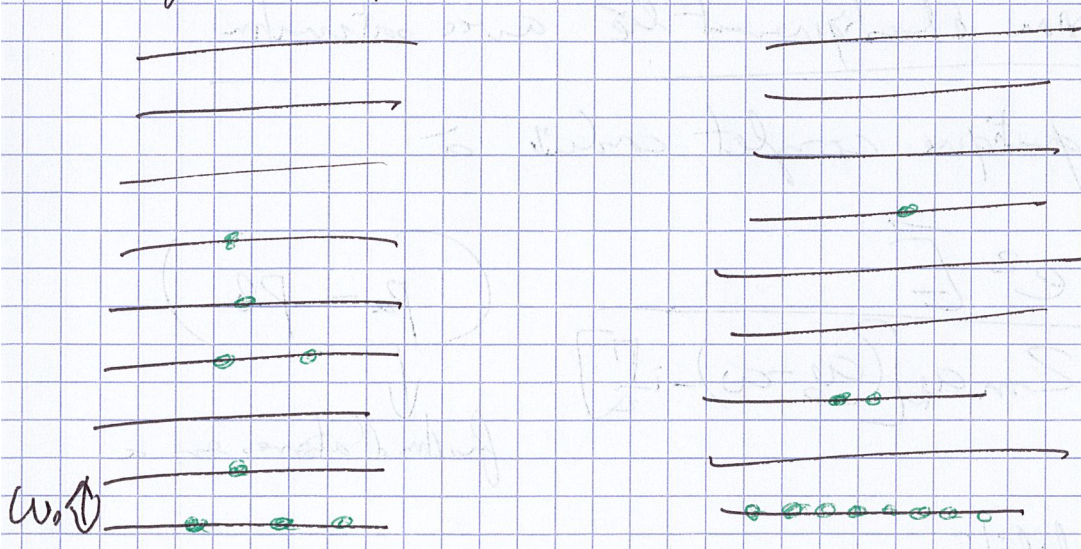
Cette loi est extrêmement bien vérifiée pour le rayonnement fossile de l'univers à 2,7 K

On a donc $\frac{A}{B} = \frac{\hbar \omega_0^3}{\pi^2 c^3}$

Modèle quantique absorption lumière : $B = \frac{\pi d^2}{3 \hbar^2 \varepsilon_0}$.

Origine physique de l'émission stimulée : amplification bosonique

Manifestation spectaculaire : condensation de Bose-Einstein



gaz thermique de Boltzmann

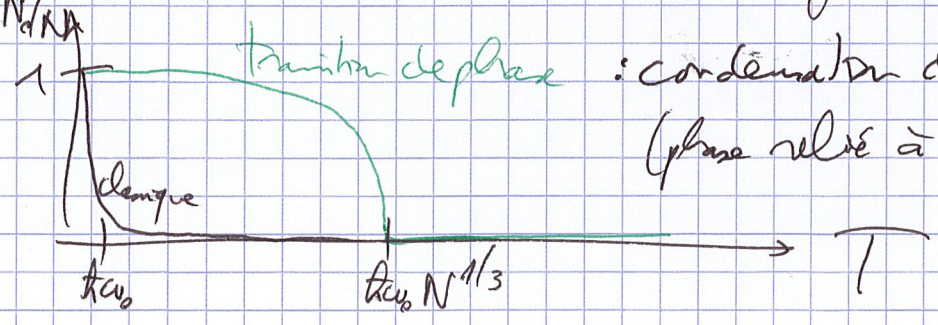
T grand

$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$

gaz de Bose

$T < \hbar \omega_0 N^{1/3}$

les particules s'accumulent dans le fondamental



transition de phase : condensation de Bose-Einstein (phase reliée à la superfluidité)

b- Amplification dans le modèle d'Einstein

La lumière est amplifiée si $\frac{dN_a}{dt} > 0$,

soit $A N_b - B\nu (N_a - N_b) > 0$

On pose $x = \frac{N_b}{N}$

$$x > \frac{B\nu}{2B\nu + A}$$

Pour $B\nu \gg A$:

$x > \frac{1}{2}$: il faut une inversion de population

Modèle de l'électron élastiquement lié avec saturation

Un traitement quantique complet conduit à

$$\vec{p} = \frac{e^2 \vec{E}}{2m\omega_0 \left[(\omega_0 - \omega) - i\frac{\Gamma'}{2}\right]} \underbrace{(p_a - p_b)}_{\text{fraction d'atomes en a}}$$

D'où la polarisabilité

$$\alpha = \frac{e^2}{2m\varepsilon_0\omega_0 \left[(\omega_0 - \omega) - i\frac{\Gamma}{2}\right]}$$

Evolution de p_b :

$$\frac{dp_b}{dt} = -\Gamma p_b - \underbrace{\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\vec{p}\cdot\vec{E}^{*}/\hbar\omega_0}_{\text{puissance de l'absorption lumière par atomes en } \frac{\alpha'' E_0^2}{\hbar\omega_0}}$$

$$= -\Gamma p_b - \underbrace{\frac{e^2\Gamma}{4m\hbar\omega_0^2\varepsilon_0}}_{\text{on pose } = \Gamma\Omega_1^2/2} E_0^2 \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}(p_a-p_b)$$

C'est la même expression que pour le modèle d'Einstein !!!

On pose Ω_1 : pulsation de Rabi

En régime stationnaire :

$$p_b = -\frac{\Omega_1^2/2}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}(p_a-p_b)$$

D'où $p_a - p_b = \dfrac{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+\Omega_1^2}$

On a toujours $p_a > p_b$, mais

$p_a \simeq p_b \simeq 1/2$ pour Ω_1 grand !!

A résonance : $p_a - p_b = \dfrac{1}{1+\left(\frac{2\Omega_1}{\Gamma}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\frac{I}{I_{sat}}}$

On a une susceptibilité non linéaire

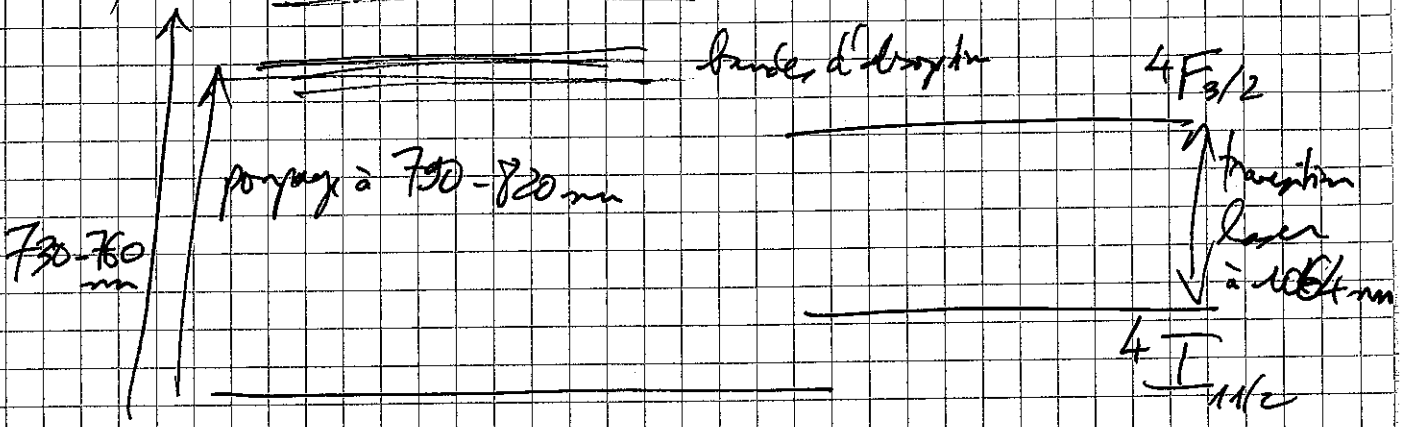
$$\chi = \chi_{lin}\frac{1}{1+I/I_{sat}}$$

Mécanismes de pompage et zoologie des lasers

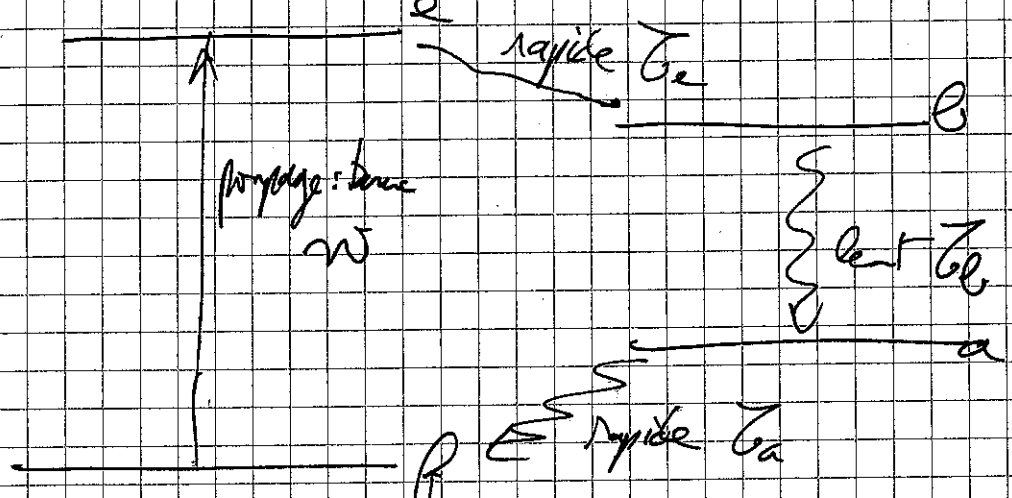
• Laser à cristal dopé

Une matrice cristalline transparente $Y_3Al_5O_{12}$ (grenat d'yttrium-aluminium) dans laquelle un dopant (le néodyme Nd) remplace une partie de l'yttrium (typiquement 1%)

Le néodyme a comporté comme un atome "isolé" (les niveaux quantiques sont modifiés mais gardent un sens dans une matrice cristalline)



Modèle à 4 niveaux



$$\begin{cases} \dfrac{dN_e}{dt} = w(N_f - N_e) - N_e/\tau_e \\ \dfrac{dN_b}{dt} = \dfrac{N_e}{\tau_e} - \dfrac{N_b}{\tau_b} \\ \dfrac{dN_a}{dt} = \dfrac{N_b}{\tau_b} - \dfrac{N_a}{\tau_a} \\ N = N_a + N_b + N_f + N_e \end{cases}$$

En régime permanent :

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{\tau_b}{\tau_a} \gg 1$$

$$\frac{N_e}{N_b} = \frac{\tau_e}{\tau_b} \ll 1$$

$w(N_f - N_e) = \dfrac{N_e}{\tau_e}$ (les deux pop importantes sont N_b et N_f)

Quantité intéressante : $\dfrac{N_b - N_a}{N} \simeq \dfrac{N_b}{N_b + N_f}$

$$w N_f = \frac{N_e}{\tau_e} = \frac{N_b}{\tau_b}$$

D'où $\dfrac{N_b - N_a}{N} = \dfrac{w\tau_b}{1 + w\tau_b}$

On a clairement $g > 0$.

On a négligé l'effet d'une forte saturation lumineuse

On peut montrer qu'on a toujours

$$P_a - P_b = \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \Omega_R^2} \underbrace{\left[P_a^{(0)} - P_b^{(0)} \right]}_{\text{valeurs pour } I = 0}$$

D'où $$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

Autres lasers sur le même type :

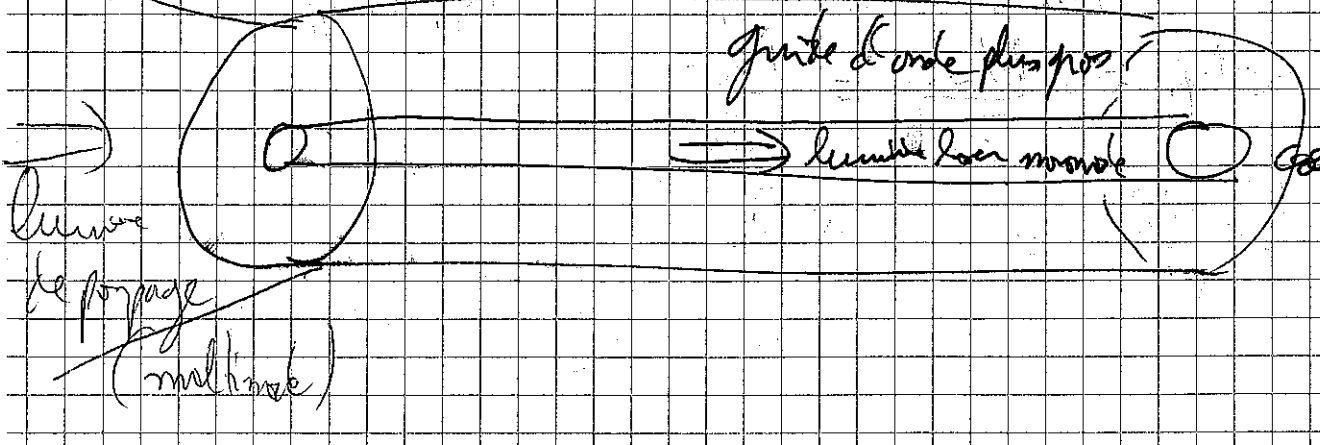
- He-Ne laser : mélange gazeux de Ne et He pompé par décharge électrique
- Ti:Sa laser : saphir dopé par du titane

On peut obtenir un effet laser avec une gamme 650 à 1100 nm

- Er:Yag :

- Lasers à fibre

Le milieu amplificateur est le cœur d'une fibre optique dopée par une terre rare : Erbium, Ytterbium, etc.



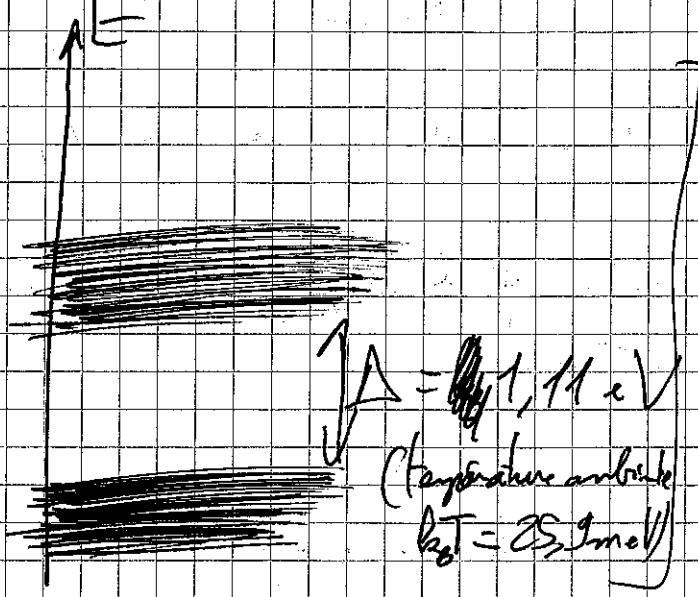
• Diode laser

Structure de base : une jonction de semi-conducteurs

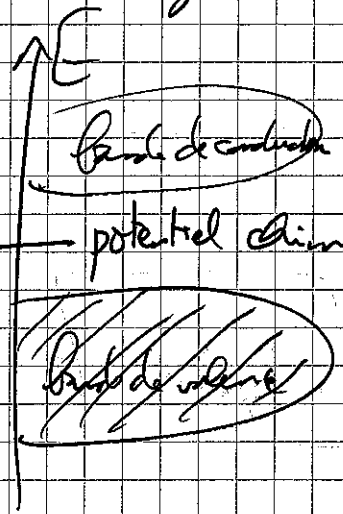
Qu'est-ce qu'un semi conducteur ?

Structure de bandes des siliciums

Un cristal très pur de silicium : structure des niveaux électroniques



les électrons forment une mer de Fermi et remplissent en ↑ en les niveaux d'énergie

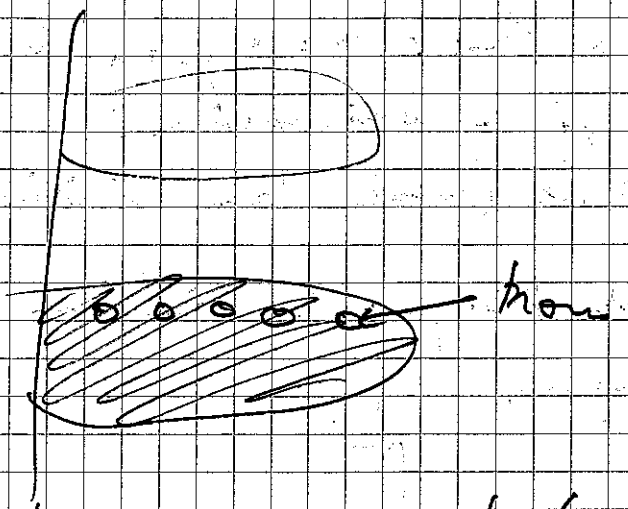


le semi-conducteur est dans ce cas isolant

le cristal de silicium peut être dopé par un élément apportant de e⁻ supplémentaire ou le contraire.

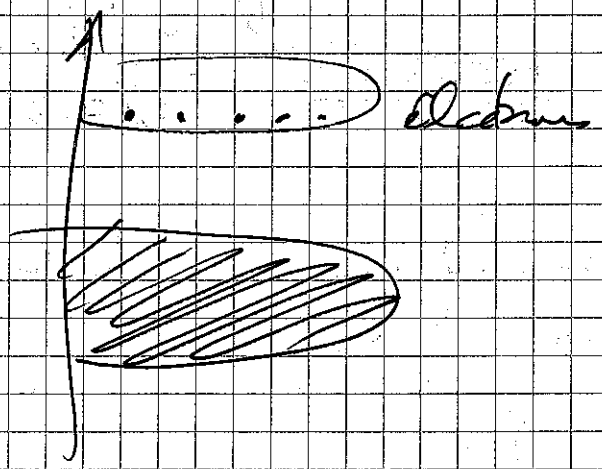
Dopants ~~accepteurs~~ : groupe III (ex : Bore) → semi conducteur dopé "p"
apportant défaut d'électron

Type "p" :

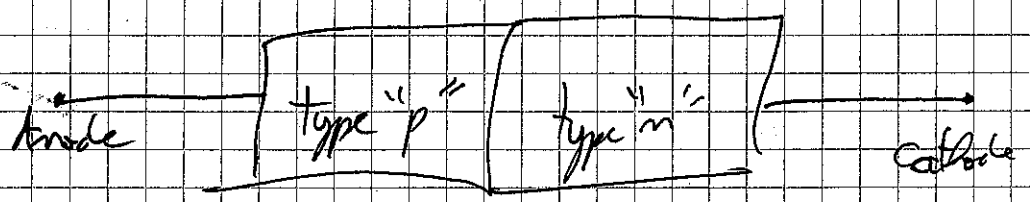


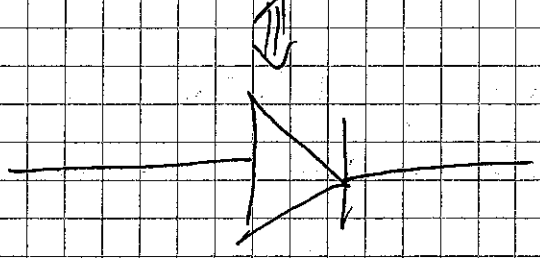
le gaz d'électrons a disparu comme un gaz de trous dilués

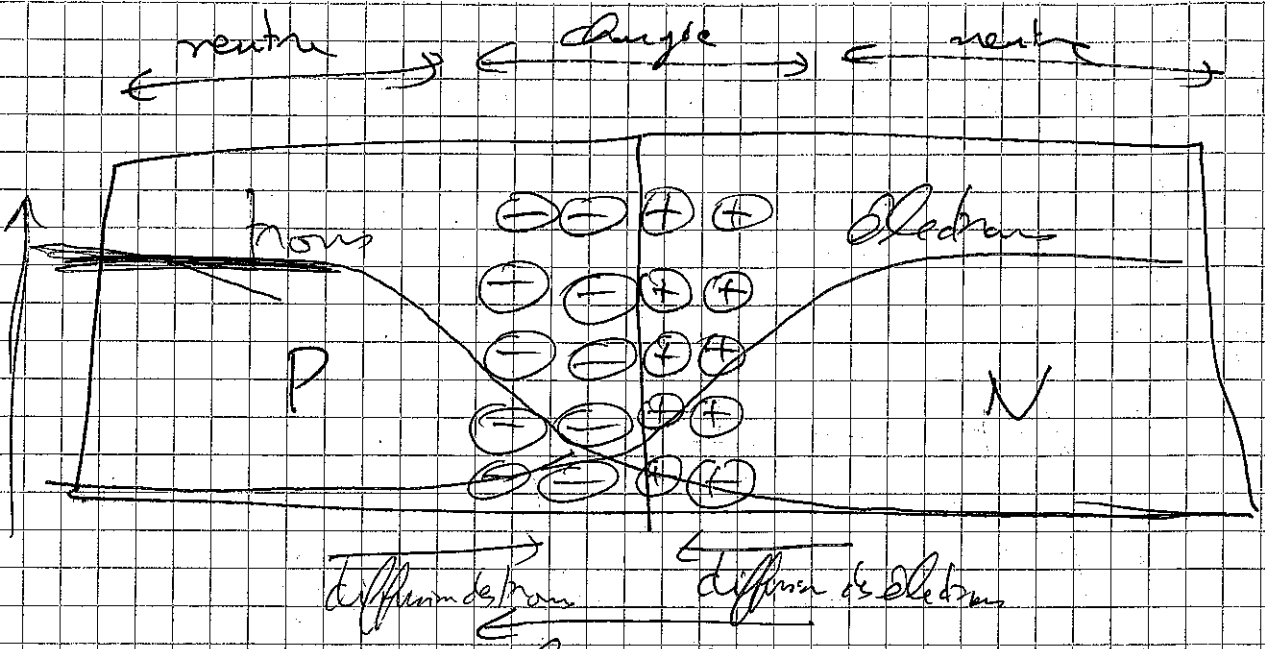
Type "n" : élément de dopage dans le groupe V
(ex : phosphore)



Jonction p-n

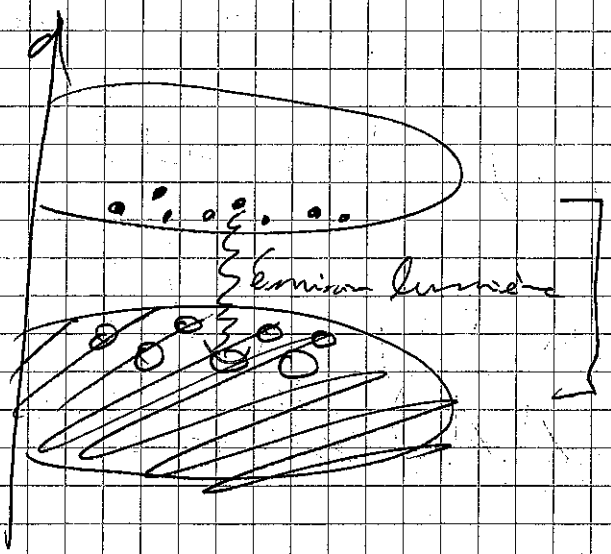




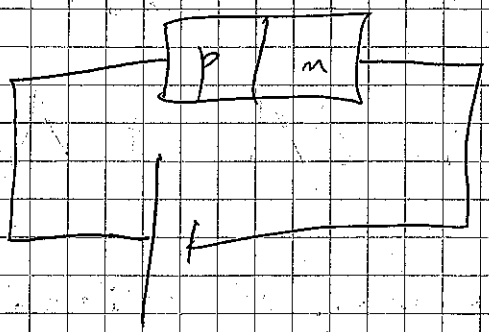


La diffusion des trous/électrons établit une zone de charge et un champ électrique stationnaire qui compense la diffusion

Au centre : les électrons et les trous sont présents dans la même région



Il faut un miroir



pour injecter en permanence des trous dans p et des e dans n pour continuer à émettre de la lumière

III) Modes transverses d'un faisceau laser

1- Modes gaussiens du champ e.m.

Equation d'onde du champ e.m.

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Onde plane.

$$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Pour une propagation selon z :

$$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\boxed{\omega = ck}$$

Problème : l'intensité est uniforme et d'extension spatiale infinie.

On veut écrire une onde avec une enveloppe lentement variable

$$\vec{E} = A(\vec{r})\, e^{i(kz - \omega t)}$$

Alors $\Delta \vec{E} = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) \vec{E}$

$$= \left[\Delta A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A\right] e^{i(kz - \omega t)}$$

Comme A est lentement variable : $\partial_z^2 A \ll k \frac{\partial A}{\partial z}$

D'où l'équation

$$\boxed{2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_\perp A = 0}$$

Ceci n'est rien d'autre que l'éq. de Schrödinger à 2D !

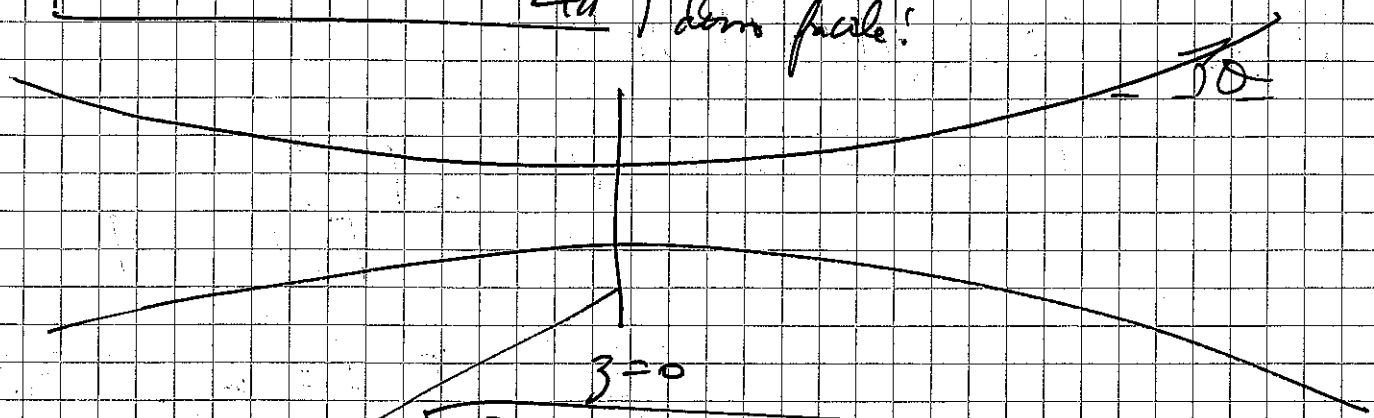
~~Cherchons une solution correspondant à un faisceau [illegible]~~

L'analogie avec Schrödinger explique la nécessaire divergence d'un faisceau

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$ se traduit par

$$\boxed{\Delta r \, \Delta \theta \geq \frac{\lambda}{4\pi}}$$ où

démo facile !



$$\Delta r = \sqrt{\frac{\int (x^2) \, I(x,y,z=0) \, dx\,dy}{\int I \, dx\,dy}}$$

et $$\Delta r(z) = \frac{\int (x^2) \, I(x,y,z) \, dx\,dy}{\int I \, dx\,dy}$$

$$\Delta\theta = \lim_{z \to \infty} \frac{\Delta r(z)}{z}$$

Un résultat de transformée de Fourier dit que :

$$\Delta x \, \Delta\theta = \frac{1}{4\pi} \quad \text{pour un profil gaussien}$$

On cherche donc A sous la forme

$$A(x,z) = u(z)\, e^{\pm i \frac{k x^2}{2q(z)}} \qquad q(z) \in \mathbb{C}$$

↳ paramètre complexe

$$\Delta_\perp f = \frac{1}{r}\partial_r f + \partial_r^2 f$$

$$\Delta_\perp A - 2ik\,\partial_z A + \Delta_\perp A = 0$$

$$0 = 2ik\,u'(z) - 2k\frac{q'(z)}{q^2(z)}\frac{ikx^2}{2q} + \frac{1}{x}\frac{ikx}{q} + \frac{ik}{2q} * -\frac{k^2x^2}{q^2}$$

Pour annuler les termes en x^2 il faut $q = 1$, soit

$$q(z) = z - z_0 \mp i z_R$$

↓ position du waist minimal

↳ z_R : longueur de Rayleigh

On trouve de même

$$u' + u/q = 0 \quad , \text{ qui a pour solution } u = \frac{C}{q}$$

On pose $C = \frac{i z_R}{A_0}$

Alors $u = \frac{i A_0 z_R}{z - z_0 + i z_R}$

$$A(x,z) = \frac{i A_0 z_R}{z - z_0 + i z_R}\, e^{-i\frac{kx^2}{2(z-z_0+iz_R)}}$$

On décompose en module - argument

$$A(r,z) = \frac{A_0}{1+\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)^2} e^{-\frac{k}{2}\frac{r^2}{z_R\left(1+\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)^2\right)}}$$

$$e^{i\left[\frac{k r^2}{2\left[(z-z_0)+z_R^2/(z-z_0)\right]} \mp \varphi(z)\right]}$$

$$e^{i\varphi(z)} = \frac{1+i(z-z_0)/z_R}{\sqrt{1+(z-z_0)^2/z_R^2}}, \text{ donc } \tan\varphi = \frac{z-z_0}{z_R}$$

On définit le waist (ou col) du faisceau par

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{k w_0^2}{2}$$

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\frac{(z-z_0)^2}{z_R^2}}$$

et le rayon de courbure

$$R(z) = \frac{z_R^2}{z-z_0} + z - z_0$$

φ est la phase de Gouy

A la fin on a l'expression simplifiée

$$A(r,z) = \frac{w_0}{w(z)} A_0 e^{-i\varphi(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{-i\frac{k r^2}{2R(z)}}$$

Le paramètre confocal est alors donné par

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Profil d'intensité

$$I(r,z) = A_0^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$$

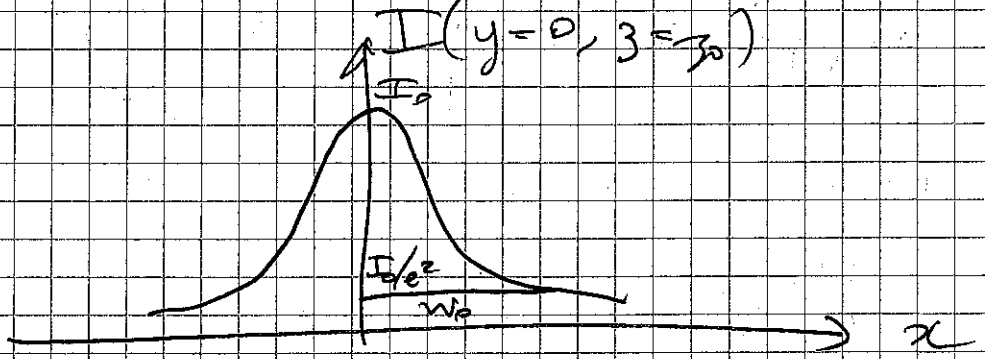
$$P_{tot} = \int 2\pi r\, dr\, I = A_0^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \pi w^2 \int du\, e^{-2u}$$

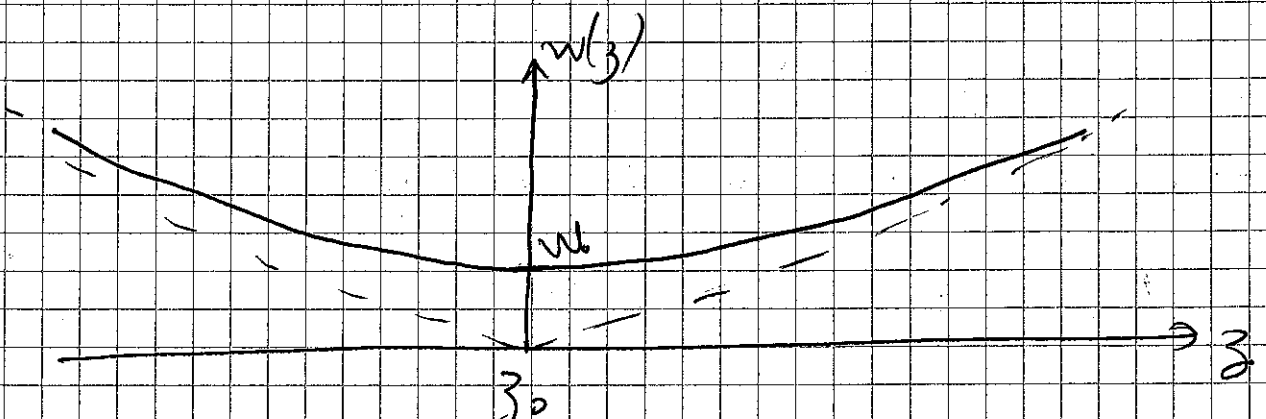
$u = \frac{r^2}{w^2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} A_0^2 w_0^2$$

P_{tot} indépendant de z : conservation énergie





Pour $z \gg z_R$

$$w(z) \simeq w_0 \frac{z}{z_R}$$

$$\simeq \Delta\theta\, z$$

avec $\Delta\theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{w_0 \lambda}{\pi w_0^2}$

$$= \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

On a $w_0 \Delta\theta \simeq \Delta r \Delta\theta = \frac{\lambda}{\pi}$.

vérifie l'égalité de Heisenberg

Interprétation de $R(z)$

Surfaces de phase constante :

$$\varphi_{tot}(r,z) = kz + \varphi(z) + k \frac{r^2}{2R(z)}$$

$\varphi(z)$: variation lente

Si on oublie la phase de Gouy

$$z + \frac{r^2}{2R(z)} = \text{Ste} = z_1$$

$$\rightarrow r \sqrt{2R(z_1)(z - z_1)}$$

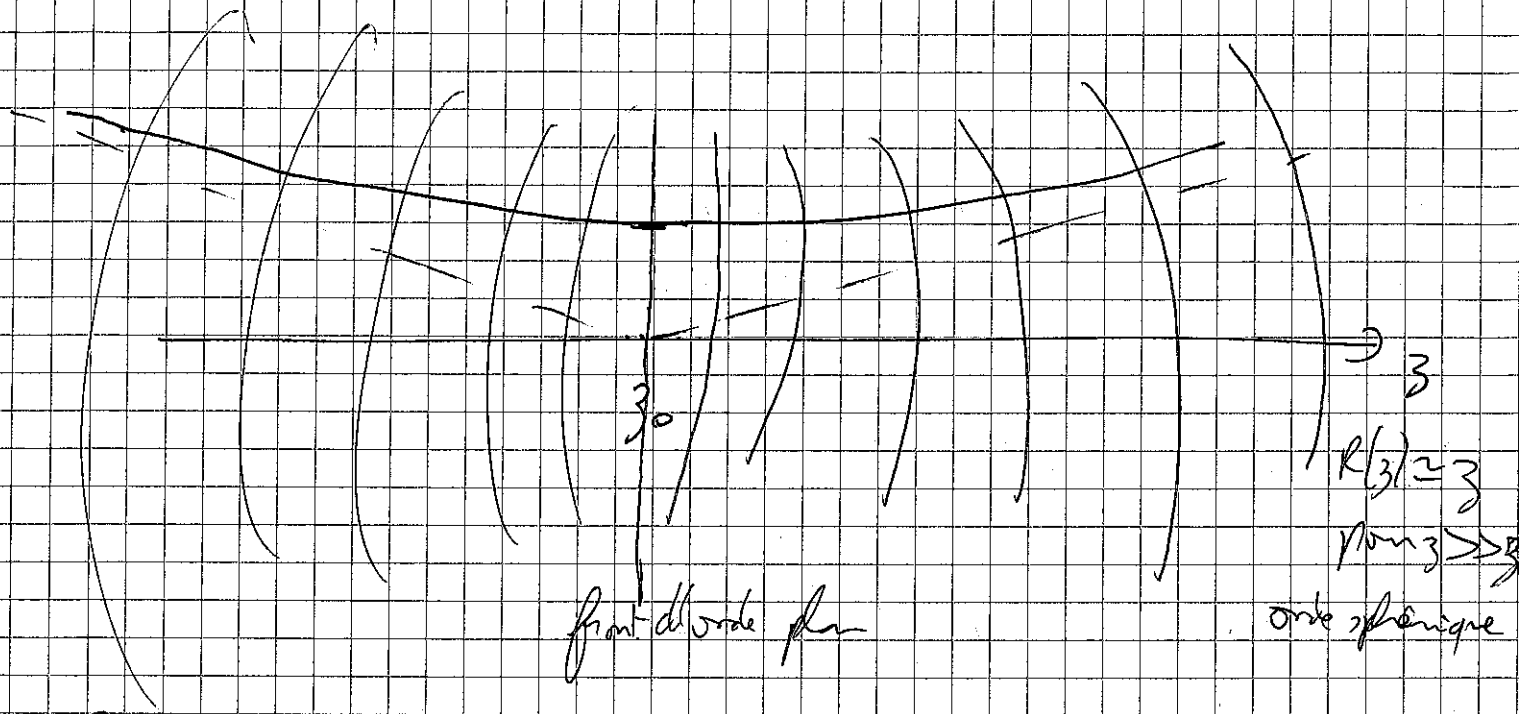
z_0 z_1

$$z(r) = z_1 - \frac{r^2}{2R_1}$$

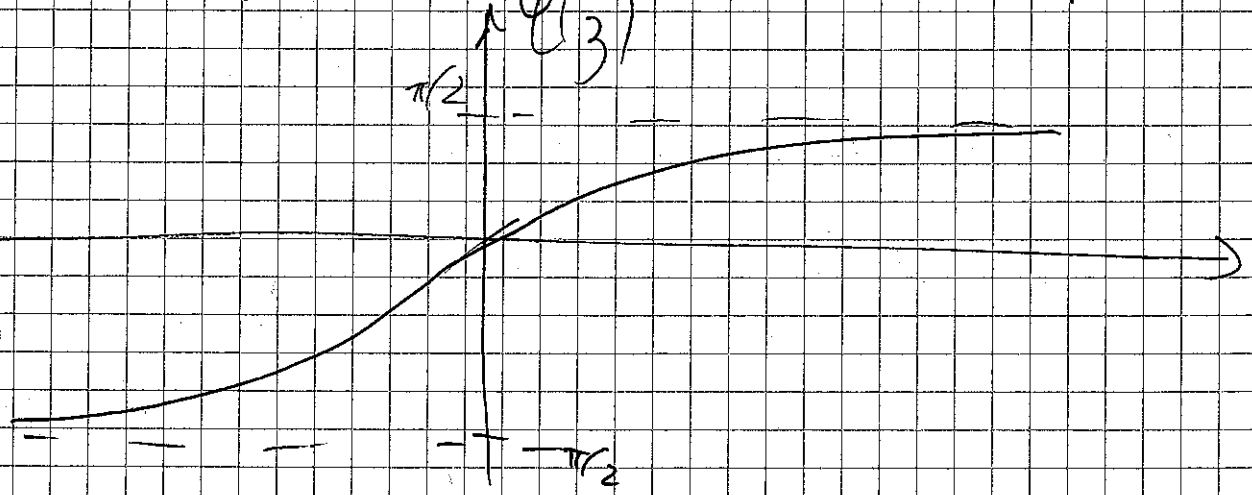
Courbure de cette courbe paramétrée

$$\chi = \frac{z''(x)}{\left[1 + (z'(x))^2\right]^{3/2}} = -\frac{1}{R_1} \quad \text{en } r=0$$

R_1 est bien le rayon de courbure des fronts d'onde



Plan de Gouy : déphasage longitudinal de l'onde



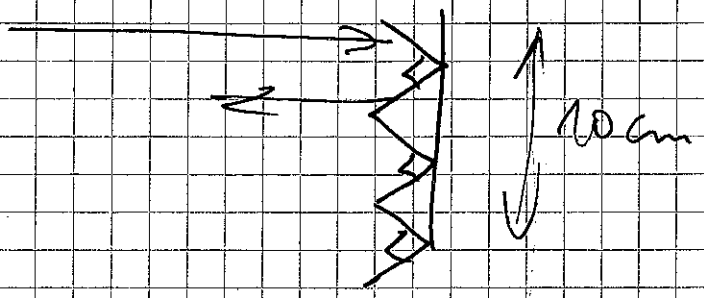
Application numérique

- longueur d'onde typique $\lambda = 0{,}5\ \mu m$ (vert)
- $w_0 = 1\ mm \Rightarrow z_R = \pi \frac{w_0^2}{\lambda} = 3 \times 0{,}6^2\ m \simeq 0{,}75\ m$

  $w_0 = 1\ \mu m \Rightarrow z_R = 0{,}75\ \mu m$!

Même distance Terre-Lune

Réseau de coins de cube



$d = 384\,000\ km$
$= 3 \times 10^5\ km$

Durée aller-retour $\tau = \frac{2d}{c} = 2 \times \frac{3 \times 10^5 \times 10^3}{3 \times 10^8} \simeq 2\ s$

Un pulse laser de 3 Joules en 4 nsec, un mast tel que $\theta = \frac{\lambda \pi}{w_0} = 1{,}2 \times 10^{-3}$

$\lambda = 694\ nm$

$\rightarrow w_0 = \frac{1}{1{,}2 \times 10^{-3}} \times 3{,}1 \times 0{,}7 \times 10^{-6} \simeq 3\ mm$

$w(d) = w_0\, \theta\, d = 3 \times 10^{-3} \times 1{,}2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{8}\ km$
$\simeq 1\ km$!

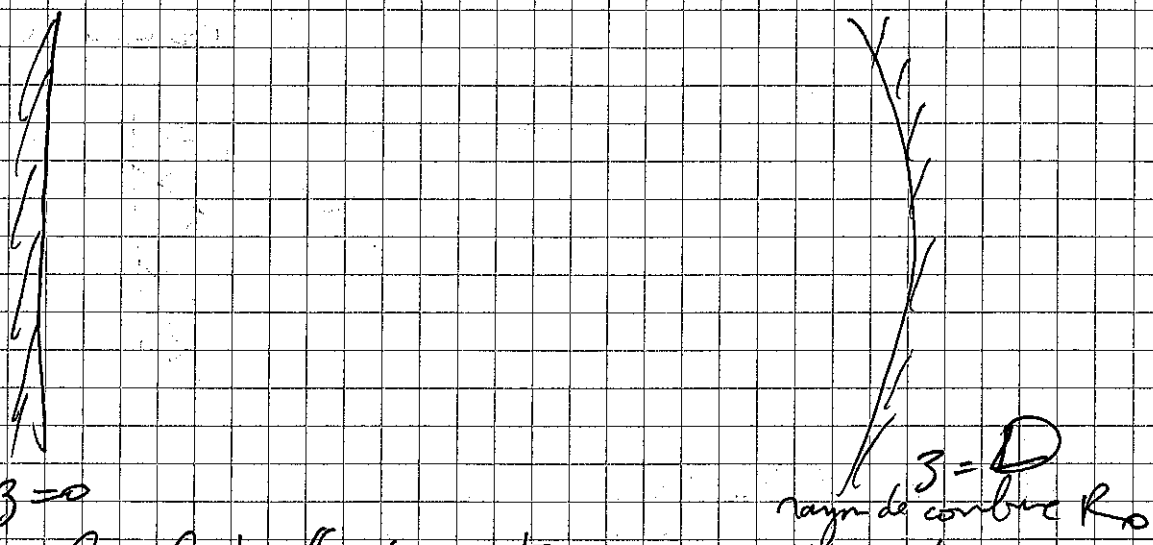
~~Nombre de photons : $N_{ph} = \frac{3}{hc/\lambda} = \frac{3}{\frac{6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0{,}7 \times 10^{-6}}} \simeq 10^{19}$ photons~~

~~Fraction nulle réflecteur : $f = \left(\frac{0{,}1}{10^3}\right)^2 = 10^{-8}$~~

2- Modes optiques dans une cavité laser

C'est clair qu'un faisceau de taille finie ne peut pas exister de manière stable dans une cavité plan-plan

Mode stable dans une cavité : cavité plan - concave

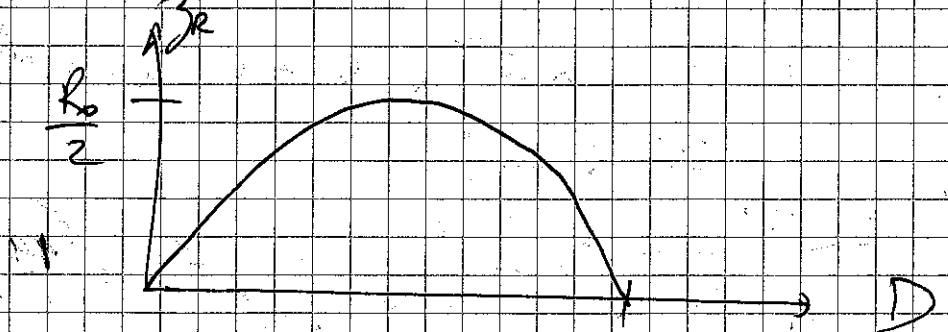


Faisceau stable : les fronts d'onde sont ~~~~ coïncidents aux miroirs

Il faut donc

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ R(D) = R_0 = D + \dfrac{z_R^2}{D} \end{cases}$$

D'où $z_R = \sqrt{D(R_0 - D)}$



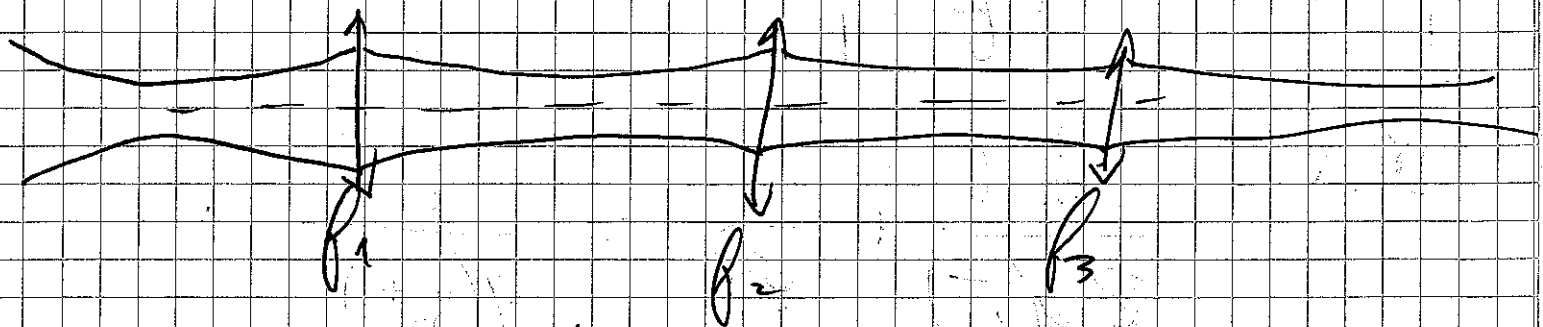
Il faut donc $D < R_0$

~~$\frac{dv}{dt}$~~

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{3k}{}} = \sqrt{\frac{2}{k}}\left[D(R_0 - D)\right]^{1/4}$$

3- Propagation d'un faisceau gaussien : matrice ABCD

Considérons un système de lentilles



Comment prédire les caractéristiques du faisceau laser après la traversée de lentilles ?

Un faisceau gaussien est caractérisé par le paramètre complexe

$$q(z) = \underbrace{z - z_0}_{\text{distance du col}} + i \underbrace{z_R}_{\text{longueur de Rayleigh}}$$

~~On suppose~~ On suppose qu'on part d'un faisceau connu en z_1 :

on connaît $q(z_1)$.

Que vaut $q(z_2)$?

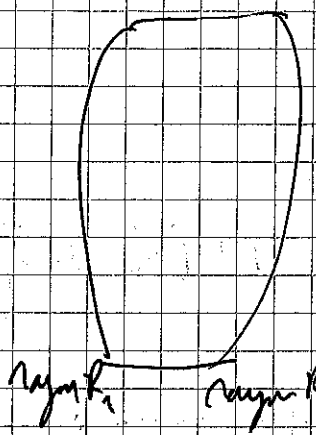
- Propagation libre

$$q(z_2) = q(z_1) + z_2 - z_1$$

- Traversée d'une lentille en z_0 : Une lentille mince de focale f a une épaisseur optique

$$E(r, z_0^-) = \frac{A}{q(z_0^-)} e^{i\frac{k r^2}{2 q(z_0^-)}}$$

$$E(r, z_0^+) = \frac{A}{q(z_0^-)} e^{i\frac{k r^2}{2 q(z_0^-)}} e^{i\,\varphi_{lens}(r)}$$



$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{k r^2}{2f}}$$

D'où $$\frac{k}{q(z_0^-)} + \frac{-1}{f} = \frac{1}{q(z_0^+)}$$

ressemble à une relation de conjugaison !!

Matrices ABCD

Dans les deux cas on peut écrire $q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}$

Propagation libre : $\begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

lentille mince $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

Pour une lentille convergente $f < 0$, $f' = -f > 0$

Si on a deux éléments à la suite, décrits par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{A' q_2 + B'}{C' q_2 + D'}$$

$$= \frac{A' \dfrac{A q_1 + B}{C q_1 + D} + B'}{C' \dfrac{A q_1 + B}{C q_1 + D} + D'}$$

$$= \frac{A A' q_1 + B A' + C B' q_1 + D B'}{A C' q_1 + B C' + C D' q_1 + D D'}$$

$$= \frac{A'' q_1 + B''}{C'' q_1 + D''}$$

$$\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A A' + C B' & B A' + D B' \\ A C' + C D' & B C' + D D' \end{pmatrix}$$

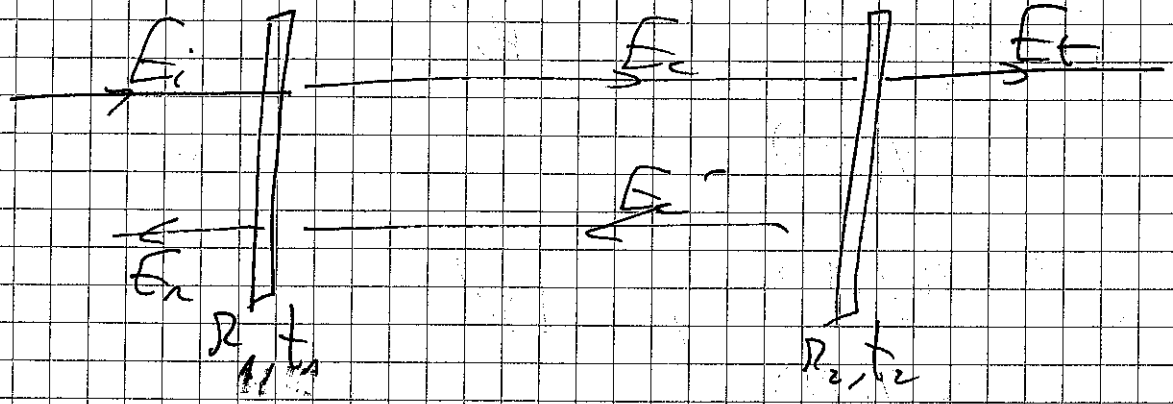
$$= \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

La propagation revient à faire du produit de matrice ABCD !

III) Laser en régime stationnaire

1- Mode propre longitudinal d'une cavité Fabry Pérot

Considérons deux miroirs plans formant une cavité



Combien vaut le champ intracavité ?

On a
$$\begin{cases} E_c = t_1 E_i - R_1 E_c' \\ E_r = R_1 E_i + t_1 E_c' \end{cases}$$

Pourquoi le signe $-$?

On a facilement $\begin{pmatrix} E_c \\ E_r \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_i \\ E_c' \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} t_1 & -R_1 \\ R_1 & t_1 \end{pmatrix}$

avec U conserve la norme (matrice unitaire)

Si on écrit $U = \begin{pmatrix} t_1 & R_1 e^{i\theta_1} \\ R_1 e^{i\theta_2} & t_1 \end{pmatrix}$, alors

$$U^+ U = \begin{pmatrix} t_1 & R_1 e^{-i\theta_2} \\ R_1 e^{-i\theta_1} & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & R_1 e^{i\theta_2} \\ R_1 e^{i\theta_1} & t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^2 + R_1^2 - 1 & t_1 R_1 \left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} \right) \\ 0 & t_1^2 + R_1^2 \end{pmatrix}$$

De même

$$E_t = t_2 E_c e^{i k L_0}$$

$$E_c' = -R_2 E_c e^{2 i k L_0}$$

On pose $L = 2L_0$: longueur de rebouclage de la cavité

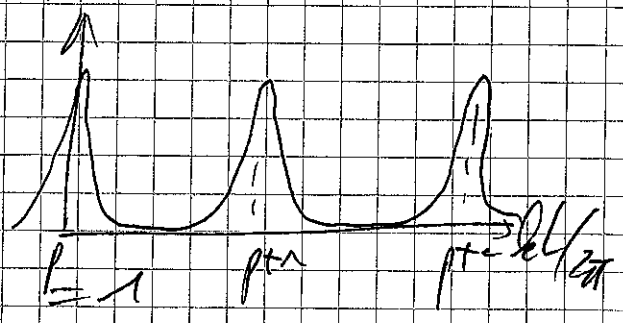
On obtient $$\frac{E_t}{E_i} = \frac{t_1 t_2 e^{i k L_0}}{1 - R_1 R_2 e^{i k L}}$$

D'où le coeff de transmission en intensité

$$T = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos kL}$$

T est max pour $kL = 2\pi p$, p entier, et alors

$$T_{max} = \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}$$



Pour $R_1 = R_2$, alors donc $T_{max} = 1$

On développe T autour de $kL = 2\pi p$, compte tenu des coeff de réflexion sont élevés

le dénominateur vaut

$$D = 1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos kL$$

$$= 1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} + 4\sqrt{R_1 R_2}\sin^2\frac{kL}{2}$$

$$= (1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 \left(1 + m \sin^2\frac{kL}{2}\right), \text{ où}$$

$$m = \frac{4\sqrt{R_1 R_2}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

La largeur de la résonance est définie par

$\frac{1}{D}$ = moitié des pertes, soit

$m \sin^2 \frac{kL}{2} = 1$

$m \left(\frac{kL}{2}\right)^2 = 1$

$\frac{kL}{2} \simeq p\pi \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$

D'où la définition de la finesse

$F = \pi \frac{\sqrt{m}}{2}$: rapport entre intervalle de fréquence entre pics et largeur des résonances

Champ à l'intérieur de la cavité

$$\left|\frac{E_c}{E_i}\right|^2 = \frac{4T_1}{(T_1+T_2)^2\left(1+\frac{4F^2}{\pi^2}\sin^2\frac{kL}{2}\right)}$$

Pour $T_1, T_2 \ll 1$:

$F \simeq \frac{2\pi}{T_1+T_2}$

D'où, à résonance $\left|\frac{E_c}{E_i}\right|^2 \simeq \frac{4T_1}{(T_1+T_2)^2} \gg 1$ si $T_1, T_2 \ll 1$

Exemple :

Cavité linéaire $L_0 = 5\,cm$

finesse $\mathcal{F} = 300$ (obtenue pour $T_1 = T_2 \simeq 1\%$)

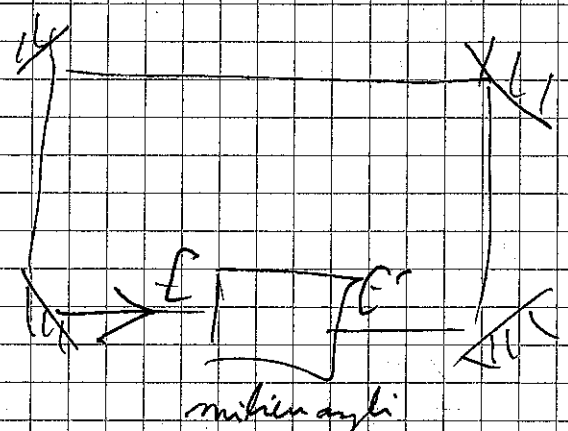
Intervalle spectral libre : $c/L = 3\,GHz$

largeur résonance $10\,MHz$

Facteur de qualité $Q = \mathcal{F}\,\frac{L}{\lambda}$ (non introduit)

$\sim 6 \times 10^7$

2 Condition d'oscillation d'un laser stationnaire



$$E' = E\, e^{i n \frac{\omega}{c} L_a}\, e^{g L_A/2} \qquad g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

$$E'' = E' \sqrt{R e^{-A}}\; e^{i \frac{\omega}{c}(L - L_A)}\, e^{i \varphi_G}$$

D'où : $E'' = E$, soit deux cas possible

$E = 0$: laser éteint

$$\sqrt{R e^{-A}}\; e^{g L_A/2}\; e^{i \frac{\omega}{c}\left[(n-1) L_A + L\right] + \varphi_G} = 0$$

Condition sur l'amplitude

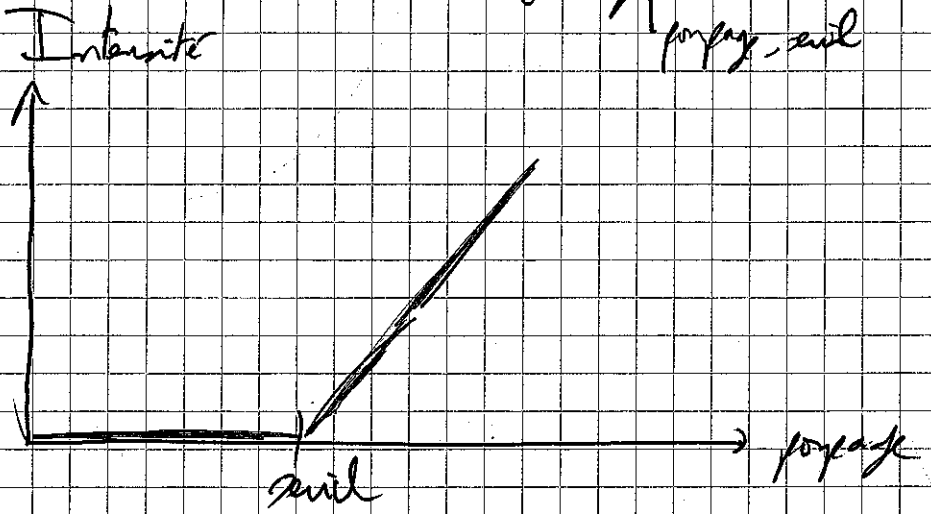
$$R e^{-A} e^{gL_A} = 1$$

$$P = A + \ln \frac{1}{R} \quad : \text{perte}$$

$$gL_A > P$$

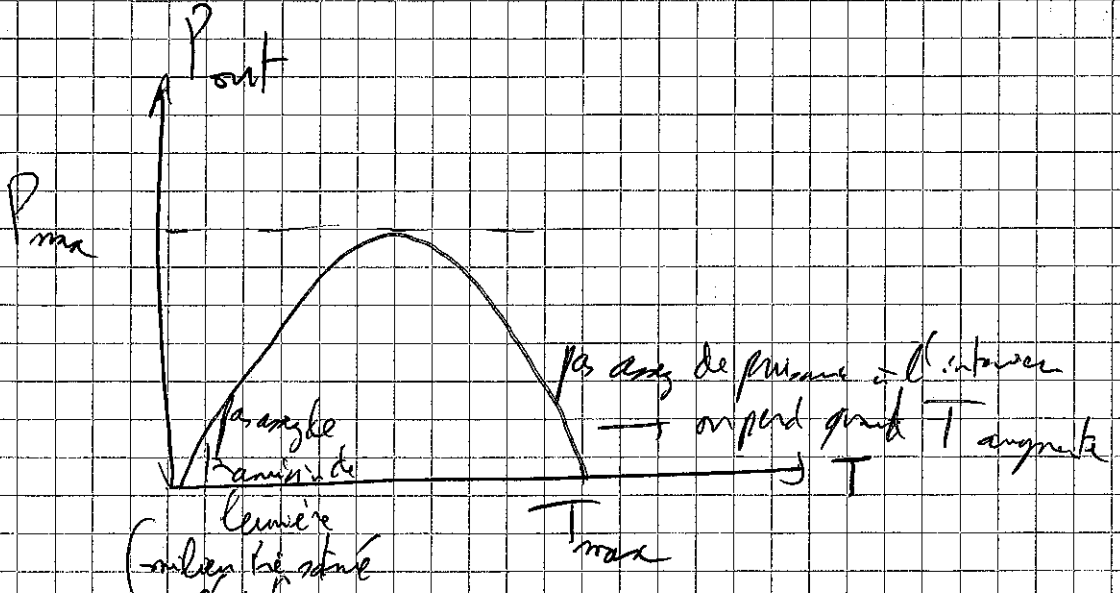
$$I = I_s \left(\frac{g_0 L_A}{P} - 1 \right), \text{ or}$$

$$I = I_s \left(\frac{\Lambda_{pompage}}{\Lambda_{pompage\_seuil}} - 1 \right) \text{ car } g_0 \propto \Lambda_{pompage}$$



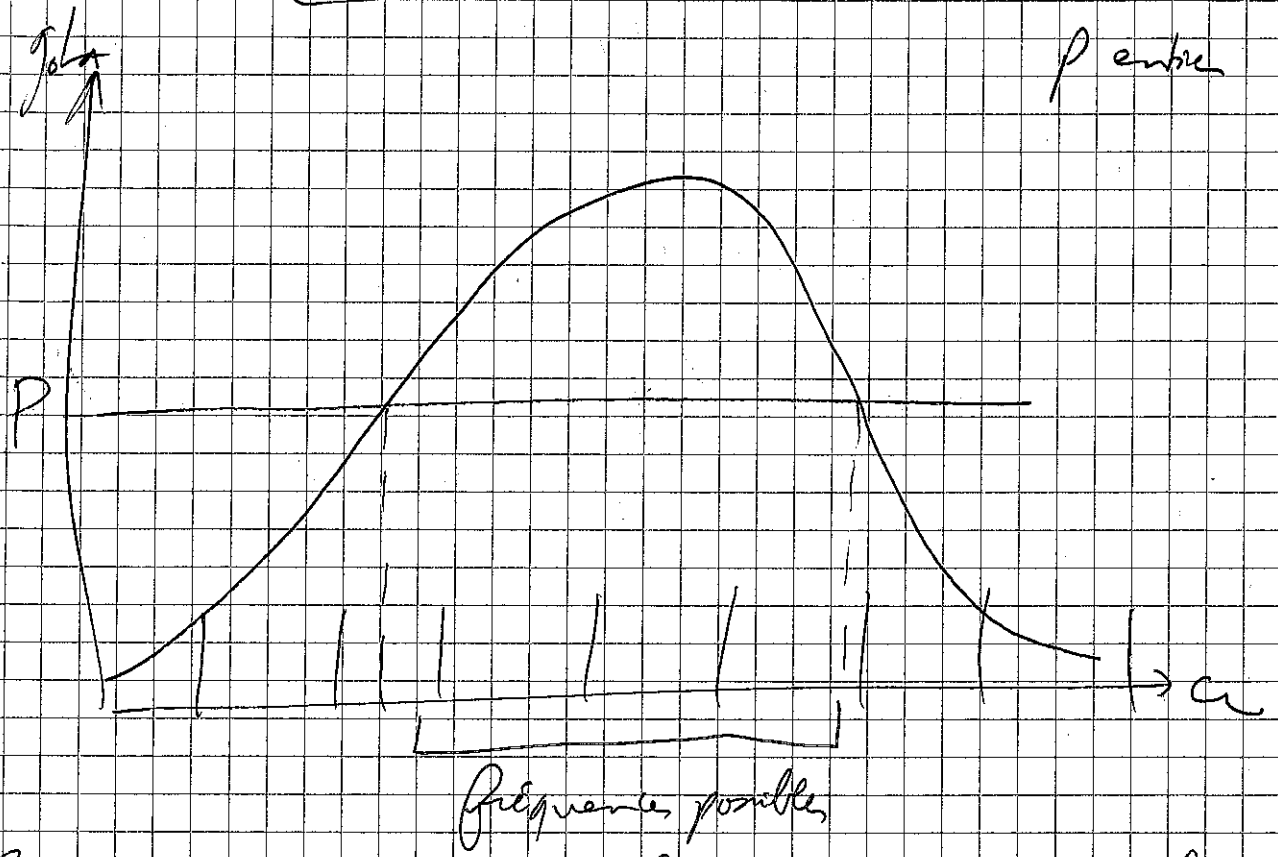
Comment optimiser le coeff de réflexion du miroir ?

$$P_{out} = T P_{in}$$



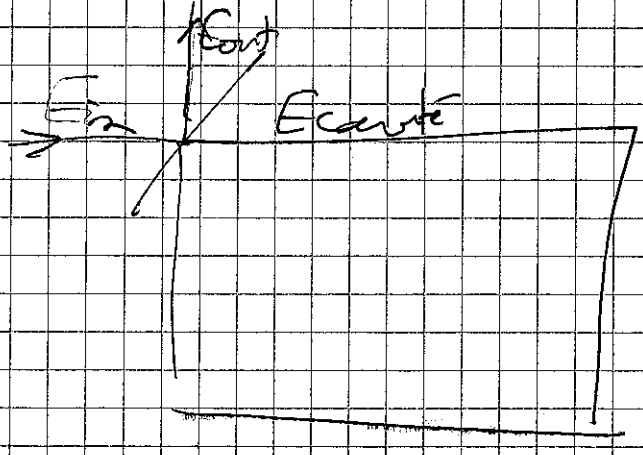
Condition sur la phase

$$\frac{\omega}{c}\left[\left(n(\omega, I) - 1\right)L_A + L\right] + \varphi_0 = 2\pi p$$



Comment se répartit la lumière dans les fréquences autorisées ?

3 – fonctionnement en présence d'un champ incident



$$\begin{cases} E^{out} = -\sqrt{R}\,E^{in} + \sqrt{T}\,e^{i\Phi + (gL_A - A)/2}\,E_{cavité} \\ E^{cavité} = \sqrt{R}\,E^{cavité}\,e^{i\Phi + (gL_A - A)/2} + \sqrt{T}\,E^{in} \end{cases}$$

$$D'où \quad E^{cavité} = \frac{\sqrt{T}}{1 - \sqrt{R}\,e^{i\Phi + \frac{gL_A - A}{2}}}\,E^{in}$$

$$et \quad E^{out} = E^{in}\left[-\sqrt{R} + \frac{T\,e^{i\Phi + gL_A - A/2}}{1 - \sqrt{R}\,e^{i\Phi + \frac{gL_A - A}{2}}}\right]$$

$$= E^{in}\,\frac{-\sqrt{R} + \overbrace{(R+T)}^{=1}\,e^{i\Phi + \frac{gL_A - A}{2}}}{1 - \sqrt{R}\,e^{i\Phi + \frac{gL_A - A}{2}}}$$

Supposons

- une grande finesse $T \ll 1$ $\qquad \sqrt{R} = \sqrt{1-T} \simeq 1 - \frac{T}{2}$
- de faibles pertes, $A \ll 1$
- un faible gain $gL_A \ll 1$
- un champ quasi-résonant : $\Phi = 2\pi m + \delta$,

Alors $E^{out} = E^{in}\,\dfrac{i\delta + \left(gL_A - A + T\right)/2}{-\delta + \frac{gL_A - A}{2}}$ $\quad \delta \ll 1$

$$= E^{in}\,\frac{-\left(1 - T/2\right) + 1 + i\delta + \frac{gL_A - A}{2}}{1 - \left(1 - \frac{T}{2}\right)\left(1 + i\delta + \frac{gL_A - A}{2}\right)}$$

$$= E^{in}\,\frac{i\delta + \frac{gL_A - A + T}{2}}{-i\delta - \frac{gL_A - A - T}{2}}$$

D'où le gain en intensité :

$$G_i = \frac{\delta^2 + (g L_A - A + T)^2/4}{\delta^2 + (g L_A - A - T)^2/4}$$

Pour $g L_A = A - T$: gain infini à résonance : amplificateur parfait !!!

A quoi ressemble le champ intracavité ?

On a un champ incident $E^{in} = \sqrt{I^{in}}$

intracavité $E^{cavité} = \sqrt{I}\, e^{i\psi}$

Alors $e^{i\psi}\sqrt{I}\left(\frac{T + A - g L_A}{2} - i\delta\right) = \sqrt{T I^{in}}$

D'où $\begin{cases} \left(-g L_A + T + A\right)\sqrt{I} = 2\sqrt{T I^{in}}\cos\psi \\ \delta\sqrt{I} = \sqrt{T I^{in}}\sin\psi \end{cases}$

- Sans champ incident : $I^{in} = 0$, on peut avoir I non nul : effet laser

les deux équations sont satisfaites pour

$$\begin{cases} -g(I) L_A + T + A = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Longrightarrow I = I_0$$

la phase ψ est arbitraire.

- Si on a un petit champ incident, alors ψ peut avoir une valeur bien fixée uniquement si $\delta^2 < \dfrac{T\, I^{in}}{I_0}$

le laser est dit injecté : il est en phase avec le champ incident

le laser est dit cohérent.

4- Compétition ou coexistence de modes ?

On considère le cas de deux modes 1 et 2 en compétition

$$g_1 = \frac{g_{01}}{1 + \frac{I_1}{I_{1\,sat}} + \frac{I_2}{I_{2\to 1\,sat}}} \quad , \quad g_2 = \frac{g_{02}}{1 + \frac{I_2}{I_{2\,sat}} + \frac{I_1}{I_{1\to 2\,sat}}}$$

On fait une analyse de l'effet de non linéarité pour de faibles intensités.

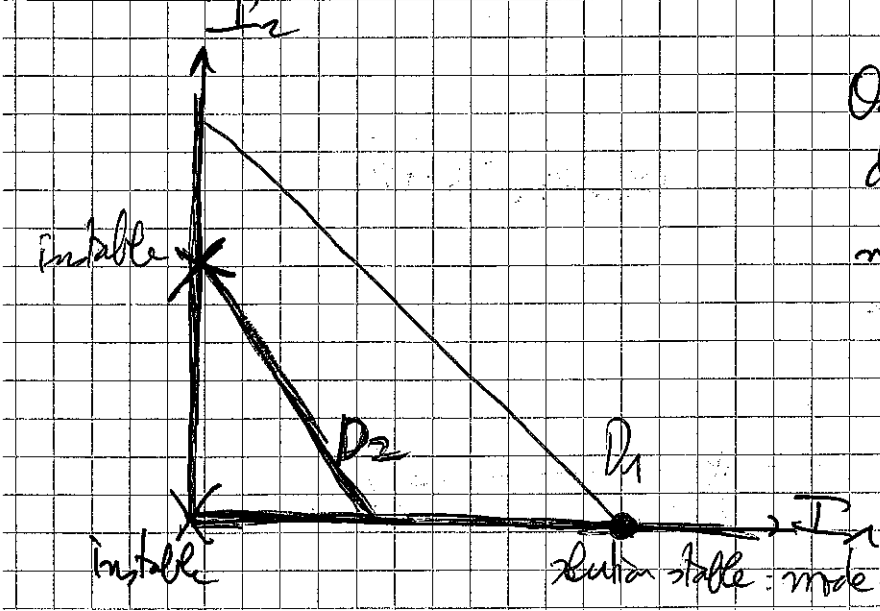
$$\frac{dI_1}{dt} = \left(\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2\right) I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \left(\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1\right) I_2$$

Les régimes stationnaires sont donnés par

$$\begin{cases} \left(\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2 = 0\right) \text{ droite } D_1 & \text{ou} \quad (I_1 = 0) \\ \text{et} \\ \left(\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1 = 0\right) \text{ droite } D_2 & \text{ou} \quad (I_2 = 0) \end{cases}$$

Cas n°1



On ne peut pas avoir coexistence de modes car les deux droites ne se croisent pas

Comment déterminer la stabilité ?

On regarde autour d'une solution

par exemple $(I_1 = 0 \;,\; I_2 = I_2^0)$

On pose $I_2 = I_2^0 + i_2$ et on linéarise les eq

$$\frac{dI_1}{dt} = \underbrace{(\alpha_1 - \beta_{12} I_2^0)}_{\neq 0} I_1$$

$$\frac{di_2}{dt} = (\alpha_2 - \beta_{21} I_1^0)\, i_2$$

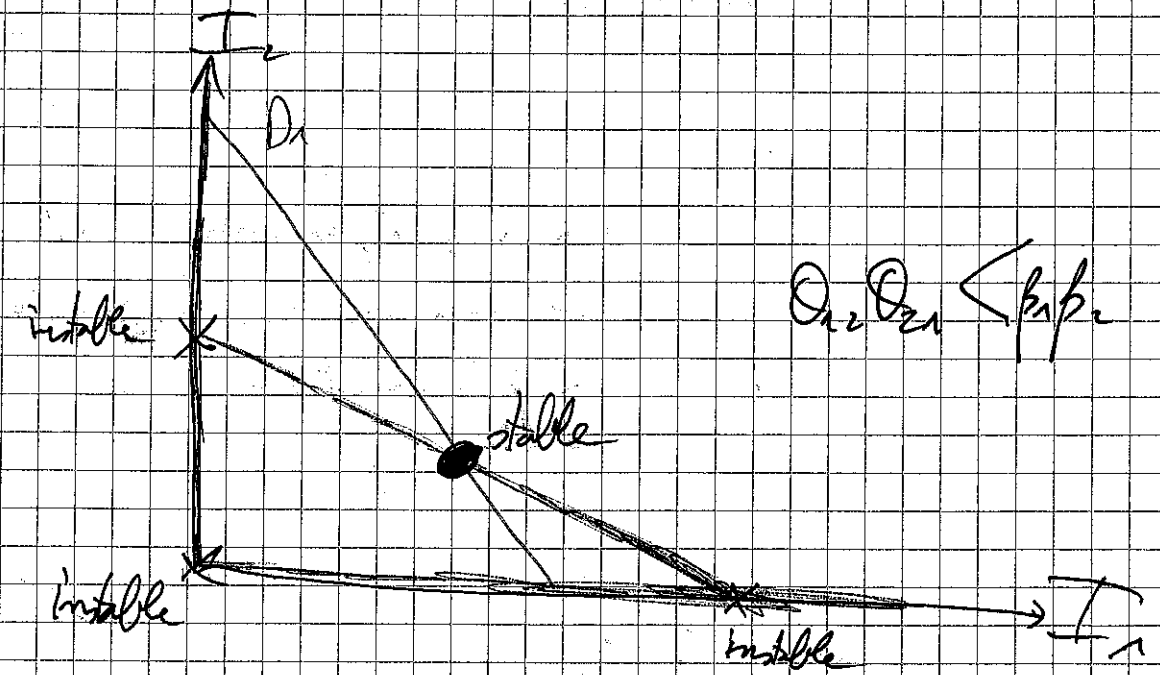
La droite D_1 est au dessus de D_2 :

$$\alpha_1 - \beta_{12} I_2^0 > 0$$

Donc $\dfrac{di_1}{dt} = \underbrace{(\alpha_1 - \beta_{12} I_2^0)}_{>0} i_1$: instable

Autres cas : les droites se croisent

Cas n°2



$\beta_{12}\beta_{21} < \beta_1\beta_2$

Stabilité de la configuration bi-mode

$$I_1 = I_1^0 + i_1$$
$$I_2 = I_2^0 + i_2$$

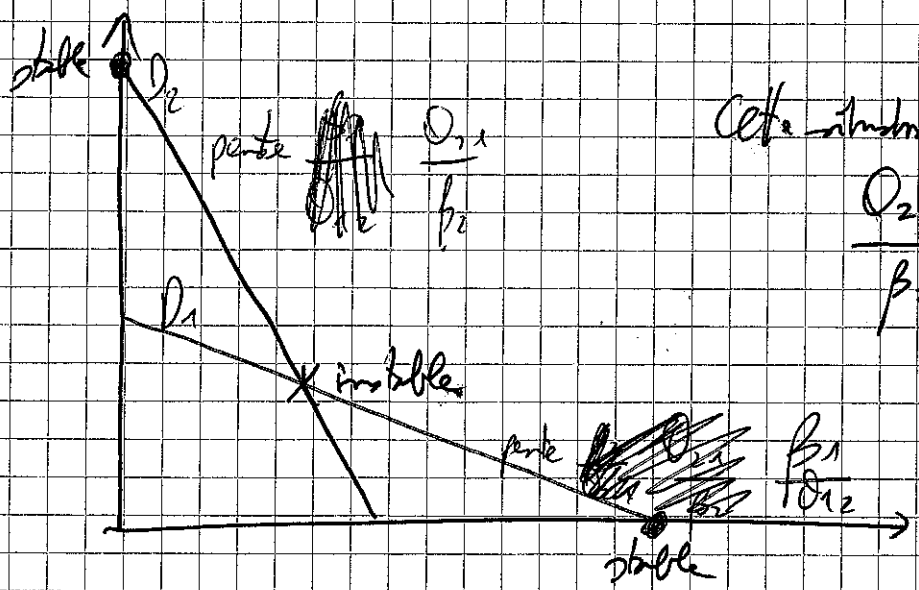
$$\frac{di_1}{dt} = \left(-\beta_1 i_1 - \theta_{12} i_2\right) I_1^0$$
$$\frac{di_2}{dt} = \left(-\beta_2 i_2 - \theta_{21} i_1\right) I_2^0$$

à l'ordre minimal

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 I_1^0 & \theta_{12} I_1^0 \\ \theta_{21} I_2^0 & \beta_2 I_2^0 \end{pmatrix}}_{\Delta} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = I_1^0 I_2^0 \left(\beta_1\beta_2 - \theta_{21}\theta_{12}\right)$$

- Si $\Delta < 0$, soit $\beta_1\beta_2 < \theta_{21}\theta_{12}$, alors on a forcément une racine négative



Cette situation correspond à

$$\frac{\theta_{21}}{\beta_2} > \frac{\beta_1}{\theta_{12}}$$

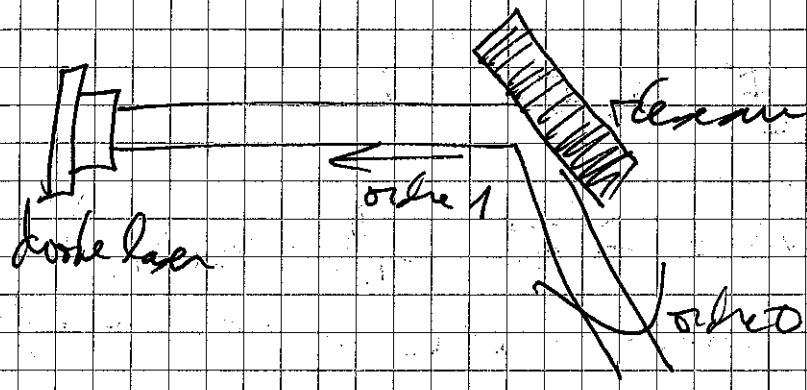
$$\beta_1\beta_2 < \theta_{21}\theta_{12}$$

Deux points monomodes stables. Le laser peut commuter entre les deux configurations

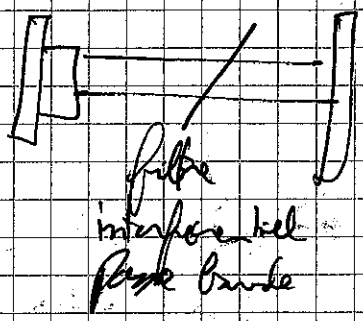
- Si $\Delta > 0$: les deux vp ont le même signe < 0 : stable ! le laser est stable en fonctionnement bi-mode

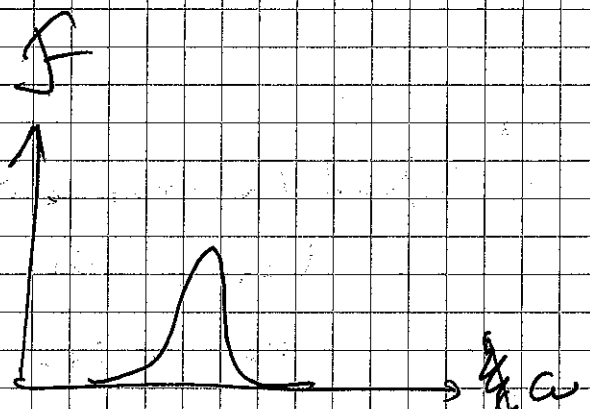
Bilan : comment rendre un laser monomode ?

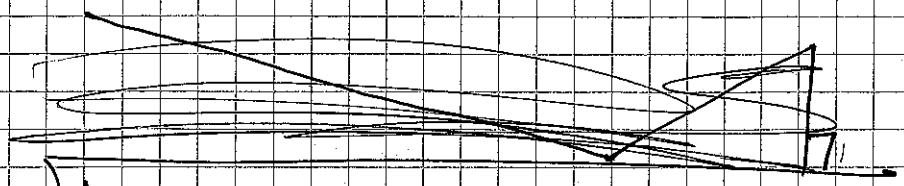
- Injection par un laser maître monomode
- Petite cavité dont l'ISL = $\frac{c}{L}$ est comparable à la largeur de gain ⟶ déséquilibre $\alpha_1 \gg \alpha_2$
- Introduire des pertes sauf à une fréquence



ou



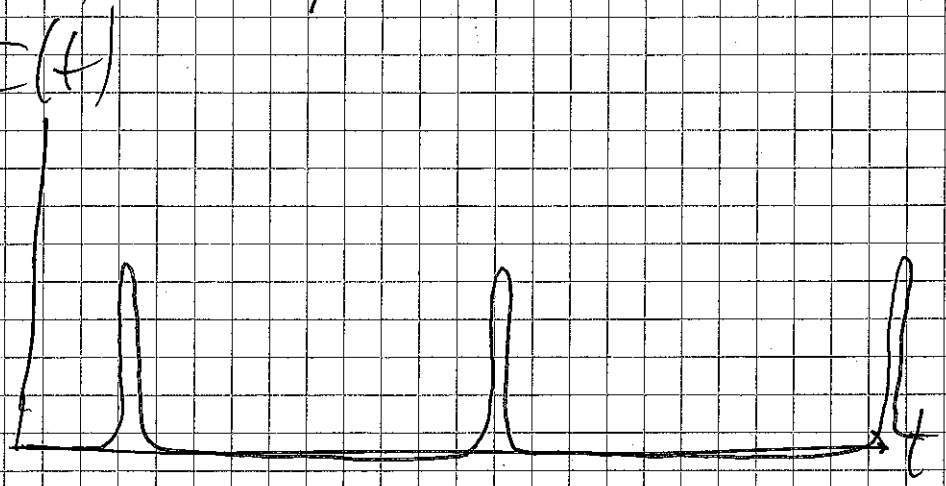




V) Lasers femto-seconde

1- Principe d'un laser femto

On va voir que l'on peut obtenir un laser tel que



lorsque le spectre du laser est répartit sur un grand nombre de mode

$$\omega = \frac{2\pi c}{L} n = n\omega_0$$

On a alors

$$\mathcal{E} = \sum_n C_n e^{in\omega_0 t}$$

On écrit les coeffs c_n sous la forme $c_n = a_n e^{i\varphi_n}$

On suppose un "peigne de fréquence" : $a_n = a$ (module) pour $n < N$

$$\mathcal{E} = a \sum_n e^{i(n\omega_0 t + \varphi_n)}$$

$$I = \frac{1}{2}|\mathcal{E}|^2 = a^2 \left(\frac{N}{2} + \sum_{n<m} \cos[(n-m)\omega_0 t + \varphi_n - \varphi_m] \right)$$

- En général, les phases φ_n sont décorrélées

On a donc $\langle I \rangle = a^2 \frac{N}{2} + a^2 \sum_{n<m} \underbrace{\langle \cos[(n-m)\omega_0 t + \varphi_n - \varphi_m] \rangle_{\varphi_n, \varphi_m}}_{=0}$

$$\langle I \rangle = N \frac{a^2}{2}$$

Est-ce qu'on a vraiment un laser bien stable ?

Quelle sont les fluctuations de ce laser ?

$$\delta I = \left[\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle \right]^{1/2}$$

$$\delta I^2 = a^4 \sum_{\substack{n<m \\ n'<m'}} \langle \cos[(n-m)\omega_0 t + \varphi_n - \varphi_m] \cos[(n'-m')\omega_0 t + \varphi_{n'} - \varphi_{m'}] \rangle_{\varphi_n \ldots}$$

Il faut forcément $n = n'$ et $m = m'$

Alors $\delta I^2 = a^4 \underbrace{\sum_{n<m}}_{\frac{N(N-1)}{2} \simeq \frac{N^2}{2}} \underbrace{\langle \cos^2 \rangle}_{\frac{1}{2}} = \frac{a^4 N^2}{4}$

$$\delta I = a^2 \frac{N}{2} = \langle I \rangle$$

On a un laser qui fluctue énormément

● Que se passe-t-il si les modes sont synchrones ?

$\varphi_n = 0$

$$E(t) = a \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_0 t n}$$

$$= a \frac{1 - e^{iN\omega_0 t}}{1 - e^{i\omega_0 t}}$$

$$I(t) = \frac{a^2}{2} \frac{\sin(N\omega_0 t)/2}{\sin \omega_0 t/2}$$

pénalogue de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Pour $t \ll \frac{T}{N}$: $I(t) = \frac{a^2}{2} N^2$

autour de ce point : $\sin(N\omega_0 t)/2 = 0$ pour $\frac{N\omega_0 t_1}{2} = \pi$

$$t_1 = \frac{2\pi}{N\omega_0} = \frac{T}{N}$$

Pour $t = 1{,}5 \times t_1$:

$$I(t) = \frac{a^2}{2} \frac{1}{\frac{\omega_0}{2} \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{3}{2N}} = \langle I \rangle \frac{2}{3\pi}$$

2 – Réalisation d'un laser femto-seconde

- Exemple du laser Ti/Sa

Une cavité de longueur ~ 1 m

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{L}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{c}{L} = \frac{3\times10^8}{1} = 300\ MHz.$$

On peut faire des lasers femto couvrant en fréquence la gamme

$$\lambda = 600\ nm - 700\ nm$$

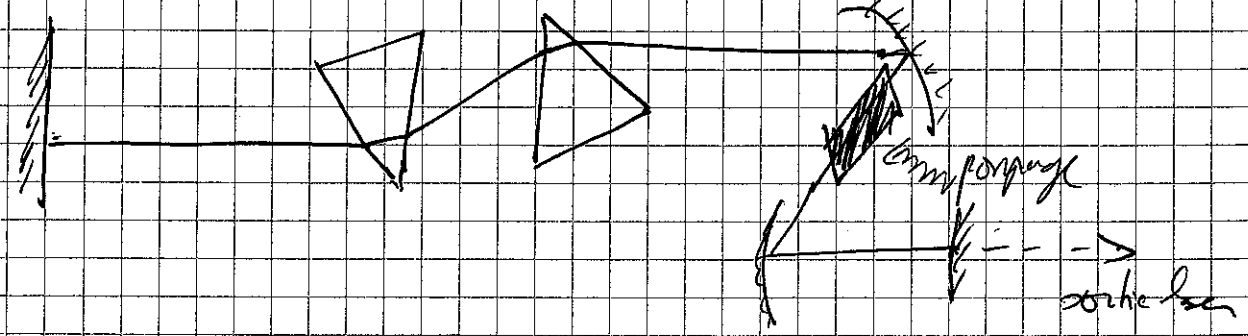
$$f_1 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{0{,}6\times10^{-6}} = 5\times10^{14}\ Hz \qquad f_2 = 7{,}5\times10^{14}\ Hz$$

$$N = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{2{,}5\times10^{14}}{3\times10^8} = 10^6$$

Période de répétition $T = 1/f_0 = 3\ ns$

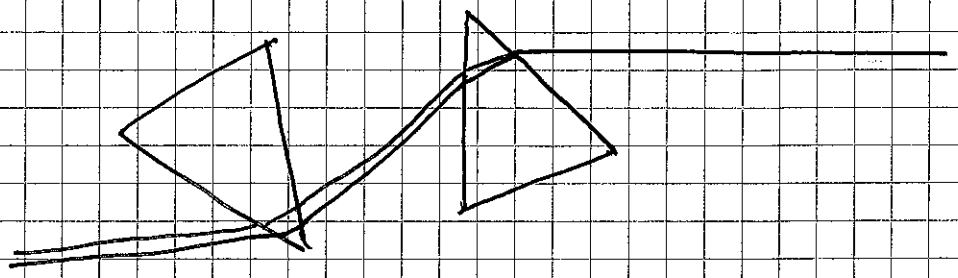
Durée d'une impulsion $\frac{T}{N} = 3\ fs$

- Schéma du laser Ti/Sa



Problème rencontré : la longueur optique de la cavité dépend de la longueur d'onde (variation de l'indice de réfraction du Saphir).

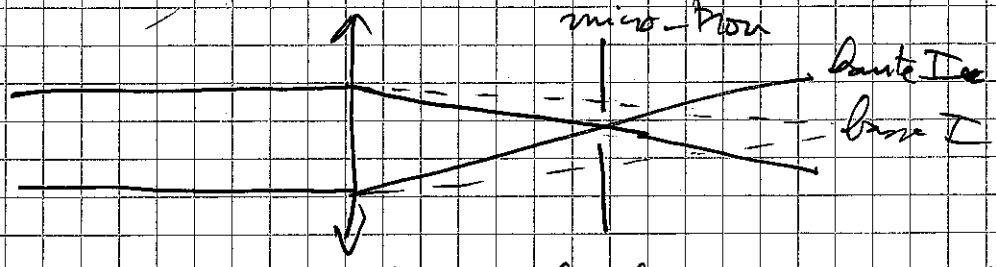
Compensation avec des prismes



les deux longueurs d'onde parcourent des chemins différents dans le verre des prismes.

- Mécanismes de blocage de mode
  - Lentille de Kerr pour favoriser des pulses d'intensité énorme

Effet Kerr optique $n(I) = n_0 + n_2 I$ dans le saphir



les pulses puissants sont très focalisés en passant par le micro-trou.

le laser a plus de pertes à basse intensité !

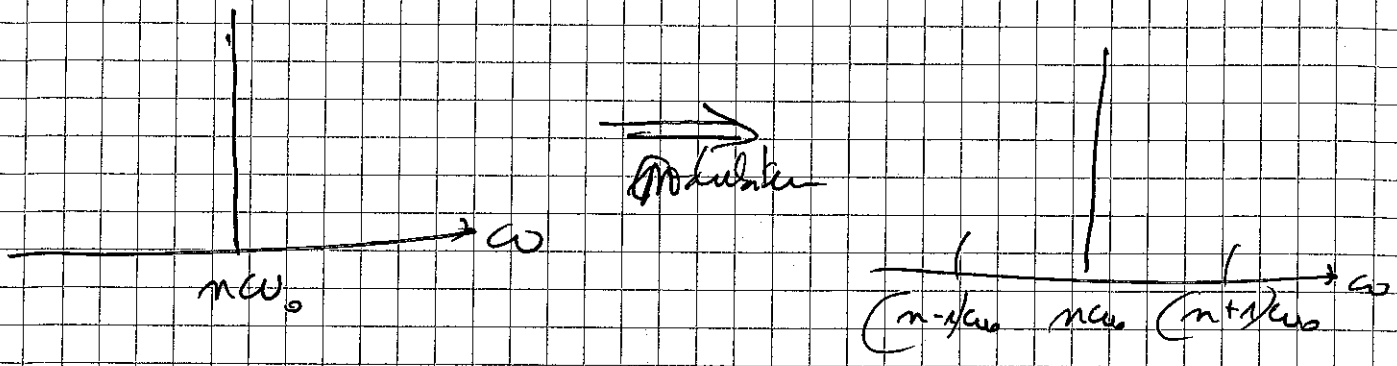
  - Auto-injection des modes optiques

On fait passer les mode dans un modulateur de phase, modulé à ω_0

$$E_{in} = E e^{i n \omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\text{modulateur}} \longrightarrow E_{out} = e^{i(n\omega_0 t + \varepsilon \cos \omega_0 t)}$$

$$E_{out} \simeq e^{i n \omega_0 t} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)\right)$$

$$\simeq e^{i n \omega_0 t} + \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{i(n+1)\omega_0 t} + e^{i(n-1)\omega_0 t}\right)$$



les sidebands injectent les modes à $(n \pm 1)\omega_0$ et la phase se bloque.

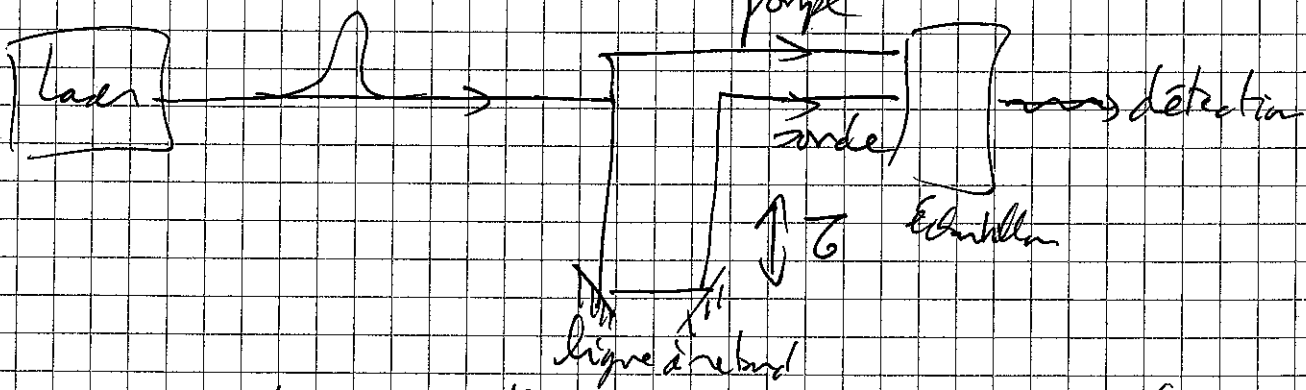
- Ordres de grandeur de puissance

$\langle P_{moy} \rangle = 1\,kW$ $\quad P_{max} = 1\,MW$!!!

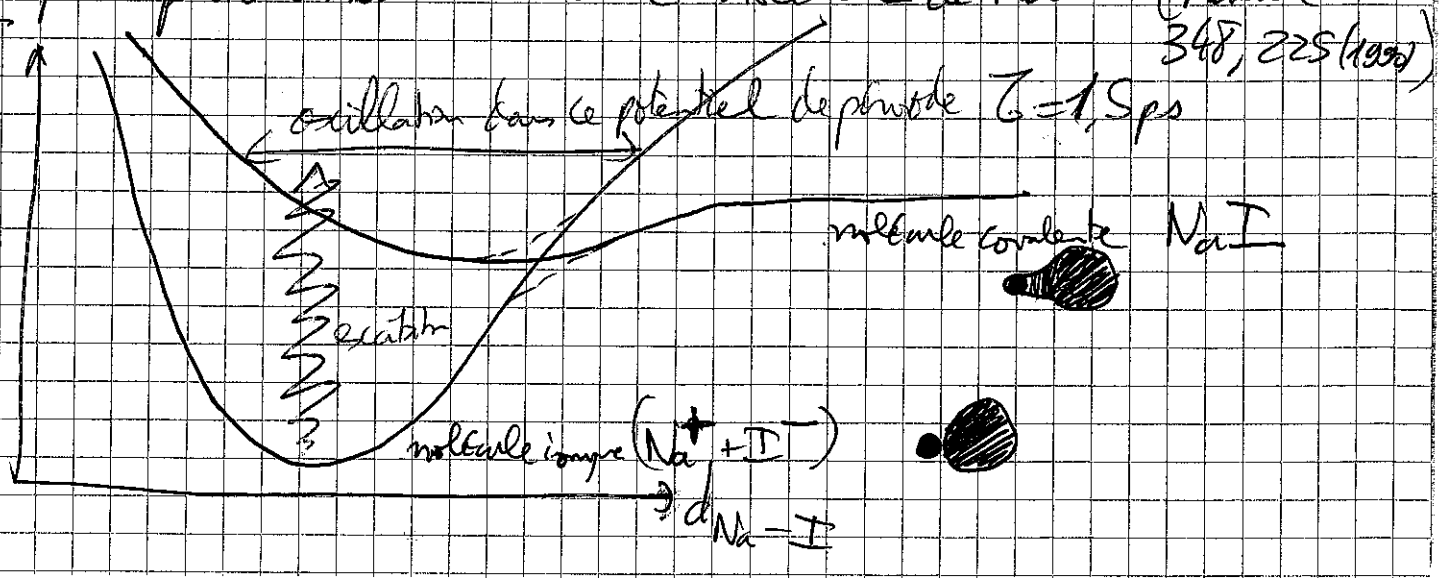
Chaque impulsion a une énergie $E = \langle P_{moy} \rangle T = 10\,mJ$

Problème d'endommagement du laser

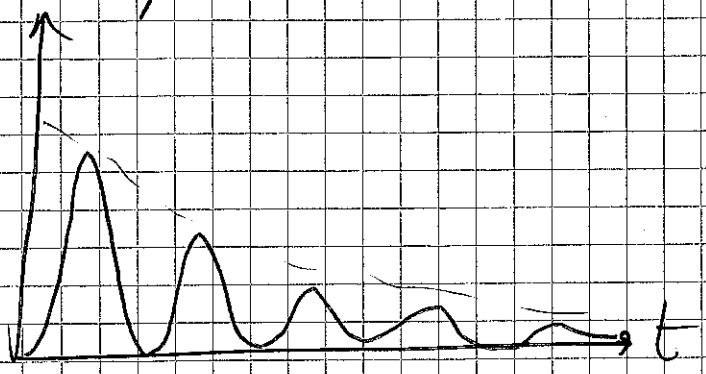
3- Application en chimie : spectro femtoseconde



Exemple : photodissociation d'une molécule de NaI (Nature 348, 225 (1990))



Fenêtre d'acquisition



$\tau = 1,5$ ps

Autres applications :

- usinage laser
- fusion inertielle

VI) Optique non linéaire