

L'équation de Fisher-KPP en présence d'un bruit

Éric Brunet

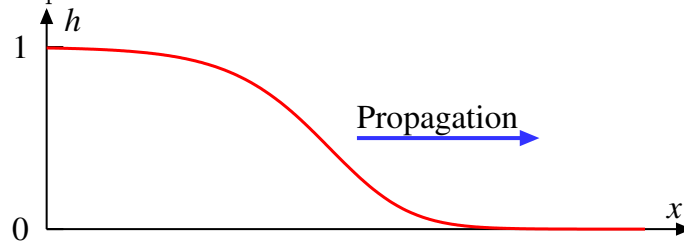
30 juillet 2007

Introduction

L'équation Fisher-KPP

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + h - h^2 \quad (1)$$

$h = 0$ est instable, $h = 1$ est stable. Si on part d'une condition initiale en $h = 1$ à gauche et $h = 0$ à droite, la « phase » stable va envahir la « phase » instable.



Ce qui n'est pas évident, c'est qu'il se forme un front : la forme qui connecte les deux phases converge vers une forme donnée et le tout se déplace à vitesse constante. (*A contrario* de l'équation de la chaleur) : pour t grand

$$h(X_t + z, t) \rightarrow \tilde{h}(z) \quad \text{avec} \quad X_t/t \rightarrow v. \quad (2)$$

Ici, X_t est la position du front, $\tilde{h}(z)$ la forme vers laquelle converge le front et v la vitesse de propagation. (On peut définir la position de mille manières différentes : point où le front vaut 0.5 (ou 10^{-20}), point d'inflexion, $\int dx x \partial_x h(x, t)$, etc. Comme le front converge vers une forme donnée, toutes ces définitions diffèrent d'un nombre d'ordre 1.)

Combien vaut la vitesse ? Quelle est la forme du front ?

Une grande diversité

Il y a bien sûr beaucoup d'équations de fronts, qui ont des comportements semblables à l'équation de Fisher-KPP. Il suffit de mettre les mêmes ingrédients pour obtenir les mêmes comportements ! Les ingrédients de l'équation de Fisher-KPP sont

- Deux points fixes : $h = 0$ et $h = 1$ (après une éventuelle mise à l'échelle)
- Un terme de diffusion
- Un terme de croissance, qui rend la phase $h = 0$ instable.
- Un terme de saturation qui stabilise le front à $h = 1$.

Remplacer Fisher-KPP par

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + h - h^3 \quad (3)$$

ne va quasiment rien changer. On a un peu modifié le terme de saturation, mais la vitesse du front sera la même. On peut aussi discrétiser

$$h(x, t + \tau) = h(x, t) + \tau \left[\frac{h(x + \epsilon, t) + h(x - \epsilon, t) - 2h(x, t)}{\epsilon^2} + h(x, t) - h^2(x, t) \right] \quad (4)$$

On aura des petites modifications sur la vitesse, mais les propriétés générales et les techniques utilisables restent les mêmes. On peut faire des transformations plus radicales :

$$h(x, t + 1) = \min \left(1, 2 \int_0^1 dy h(x - y, t) \right) \quad (5)$$

Tous les ingrédients sont présents : $h = 0$ et $h = 1$ sont des points fixes, l'intégrale mélange à la manière d'une diffusion, et le facteur 2 rend $h = 0$ instable. Le min joue le rôle d'un terme de saturation.

De mon point de vue, *sauf cas pathologiques*, toutes ces équations s'abordent de la même manière et décrivent des fronts qui se comportent de la même manière, et appartiennent à « la classe des fronts de type Fisher-KPP », ou

« fronts se propageant dans une phase instable. » (En fait, je vais devoir raffiner un peu plus loin et diviser cette classe en deux parties.)

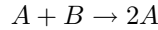
Il y a bien sûr d'autres types de fronts. Je parlerai un peu, à titre de comparaison, des « fronts se propageant dans une phase (méta)stable. » Par exemple ;

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (h - h^2)(3h - 1) \quad (6)$$

Ici, les phases $h = 0$ et $h = 1$ sont toutes les deux stables. Il se trouve que $h = 0$ est « moins stable » que $h = 1$ et on va quand même observer une propagation de front où la phase $h = 1$ envahit la phase $h = 0$. Cependant, les propriétés de ces fronts sont très différentes de celles des fronts de type Fisher-KPP.

Pourquoi Fisher-KPP ? La nécessité d'un bruit

L'équation Fisher-KPP se retrouve dans de nombreux domaines. Un cas simple est la chimie : les espèces A et B diffusent et on a la réaction



avec le taux K . Si h_A et h_B sont les concentrations des deux espèces, alors

$$\begin{aligned} \partial_t h_A &= D_A \partial_x^2 h_A + K h_A h_B, \\ \partial_t h_B &= D_B \partial_x^2 h_B - K h_A h_B. \end{aligned} \quad (7)$$

Si $D_A = D_B$ et qu'à l'origine $h_A + h_B$ est uniforme (égale à 1 dans les bonnes unités), on trouve aisément que $h_A + h_B$ reste constant et uniforme et que h_A obéit à l'équation Fisher-KPP.

Un autre exemple vient de la génétique : A et B représentent des types d'individus dans une population asexuée. Les types A ont une mutation avantageuse et se reproduisent avec un taux $1 + s$, alors que les types B ont un taux de reproduction 1. À chaque nouvelle naissance, un individu pris au hasard meurt dans le voisinage immédiat de la naissance, maintenant ainsi constante la concentration totale $h_A + h_B$ (égale à 1). Enfin, tout ce monde diffuse. Alors

$$\begin{aligned} \partial_t h_A &= \partial_x^2 h_A + (1 + s)h_A - [(1 + s)h_A + h_B]h_A, \\ \partial_t h_B &= \partial_x^2 h_B + h_B - [(1 + s)h_A + h_B]h_B, \end{aligned} \quad (8)$$

Encore une fois, h_A suit l'équation de Fisher-KPP. (C'est le modèle original de Fisher.)

Ces deux cas ont ceci en commun que, pour obtenir l'équation de Fisher-KPP, on a implicitement pris la limite où les concentrations de A et de B étaient infinies. En effet, dans les modèles qu'on vient de décrire, le front est constitué d'un grand nombre de particules et ne peut pas vraiment être décrit par une fonction h bien lisse. La diffusion des particules est stochastique, ainsi que la réaction (ou les naissances). En écrivant une équation déterministe, on néglige tous ces effets. Une meilleure approximation de ces modèles est d'écrire une équation bruitée :

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + h - h^2 + \sqrt{\frac{1}{N}(h - h^2)} \eta, \quad (9)$$

où η est un bruit blanc gaussien :

$$\langle \eta \rangle = 0 \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (10)$$

et N est le nombre total de particules (type A + type B) présentes par unité de longueur. Dans la limite $N \rightarrow \infty$ de concentration infinie, on retrouve bien Fisher-KPP. On voit tout de suite que le bruit devient important lorsque $h - h^2$ est d'ordre $1/N$, c'est-à-dire là où il n'y a que quelques particules de type A (et le reste de B) ou le contraire.

L'idée, en très gros, est de considérer le nombre $N h dx$ de particules de type A dans un petit intervalle dx . Pendant dt , ce nombre augmente en moyenne de $N dx dt (h - h^2)$. L'augmentation est cependant aléatoire ; en supposant un processus de Poisson, la variance de l'augmentation est égale à la moyenne et on retrouve l'équation de Fisher-KPP avec bruit (9).

Là encore, cette équation n'est qu'une approximation des processus stochastiques. En particulier, prendre un bruit gaussien est peut-être raisonnable dans la région où il y a à la fois beaucoup de particules de type A et de type B , mais ne se justifie pas vraiment à l'extrémité du front, là où il y a quelques A et le reste de B . De plus, cette équation bruitée ne traite que le terme de réaction de manière stochastique ; le terme de diffusion reste déterministe. Il semble cependant que cette équation (9) reproduise correctement le comportement quand N est grand (mais fini) des systèmes stochastiques du genre de ceux que l'on vient de décrire.

Je n'exploiterai pas vraiment (9) dans ce cours mais aborderai le bruit microscopique de manière un peu différente. Il faut cependant signaler que l'on retrouve (9) de manière exacte en écrivant une certaine dualité dans un modèle de mouvement brownien avec branchements et recombinaisons.

Je vais découper ce cours en trois parties. D'abord, un rappel sur les propriétés de l'équation Fisher-KPP sans bruit, en parallèle avec d'autres équations de propagation de fronts. Ensuite, j'introduirai l'approximation du *cutoff* comme une première approche pour traiter les fronts avec bruit, puis je présenterai une prédiction phénoménologique pour la vitesse et la constante de diffusion des fronts avec bruit.

1 L'équation de Fisher-KPP (et autres équations) sans bruit

Pour être un peu générique, on considère un front décrit par

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + G(h), \quad (11)$$

où $G(0) = G(1) = 0$, de manière à ce que $h = 0$ et $h = 1$ soient deux solutions. On suppose que $G'(1) < 0$ de manière à ce que la solution $h = 1$ soit stable. On distingue deux cas

$$\begin{cases} G'(0) > 0 & \text{La solution } h = 0 \text{ est instable (c'est le cas de Fisher-KPP),} \\ G'(0) < 0 & \text{La solution } h = 0 \text{ est stable.} \end{cases} \quad (12)$$

La condition initiale est une fonction décroissante telle que $h(-\infty, 0) = 1$ et $h(+\infty, 0) = 0$. Un front se forme et, pour des temps très longs, se déplace sans déformation à vitesse constante. On veut connaître la vitesse de propagation de ce front. On cherche donc des solutions de la forme

$$h(x, t) = \tilde{h}(\underbrace{x - vt}_z). \quad (13)$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{h}'' + v\tilde{h}' + G(\tilde{h}) &= 0, \\ \tilde{h}(-\infty) &= 1, \quad \tilde{h}(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Il s'agit donc de déterminer pour quelle(s) vitesse(s) il existe une solution à cette équation. La réponse est

- dans le cas instable, pour toutes les vitesses (ou, du moins, pour un continuum de vitesses)
- dans le cas stable, pour une seule vitesse (ou du moins, pour un ensemble discret de vitesses).

Voyons pourquoi de deux manières différentes.

1.1 Une ou plusieurs solutions ?

Dans la région où $\tilde{h} \ll 1$, on a

$$\tilde{h}'' + v\tilde{h}' + G'(0)\tilde{h} \approx 0. \quad (15)$$

Les solutions peuvent s'écrire sous la forme d'exponentielles

$$\tilde{h}(z) \propto e^{-\gamma z} \quad (16)$$

avec

$$\gamma^2 - v\gamma + G'(0) = 0. \quad (17)$$

On veut $\gamma > 0$ (ou, au moins, $\Re(\gamma) > 0$) parce que $\tilde{h}(\infty) = 0$. Si $G'(0) > 0$ (cas instable), il y a deux solutions γ et γ' acceptables. Si, au contraire, $G'(0) < 0$ (cas stable), il n'y a qu'une solution acceptable. De manière générique, pour \tilde{h} petit, on trouve donc

$$\tilde{h}(z) \approx \begin{cases} Ae^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z} & \text{(cas instable),} \\ Ae^{-\gamma z} & \text{(cas stable).} \end{cases} \quad (18)$$

Où A et B sont des constantes d'intégration. En fait, il n'y a là que les termes dominants. En tenant compte des termes non linéaires, on va pouvoir écrire un développement asymptotique faisant apparaître des termes plus petits :

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} Ae^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z} + \sum_{p,q} C_{p,q}(A, B)e^{-(p\gamma + q\gamma')z} & \text{(cas instable),} \\ Ae^{-\gamma z} + \sum_p D_p(A)e^{-p\gamma z} & \text{(cas stable).} \end{cases} \quad (19)$$

(Bien évidemment, savoir quel est le plus petit terme entre $Be^{-\gamma' z}$ et $C_{2,0}e^{-2\gamma z}$ dépend des valeurs de γ et de γ' ...) Le point important est que les $C_{p,q}$ sont entièrement déterminées par les valeurs de A et B , et que les D_p sont entièrement déterminées par la valeur de A . On voit donc qu'au voisinage de 0, on a une famille à deux paramètres de solutions dans le cas instable, alors qu'on a une famille à un seul paramètre dans le cas stable. Si on fixe l'invariance par translation (par exemple, on impose que $\tilde{h}(0) = \frac{1}{2}$), on perd un degré de liberté. On a donc, dans le cas stable, une seule solution telle que $\tilde{h}(0) = \frac{1}{2}$ et $\tilde{h}(+\infty) = 0$, alors qu'il y a une famille à un paramètre de telles solutions dans le cas instable.

Au voisinage de $\tilde{h} = 1$ (qui est une solution stable), on peut répéter la même analyse. Si l'on impose encore $\tilde{h}(0) = \frac{1}{2}$, on voit qu'il n'y a qu'une seule solution acceptable telle que $\tilde{h}(-\infty) = 1$.

Il s'agit donc de voir si l'on peut raccorder la solution obtenue en partant de $\tilde{h} = 1$ vers la (ou l'une des) solution(s) obtenue(s) en partant de $\tilde{h} = 0$:

- Dans le cas stable, le raccordement est *en général* impossible : les deux solutions n'ont pas la même pente en 0 ou, autrement dit, la solution correcte au voisinage de $\tilde{h} = 0$ ne tend pas vers 1 quand $z \rightarrow -\infty$ et réciproquement. Ce n'est qu'exceptionnellement, pour une valeur bien précise de v , que par miracle ces deux solutions sont identiques. Il n'y a donc qu'une seule vitesse possible dans le cas stable (ou tout au plus un nombre discret de vitesses possibles.)

- Dans le cas instable, au contraire, il reste un degré de liberté pour choisir la solution qui vient de $\tilde{h} = 0$, et on peut (en général) choisir cette solution de manière à ce qu'elle se raccorde à (l'unique) solution qui vient de $\tilde{h} = 1$. On trouve donc ainsi une solution pour n'importe quelle valeur de v (ou, au moins, un continuum de valeurs de v .)

Déterminer la vitesse dans le cas instable est en général difficile, puisque cela implique de résoudre complètement l'équation non-linéaire. Au contraire, on peut souvent déterminer la vitesse dans le cas instable.

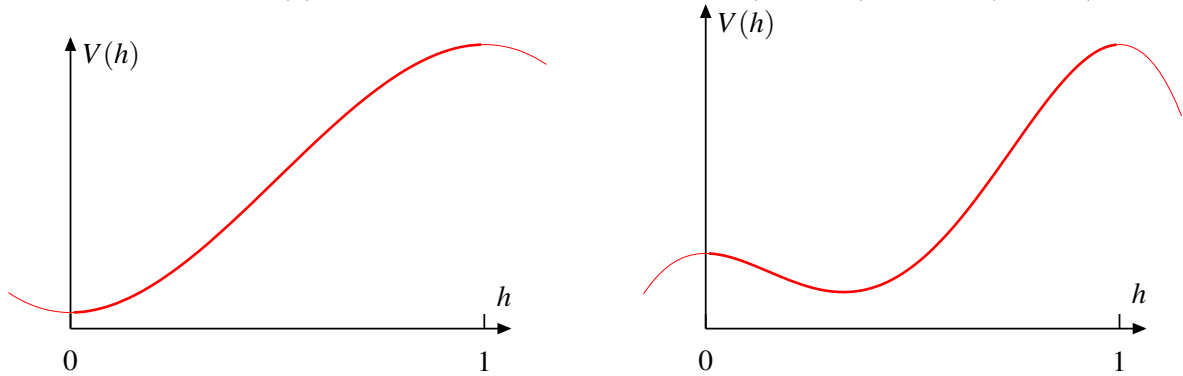
1.2 L'analogie mécanique

L'équation (14) peut se lire comme l'équation de Newton, le principe fondamental de la dynamique :

$$1 \times \tilde{h}'' = -v\tilde{h}' + [-G(\tilde{h})], \tag{20}$$

où $\tilde{h}(z)$ est ici la position d'une particule en fonction du temps z . La masse vaut 1 unité, \tilde{h}'' est l'accélération, \tilde{h}' la vitesse, $-v\tilde{h}'$ est une force de frottement fluide avec un coefficient de friction v , et $-G(\tilde{h})$ est une force extérieure qui dérive d'un potentiel $V(\tilde{h})$, avec $V'(\tilde{h}) = G(\tilde{h})$. À l'instant $-\infty$, la particule se trouve en $\tilde{h} = 1$, et à l'instant $+\infty$ elle se trouve en $\tilde{h} = 0$.

Voici l'allure du potentiel $V(h)$, respectivement dans le cas instable (à gauche) et stable (à droite).



(Attention, la stabilité des points d'équilibre $\tilde{h} = 1$ et $\tilde{h} = 0$ dans l'analogie mécanique est l'inverse de leur stabilité dans le modèle original.)

Dans le cas instable (à gauche), on voit que si l'on freine suffisamment fort (v suffisamment grande) on va gentiment atterrir en $\tilde{h} = 0$, sans passer par les $\tilde{h} < 0$. On a donc un front acceptable pour toutes les vitesses suffisamment grandes.

Dans le cas stable (à droite), au contraire, il est très difficile de s'arrêter en $\tilde{h} = 0$. Soit le freinage est trop important et on ne remonte pas suffisamment la pente, soit il est trop faible et on tombe de l'autre côté. L'un dans l'autre n'y a donc qu'un seul coefficient de freinage (une seule vitesse v) qui permette d'aller de $\tilde{h} = 1$ à $\tilde{h} = 0$.

1.3 Détermination de la vitesse dans le cas instable

On suppose donc $G'(0) > 0$. Par exemple, par un simple changement d'unités, on peut supposer $G'(0) = 1$. On s'intéresse à la région $\tilde{h} \ll 1$. Les solutions sont de la forme

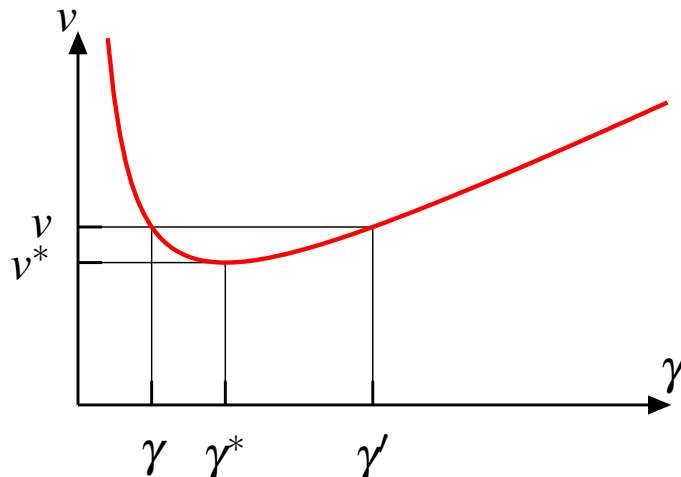
$$\tilde{h}(z) \propto e^{-\gamma z} \tag{21}$$

avec

$$\gamma^2 - v\gamma + 1 = 0 \tag{22}$$

On trouve plus pratique d'écrire cette équation sous la forme

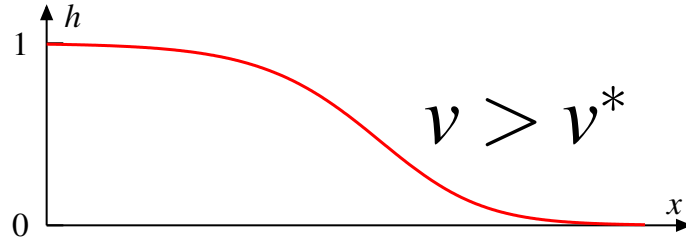
$$v(\gamma) = \gamma + \frac{1}{\gamma}. \tag{23}$$



Cette fonction a un minimum en γ^* (qui vaut ici 1) et a une valeur minimale $v^* = v(\gamma^*)$ (ici $v^* = 2$).
 Pour $v > v^*$, la solution est de la forme

$$\tilde{h}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z} + \sum_{p,q} C_{p,q}(A, B)e^{-(p\gamma+q\gamma')z} \quad (24)$$

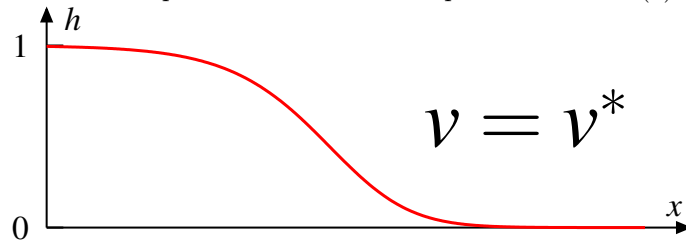
où A et B sont déterminées par les non-linéarités et par le choix de $\tilde{h}(0)$.



Pour $v = v^*$, on est dans la situation dégénérée et la solution est de la forme

$$\tilde{h}(z) = (Az + B)e^{-\gamma^* z} + (\dots)e^{-2\gamma^* z} + \dots \quad (25)$$

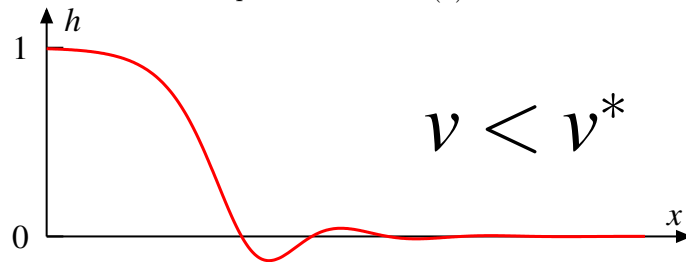
avec, encore une fois, A et B déterminées par les non-linéarités et par le choix de $\tilde{h}(0)$.



Pour $v < v^*$, les racines γ sont complexes conjuguées et la solution est de la forme

$$\tilde{h}(z) = K \sin(\gamma_I z + \phi)e^{-\gamma_R z} + (\dots)e^{-2\gamma_R z} + \dots \quad (26)$$

avec K et ϕ déterminés par les non-linéarités et par le choix de $\tilde{h}(0)$.



Il s'agit donc de déterminer, parmi toutes ces solutions possibles, laquelle est effectivement sélectionnée par le système.

La solution doit être monotone

On peut se convaincre que seule les solutions monotones sont stables. Faisons une analyse perturbative. On part d'une solution en translation uniforme, à laquelle on ajoute une petite perturbation localisée :

$$h(x, t) = \tilde{h}(x - vt) + \eta(x - vt, t). \quad (27)$$

Dans l'équation

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + G(h), \quad (28)$$

on trouve à l'ordre linéaire

$$\partial_t \eta = \partial_z^2 \eta + v \partial_z \eta + G'(\tilde{h})\eta. \quad (29)$$

On cherche les modes propres sous la forme

$$\eta(z, t) = \psi(z)e^{-vz/2} e^{-Et}. \quad (30)$$

Alors :

$$\left[-\partial_z^2 + \frac{v^2}{4} - G'(\tilde{h}) \right] \psi = E\psi. \quad (31)$$

Ça ressemble à s'y méprendre à l'équation de Schrödinger... La solution \tilde{h} est stable si et seulement si il n'y a pas de mode propre avec $E < 0$, ce qui revient à dire que E_{minimal} (l'énergie du fondamental en terme de mécanique quantique) doit être positive ou nulle.

La mécanique quantique nous apprend que la fonction d'onde (ψ) qui correspond à l'énergie du fondamental ne change pas de signe. (C'est une version du théorème de Perron-Frobenius.)

De plus, on connaît une solution à l'équation (29) : c'est

$$\eta_0(z, t) = \epsilon \tilde{h}'(z). \tag{32}$$

En effet, cette solution correspond à l'invariance par translation puisque

$$h(x, t) = \tilde{h}(x - vt) + \eta_0(x - vt, t) \approx \tilde{h}(x - vt + \epsilon), \tag{33}$$

Cette perturbation qui n'évolue pas correspond à la valeur propre $E = 0$. On voit donc que si η_0 ne change pas de signe, alors $E = 0$ est l'énergie du fondamental, tous les modes propres sont tels que $E \geq 0$ et \tilde{h} est stable. D'un autre côté, si η_0 change de signe, cela signifie qu'il existe un mode avec une énergie $E < 0$ et \tilde{h} est instable.

On obtient donc bien que \tilde{h} est stable si et seulement si \tilde{h} est monotone. *Attention : ceci est une propriété spécifique de l'équation Fisher-KPP, et je ne crois pas que ce soit vrai pour d'autres équations du même type.*

Une perturbation se propage à la vitesse v^*

Imaginons une condition initiale $h(x, 0)$ localisée autour de $x = 0$ et d'amplitude maximale très faible. Pour étudier l'évolution du système, on peut se contenter (dans un premier temps) de l'équation linéarisée. Pour simplifier, on regarde ici l'équation Fisher-KPP elle-même ($v^* = 2, \gamma^* = 1$), mais ce que je dis ici est généralisable aux autres équations de la même classe.

On trouve que la solution de l'équation linéarisée est

$$h(x, t) = \int dy h(y, 0) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{t - \frac{(x-y)^2}{4t}}. \tag{34}$$

On se place dans le référentiel qui se déplace à la vitesse v en posant $x = vt + z$. Alors

$$h(x, t) = \int dy h(y, 0) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{t(1-v^2/4) - \frac{(z-y)^2}{4t} - \frac{v}{2}(z-y)}. \tag{35}$$

À z fixé, on voit que l'amplitude du front explose pour $v < 2$ et tend vers 0 pour $v > 2$. Ce n'est que pour $v = 2$ que l'on voit un front se former doucement :

$$h(x, t) = \int dy h(y, 0) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(z-y)^2}{4t} - (z-y)} \quad \text{pour } v = v^* = 2. \tag{36}$$

Le front ainsi obtenu est une exponentielle décroissante sur une longueur d'ordre \sqrt{t} , puis décroît comme une gaussienne. Le front se forme mais sans se déplacer, ce qui veut dire qu'on est bien dans le référentiel qui va à la vitesse du front, ce qui veut dire, finalement, qu'une perturbation localisée crée un front qui va à la vitesse v^* . Ceci est une autre manière de montrer que les fronts allant moins vite que v^* sont instables, puisque la moindre perturbation va créer un front qui va aller plus vite et donc remplacer le front initial.

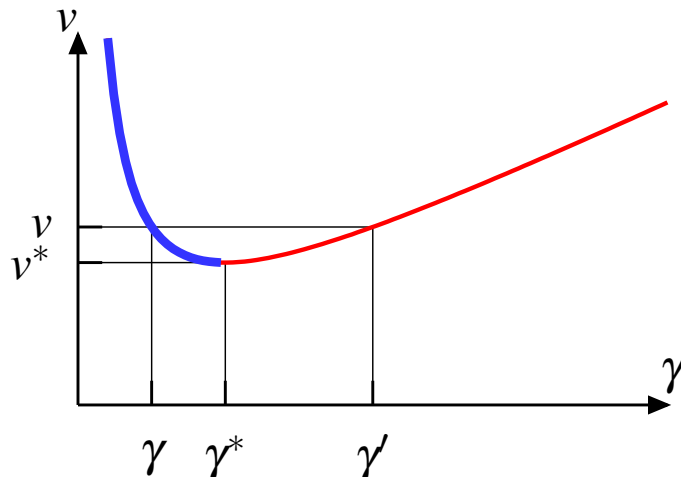
Ce résultat suggère que pour une condition initiale localisée, le front se déplace à la vitesse v^* . On n'a cependant regardé jusque là que l'équation linéarisée, et il reste possible que les non-linéarités promeuvent une solution qui va plus vite que v^* et remplacerait le front linéaire. Comme on va le voir, ceci ne se produit pas, habituellement.

La solution sélectionnée est celle qui ressemble le plus à la condition initiale pour $x \rightarrow +\infty$.

On veut déterminer quelle solution $\tilde{h}(z)$ et quelle vitesse v sont sélectionnées en fonction de la condition initiale. Les résultats précédents éliminent déjà toutes les solutions avec $v < v^*$.

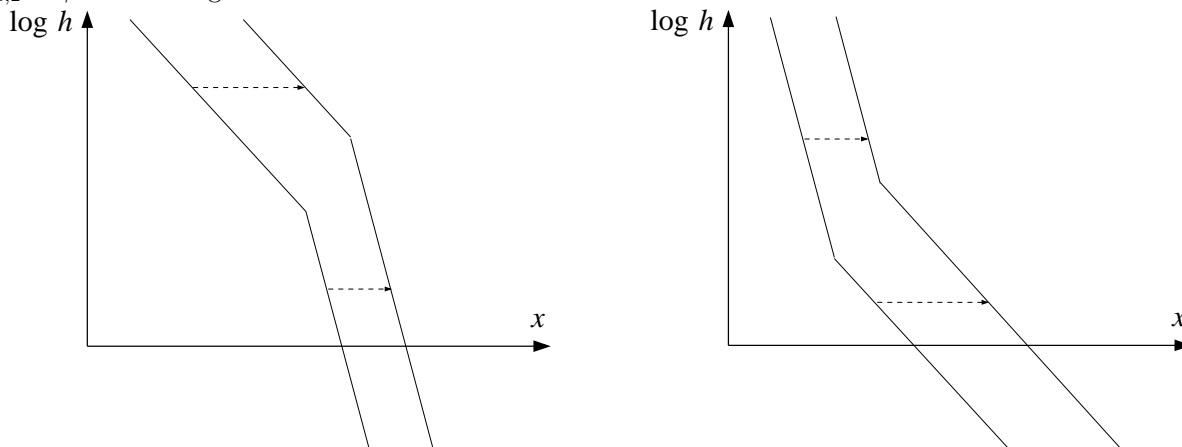
Une remarque simple permet d'avoir une intuition de la réponse : plus la solution décroît rapidement, moins la vitesse est grande. En effet, quand on écrit que pour une vitesse v donnée le front ressemble à

$$\tilde{h}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z},$$



le second terme est une petite correction par rapport au premier et la décroissance du front est déterminée par le plus petit seulement des deux taux γ qui correspondent à cette vitesse. C'est toujours le γ plus petit que γ^* qui est intéressant et, dans cette région, la vitesse est une fonction décroissante de ce taux γ .

Supposons qu'à un instant donné la solution soit donnée pour $x > x_1$ par $e^{-\gamma_1 x}$ et pour $x_1 > x > x_2$ par $e^{-\gamma_2 x}$, avec $\gamma_{1,2} < \gamma^*$. En distinguant deux cas



on voit que la région avec la décroissance $e^{-\gamma_1 x}$ (à l'avant du front) devient toujours plus importante, et que la région avec la décroissance $e^{-\gamma_2 x}$ (en arrière du front) perd du terrain. À long terme, c'est la décroissance $e^{-\gamma_1 x}$ qui va « gagner » et le front converge vers la solution avec cette décroissance.

On voit donc, un peu avec les mains, que c'est la décroissance à l'infini qui détermine la vitesse, et les non-linéarités sont incapables de « rattraper » ce qui se passe à l'avant pour imposer une vitesse différente. En résumé :

- Si $h(x, 0) \propto e^{-\gamma_1 x}$ avec $\gamma_1 < \gamma^*$, la solution converge vers le front qui se déplace à la vitesse $v(\gamma_1)$ (et qui a donc la décroissance $e^{-\gamma_1 z}$ à l'infini.)
- Si $h(x, 0) \propto e^{-\gamma^* x}$ ou $h(x, 0) \ll e^{-\gamma^* x}$, la solution converge vers le front qui décroît le plus rapidement et qui se déplace le plus lentement, à savoir le front qui va à la vitesse v^* et dont la décroissance à l'infini est en $ze^{-\gamma^* z}$.

C'est la vitesse du front dans l'analyse linéaire (voir plus haut).

C'est assez extraordinaire, je trouve, qu'il suffisse de résoudre l'équation linéarisée autour de $h = 0$ pour déterminer la vitesse de propagation.

Pour les problèmes qui m'intéressent habituellement, les conditions initiales sont localisées (au sens que $h(x, 0) = 0$ pour $x > a$ et $h(x, 0) = 1$ pour $x < b$), et donc la vitesse sélectionnée est la vitesse minimale v^* .

1.4 Le problème des fronts *pushed*

En fait, c'est un peu plus compliqué que ça et il y a des cas où l'analyse ci-dessus se révèle inexacte. Reprenons la forme du front pour z grand

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= Ae^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z} + \sum_{p,q} C_{p,q}(A, B)e^{-(p\gamma+q\gamma')z} \\ &\approx Ae^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{37}$$

Dans la section qui précède, on a partout implicitement supposé que A était strictement positif. Or A est déterminé par les non-linéarités de l'équation. Si $A < 0$, le front ressemble à



et on sait que ce genre de front est instable. Si $A = 0$, la deuxième ligne de l'équation ci-dessus est fautive et la décroissance du front est déterminée par $Be^{-\gamma' z}$.

On arrive à se convaincre que pour γ très petit (v très grand) le coefficient A est positif. Il convient donc de distinguer plusieurs cas :

- Si le coefficient A reste toujours positif pour toutes les valeurs de $v \geq v^*$, on est dans le cas de l'équation Fisher-KPP, que l'on vient d'étudier. La propagation du front est entièrement déterminée par l'analyse linéaire et pour une condition initiale localisée la vitesse de propagation est v^* . On dit que le front est « *pulled* »
- Si le coefficient A s'annule puis devient négatif, la situation est assez différente. On note v_c la vitesse pour laquelle A s'annule. (On a $v_c > v^*$.) Tous les fronts avec $v < v_c$ sont instables. Il reste vrai que plus la solution décroît

rapidement, moins la vitesse est grande. L'analyse de la section précédente s'applique donc et l'on se convainc que pour une condition initiale localisée la vitesse de propagation est v_c . On dit que le front est « *pushed* »

Déterminer si un front est *pulled* ou *pushed* n'est pas évident. S'il est *pushed*, on a besoin de faire une analyse non-linéaire pour déterminer la vitesse de propagation. Il existe des solutions pour toutes les vitesses supérieures ou égales à v_c , et pour une condition initiale localisée la vitesse de propagation est v_c . Une grande différence d'avec les fronts *pulled* est que la solution qui va à la vitesse v_c est *très différente* des solutions qui vont plus vite, puisque la solution à l'infini change brutalement de taux de décroissance. Ceci a pour conséquence que le front peut « accrocher » bien plus efficacement la solution qui va à la vitesse v_c et que la convergence vers ce front sera bien plus rapide.

Prenons un exemple

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (h - h^2)(1 + \alpha h). \quad (38)$$

L'équation linéarisée est la même que pour Fisher-KPP et on a, comme d'habitude, $v^* = 2$ et $\gamma^* = 1$. Il se trouve que pour la valeur particulière de v (et donc de γ) on sait résoudre explicitement cette équation :

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{\gamma(x - vt)}{2} \right) \quad \text{pour } \gamma = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \text{ et, bien sûr, } v = \gamma + \frac{1}{\gamma}. \quad (39)$$

Cette solution a ceci de particulier que pour $z = x - vt$ grand, le développement asymptotique fait apparaître un seul taux de décroissance :

$$h(x, t) = e^{-\gamma z} - e^{-2\gamma z} + e^{-3\gamma z} - e^{-4\gamma z} + \dots, \quad (40)$$

le taux γ' (égal à $1/\gamma$) n'apparaît pas ! C'est donc que l'un des coefficients A ou B est nul. Si cette valeur $\gamma = \sqrt{\alpha/2}$ est plus grande que $\gamma^* = 1$, il s'agit du coefficient A qui est nul et on se trouve dans le cas d'un front *pushed*, sinon c'est le coefficient B qui est nul et le front est *pulled*. Au final

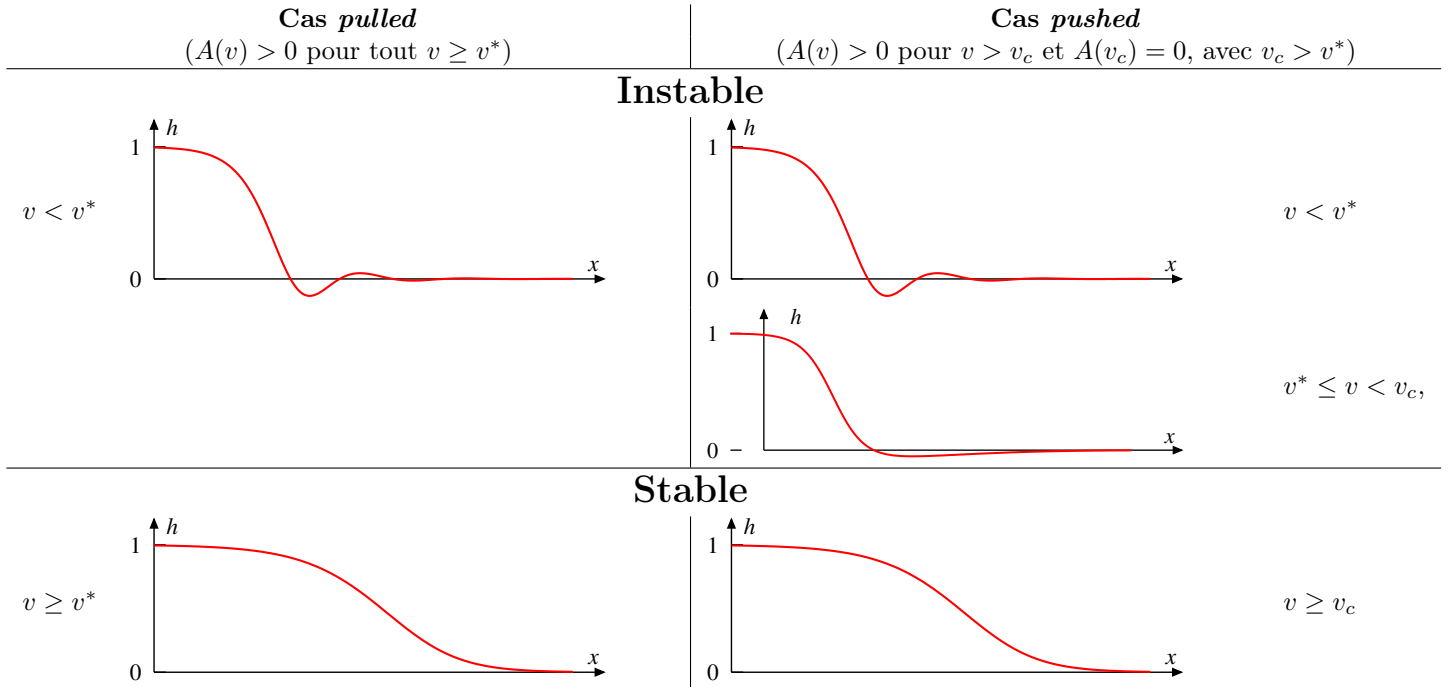
$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha > 2 \quad & \text{Le front est pushed avec } \gamma_c = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \text{ et } v = v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}, \\ \text{Si } \alpha < 2 \quad & \text{Le front est pulled avec } v = v^* = 2, \end{aligned} \quad (41)$$

1.5 Résumé

$$\tilde{h}(z) = A(v)e^{-\gamma(v)z} + \left(B(v)e^{-\gamma'(v)z} + \dots \right)$$

avec $\gamma(v) \leq \gamma'(v)$.

v^* est la vitesse où $\gamma = \gamma'$.



1.6 Convergence vers le front

Les fronts *pulled* convergent très lentement vers leur forme finale. La position X_t du front est donnée par

$$X_t \approx v^* t - \frac{3}{2\gamma^*} \log t + \mathcal{O}(1). \quad (42)$$

À l'inverse, les fronts *pushed* et les fronts qui se propagent dans un état stable convergent très vite vers leur forme finale

$$X_t \approx v_c t + \mathcal{O}(1). \quad (43)$$

Intuitivement, il est difficile pour le front *pulled* de trouver sa forme finale car il existe d'autres solutions presque aussi bonnes que la solution sélectionnée et qui ressemblent beaucoup à la solution sélectionnée. Le front hésite. Longtemps. À l'inverse, il est beaucoup plus facile de converger dans le cas stable, parce qu'il y a une seule solution, et dans le cas *pushed*, où la solution sélectionnée est très différente (et bien meilleure) que les autres solutions envisageables.

Détails techniques : on considère une équation de front de la forme

$$\partial_t h = h'' + Ah + (\text{non-linéarités}). \quad (44)$$

Si $A < 0$, c'est la propagation dans un état stable. Si $A > 0$, c'est la propagation dans un état instable, *pulled* ou *pushed* selon les non-linéarités.

Dans la partie linéaire de l'équation, la solution en propagation uniforme est de la forme

$$h(x, t) \propto e^{-\gamma(x-vt)}, \quad (45)$$

sauf dans le cas *pulled* avec vitesse minimale où l'on a

$$h(x, t) \propto (x - v^*t)e^{-\gamma^*(x-v^*t)}. \quad (46)$$

Dans tous les cas, $v = \gamma + A/\gamma$.

Pour trouver la manière dont le front converge vers cette solution en translation, on peut écrire la solution de (44) de la forme

$$h(x, t) = t^\alpha S\left(\frac{x - 2\gamma t}{\sqrt{t}}\right) e^{-\gamma(x - X_t)} \quad (47)$$

avec

$$\partial_t X_t = v - \frac{\beta}{t} \quad (48)$$

et où la fonction $S(u)$ vérifie

$$S'' + \frac{1}{2}uS' + (\gamma\beta - \alpha)S = 0. \quad (49)$$

Pour le front *pulled*, on a $\gamma = \gamma^*$ et on veut une solution telle que $S(u) \approx u$ pour u petit et, bien sûr, $\alpha = 1/2$ pour retrouver au temps long la solution $\tilde{h}(z) = ze^{-\gamma^*z}$. La solution est

$$S(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n + \gamma^*\beta)}{\Gamma(\beta)} u^{2n+1}, \quad (50)$$

Pour u grand, on a

$$S(u) \approx -\frac{2 \cos(\pi\beta\gamma^*)}{\Gamma(\gamma^*\beta)} \Gamma(2\gamma^*\beta - 1) u^{1-2\gamma^*\beta}. \quad (51)$$

$S(u)$ reste positif seulement pour $\gamma^*\beta \leq 3/2$, on ne considère donc que ces cas. Si on cherche l'évolution d'une condition initiale en $x^\nu e^{-\gamma^*x}$ avec $\nu \geq -2$, on voit qu'il faut sélectionner la solution avec $\nu = 1 - 2\gamma^*\beta$. Pour les solutions qui décroissent plus vite que $x^{-2}e^{-\gamma^*x}$, il faut prendre le plus grand β disponible, à savoir $\beta\gamma^* = 3/2$. La solution est alors

$$S(u) = ue^{-u^2/4} \quad (52)$$

qui décroît très vite (la forme asymptotique (51) n'est plus correcte), et qui convient donc bien à une condition initiale localisée. D'où

$$\partial_t X_t = v - \frac{3}{2\gamma^*t}. \quad (53)$$

Pour les autres fronts (état stable et *pushed*), on cherche une solution telle que $S(u) \approx 1$ pour u petit, et on veut $\alpha = 0$. La solution qui décroît le plus vite à l'infini (pour ressembler à la solution initiale) est pour $\beta = 0$:

$$S(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty dv e^{-v^2/4}. \quad (54)$$

1.7 Quelques exemples de fronts de type Fisher-KPP

Dans le continu

- Des particules diffusent et se dupliquent avec un taux 1 (*Branching Random Walk*). Avec un taux ϵ , deux particules qui se croisent coalescent :



Alors la quantité $h(x, t)$ défini comme $\epsilon \times$ (La densité de particules) vérifie l'équation de Fisher-KPP dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

- Des particules diffusent et se dupliquent avec un taux 1 (*Branching Random Walk*). À chaque fois que le nombre de particules devient supérieur à N , on enlève la particule la plus à gauche.

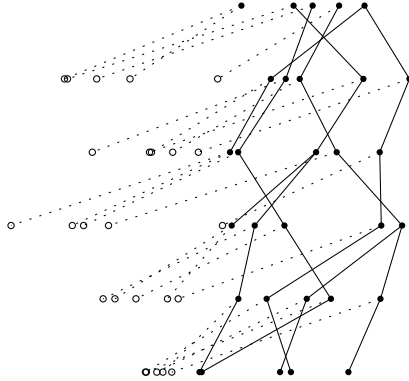


Si on pose $h(x, t)$ la fraction de particules à droite de x , alors dans la limite $N \rightarrow \infty$, on a

$$\partial_t h = \begin{cases} \partial_x^2 h + h & \text{pour } h < 1, \\ 0 & \text{pour } h = 1. \end{cases} \quad (55)$$

Dans le discret

- On a N particules aux positions $x_1(t), \dots, x_N(t)$. Entre le temps t et $t + 1$, chaque particule k a deux descendants placés en $x_k(t) + \eta_k(t)$ et $x_k(t) + \eta'_k(t)$, puis disparaît. Parmi les $2N$ nouvelles particules, on ne garde que les N les plus à droite. Les η sont tirés de manière indépendante avec une certaine distribution $\rho(\eta)$.



Si on pose $h(x, t)$ la fraction de particules à droite de x , alors dans la limite $N \rightarrow \infty$, on a

$$h(x, t + 1) = \min \left(1, 2 \int d\eta \rho(\eta) h(x - \eta, t) \right). \quad (56)$$

En cherchant des solutions de la forme $h(x, t) \propto e^{-\gamma(x-vt)}$, on trouve facilement

$$v(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \log \left(\int d\eta \rho(\eta) e^{\gamma\eta} \right). \quad (57)$$

(L'équation (5) est un cas particulier de ce modèle pour ρ uniforme entre 0 et 1. On trouve alors $v^* = 0,815$ pour $\gamma^* = 5,26$.)

Cette équation n'est pas toujours de type Fisher-KPP ; il faut bien choisir $\rho(\eta)$. Une condition nécessaire est que $v(\gamma)$ présente un minimum v^* pour une certaine valeur finie de γ^* . Je ne sais pas si cette condition est également suffisante. Sur plusieurs cas que j'ai testés, ça a l'air de marcher. Sur les exemples que j'ai pris, le front a toujours été *pulled*.

- On a N particules aux positions $x_1(t), \dots, x_N(t)$. Entre le temps t et $t + 1$, on renouvelle toute la population. Pour calculer $x_k(t + 1)$, on choisit deux ancêtres au hasard $x_{k_1}(t)$ et $x_{k_2}(t)$, on garde le plus grand et on ajoute un nombre aléatoire η . On trouve, pour $N \rightarrow \infty$,

$$h(x, t + 1) = \int d\eta \rho(\eta) [2h(x - \eta, t) - h(x - \eta, t)^2], \quad (58)$$

avec la même équation linéarisée, le même $v(\gamma)$ et les mêmes *caveat* que dans le cas précédent.

On note que dans tous ces cas, on peut définir de manière naturelle une généalogie du système, et on peut vouloir étudier ces arbres généalogiques. On a quelques indications, (d'ordre numérique et par analogie avec un autre problème), que ces arbres généalogiques ont une échelle de temps (définie comme le temps moyen pour trouver le plus récent ancêtre commun à deux individus) d'ordre $(\log N)^3$ et que mis convenablement à l'échelle, les statistiques de ces arbres sont données par le coalescent de Bolthausen-Sznitman.

2 Le front avec *cutoff*

Pour les fronts se propageant dans un état instable, de type *pulled*, la sélection de la vitesse est très sensible. Elle se fait dans la partie linéaire de l'équation et est déterminée par la manière dont le front décroît à l'infini. Or, pour un front avec bruit, c'est justement cette région qui est affectée le plus par le bruit. Ce n'est donc pas très étonnant que le bruit puisse beaucoup influencer la vitesse de propagation.

Le front *pulled* avec *cutoff*

Avant d'attaquer le problème avec bruit, on introduit une manière approchée de prendre en compte le caractère discret du front à l'état microscopique. Comme il n'y a pas d'intermédiaire entre avoir 0 et avoir une particule par unité de longueur à l'avant du front, il est raisonnable d'exiger que le front $h(x, t)$ tende vers 0 très rapidement lorsqu'il attend un ordre de grandeur d'environ $1/N$. On peut pour cela changer le terme de réaction dans l'équation de Fisher-KPP :

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (h - h^2)a(Nh) \quad (59)$$

où le *cutoff* $a(Nh)$ vérifie

$$\begin{cases} a(Nh) \approx 1 & \text{pour } Nh \gg 1, \\ a(Nh) \ll 1 & \text{pour } Nh \ll 1. \end{cases} \quad (60)$$

La solution ne devrait pas trop dépendre du *cutoff*. Le plus simple est sans doute de prendre

$$\begin{cases} a(Nh) = 1 & \text{pour } Nh > 1, \\ a(Nh) = 0 & \text{pour } Nh < 1, \end{cases} \quad (61)$$

mais je ne suis pas tout-à-fait sûr que cette équation ait un sens.

On peut évidemment appliquer le *cutoff* à toutes les équations de type Fisher-KPP. En particulier, c'est peut-être plus clair sur les équations en temps discret. Par exemple, en reprenant (5)

$$h(x, t + 1) = \begin{cases} 2 \int_0^1 dy h(x - y, t) & \text{si ce nombre est compris entre } 1/N \text{ et } 1. \\ 1 & \text{si le nombre ci-dessus est plus grand que } 1, \\ 0 & \text{si le nombre ci-dessus est plus petit que } 1/N. \end{cases} \quad (62)$$

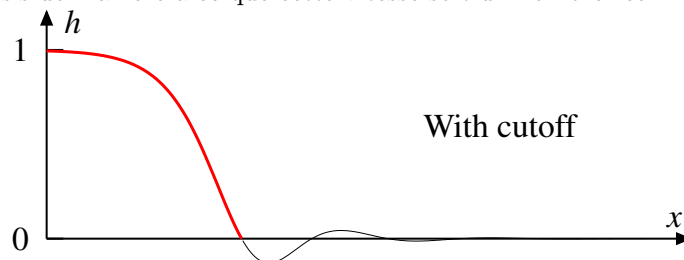
Cette modification du terme de réaction revient, dans tous les cas, à rendre très légèrement stable la phase $h = 0$, ce qui fait qu'on s'attend à ce qu'une seule vitesse soit possible. Quelle est cette vitesse? Pour $h > 1/N$, on a l'équation normale du front, donc la solution doit correspondre, dans cette région, à l'une des solutions possibles du front que l'on vient d'énumérer. On veut, de plus, que cette solution atteigne très vite 0 au moment où le front devient d'ordre $1/N$. Les seules solutions de l'équation de Fisher-KPP qui atteignent 0 sont celles qui correspondent à une vitesse plus petite que v^* et qui, dans la partie linéaire, sont décrites par des oscillations amorties :

$$\tilde{h}(z) \approx K \sin(\gamma_I z) e^{-\gamma_R z} \quad (63)$$

où K est déterminé par les non-linéarités. (On a utilisé l'invariance par translation pour écrire $\sin(\gamma_I z)$ et non $\sin(\gamma_I z + \phi)$.) La vitesse du front est alors donnée par la fonction $v(\gamma)$:

$$v = v(\gamma_R \pm i\gamma_I), \quad (64)$$

et γ_R et γ_I doivent être choisis de manière à ce que cette vitesse soit un nombre réel...



Il est entendu que l'expression (63) n'est valable que pour h très petit (linéarisation) mais plus grand que $1/N$ (là où le *cutoff* n'agit pas). Comparé à l'exponentielle, le sinus est une « grosse constante » : c'est l'exponentielle qui va donner l'ordre de grandeur de h . Le front va donc atteindre $1/N$ pour

$$z = z_{\text{cutoff}} \approx \frac{\log N}{\gamma_R}. \quad (65)$$

En ce point (ou proche de ce point), le front doit s'annuler. Ce n'est possible que si $\gamma_I z_{\text{cutoff}} = \pi$, soit

$$\gamma_I \approx \frac{\pi \gamma_R}{\log N}. \quad (66)$$

La partie imaginaire de γ est très petite. En imposant que la vitesse soit réelle, on voit facilement que γ_R doit être très proche de γ^* . (En étant précis, on a $\gamma_R - \gamma^*$ d'ordre $1/\log^2 N$.) On peut donc écrire, à l'ordre le plus bas,

$$\gamma \approx \gamma^* \pm i \frac{\pi \gamma^*}{\log N} \quad \text{et} \quad \tilde{h}(z) \approx K \sin\left(\frac{\pi \gamma^*}{\log N} z\right) e^{-\gamma^* z}. \quad (67)$$

Cette expression de \tilde{h} a une vertu intéressante : pour $z \ll (\log N)/\gamma^*$, on retrouve au premier ordre l'expression $\tilde{h} \approx A z e^{-\gamma^* z}$ du front normal, sans *cutoff*. Pour N très grand, le front avec *cutoff* est donc effectivement très proche de la solution sélectionnée par le système dans le cas sans *cutoff*, ce qui est quand même rassurant. On écrira donc plutôt

$$\tilde{h}(z) \approx A \frac{\log N}{\pi \gamma^*} \sin\left(\frac{\pi \gamma^*}{\log N} z\right) e^{-\gamma^* z}. \quad (68)$$

pour bien marquer ce point.

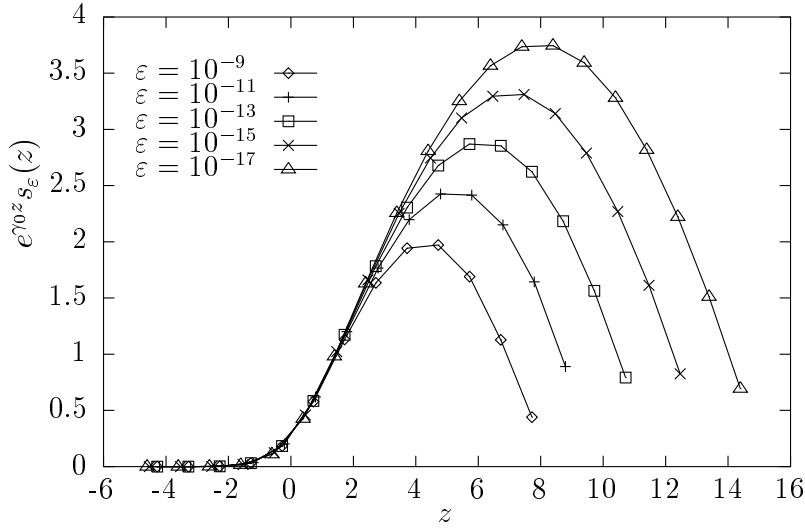


FIG. 1 – La forme $e^{\gamma^* z} \tilde{h}(z)$ en fonction de z , pour plusieurs valeurs de $\epsilon = 1/N$.

Naturellement, la vitesse de propagation du front avec *cutoff* est proche de v^* . En reportant l'expression de γ dans $v(\gamma)$, on trouve, par un simple développement limité,

$$v_{\text{cutoff}} \approx v^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \gamma^*}{\log N} \right)^2 v''(\gamma^*) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 N}\right). \quad (69)$$

La vitesse du front avec *cutoff* est donc inférieure à la vitesse naturelle du front. Elle ne dépend pas de la condition initiale et, bien que la différence entre v_{cutoff} et v^* tende vers 0 pour N grand, la convergence est très lente. On peut noter aussi que c'est bien l'ordre de grandeur du *cutoff* qui compte : si on remplace N par $2N$, le terme dominant ne change pas.

Au final, je n'ai pas utilisé dans ce calcul l'expression du front avec *cutoff*. On peut le faire, si on simplifie les non-linéarités. Considérons l'équation de front

$$\partial_t h = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 1, \\ \partial_x^2 h + h & \text{si } 1 > h > 1/N, \\ \partial_x^2 h & \text{si } h < 1/N. \end{cases} \quad (70)$$

(Cette équation est-elle bien définie ? Hmm.) On cherche des solutions en translation uniforme $h(x, t) = \tilde{h}(x - vt)$ et on trouve bien une seule solution : Soit $\phi \in [0, \pi/2]$ et L tels que

$$\frac{\pi - 2\phi}{\tan \phi} = \log N \quad L = \frac{\pi - 2\phi}{\sin \phi}. \quad (71)$$

(En pratique, $\phi \approx \pi/\log N$ et $L \approx \log N$.) Alors

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} 1 & \text{pour } z < 0, \\ \frac{1}{\sin \phi} \sin(z \sin \phi + \phi) e^{-\cos \phi z} \approx \frac{\log N}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z + \pi}{\log N}\right) e^{-z} & \text{pour } 0 < z < L, \\ \frac{1}{N} e^{-2 \cos \phi(z-L)} \approx \frac{1}{N} e^{-2(z-L)} & \text{pour } z > L. \end{cases} \quad (72)$$

et

$$v = 2 \cos \phi \approx 2 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}, \quad (73)$$

ce qui correspond bien au cas général puisque $\gamma^* = 1$, $v^* = 2$ et $v''(\gamma^*) = 2$.

Cas *pushed*

On peut faire la même analyse dans le cas *pushed*. Sans *cutoff*, le front va à la vitesse v_c et l'on a, pour z grand

$$\tilde{h}(z) = 0e^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z} \quad \text{pour } v = v_c. \quad (74)$$

avec $v_c = v(\gamma) = v(\gamma')$ et $\gamma' > \gamma > 0$. La vitesse sélectionnée est justement celle où le préfacteur du premier terme s'annule. Pour une vitesse très proche de v_c , on peut s'attendre à une petite correction de la forme

$$\tilde{h}(z) = a(v - v_c)e^{-\gamma z} + Be^{-\gamma' z} \quad \text{pour } v \approx v_c \quad (75)$$

où a est un nombre positif. (Strictement parlant, B , γ et γ' ont un petit peu bougé, aussi, d'une quantité d'ordre $v - v_c$.)

S'il y a un *cutoff* d'ordre $1/N$, le front doit s'annuler (ce qui implique $v < v_c$) lorsque chacun des deux termes devient d'ordre $1/N$. Autrement dit :

$$a(v_c - v)e^{-\gamma z_{\text{cutoff}}} = Be^{-\gamma' z_{\text{cutoff}}} \approx 1/N, \quad (76)$$

soit, en éliminant z_{cutoff} ,

$$v_{\text{cutoff}} \approx v_c - \frac{B^{\gamma/\gamma'}}{aN^{1-\gamma/\gamma'}}. \quad (77)$$

Les quantités B et a dépendent des non-linéarités et de l'origine des z , mais le rapport $B^{\gamma/\gamma'}/a$ ne dépend pas de l'origine des z (Seulement des non-linéarités.) La correction n'est plus un logarithme, mais une loi de puissance avec un exposant inférieur à 1. Cela signifie, en particulier, que contrairement au cas *pulled*, la manière précise dont on met le *cutoff* a une importance pour déterminer le préfacteur.

2.1 Cas stable

Voyons maintenant le cas d'un front se propageant dans un état stable. Quand on linéarise l'équation, on trouve deux solutions exponentielles, l'une qui décroît à l'infini $e^{-\gamma z}$, avec $\gamma > 0$, et une qui explose $e^{-\gamma' z}$, avec $\gamma' < 0$. De manière générale, la solution est une combinaison linéaire de ces deux solutions, dont les coefficients sont déterminés par les non-linéarités. Le seul front acceptable est celui qui va à la vitesse pour laquelle le coefficient de $e^{-\gamma' z}$ s'annule :

$$\tilde{h}(z) = Ae^{-\gamma z} + 0e^{-\gamma' z} \quad \text{pour } v = v_{\text{stable}}. \quad (78)$$

Pour une vitesse proche de v_{stable}

$$\tilde{h}(z) = Ae^{-\gamma z} + b(v - v_{\text{stable}})e^{-\gamma' z} \quad \text{pour } v \approx v_{\text{stable}}. \quad (79)$$

Et, par le même raisonnement que précédemment, on trouve le v_{cutoff} en imposant que les termes s'annulent quand ils sont d'ordre $1/N$:

$$Ae^{-\gamma z_{\text{cutoff}}} = b(v_{\text{stable}} - v)e^{-\gamma' z_{\text{cutoff}}} = 1/N, \quad (80)$$

soit

$$v_{\text{cutoff}} \approx v_{\text{stable}} - \frac{A^{\gamma'/\gamma}}{bN^{1-\gamma'/\gamma}}. \quad (81)$$

Les mêmes remarques que plus haut s'appliquent, avec une seule différence : ici, γ' est négatif, et donc la correction décroît plus vite que $1/N$. C'est donc dans tous les cas une très petite correction.

Résumé

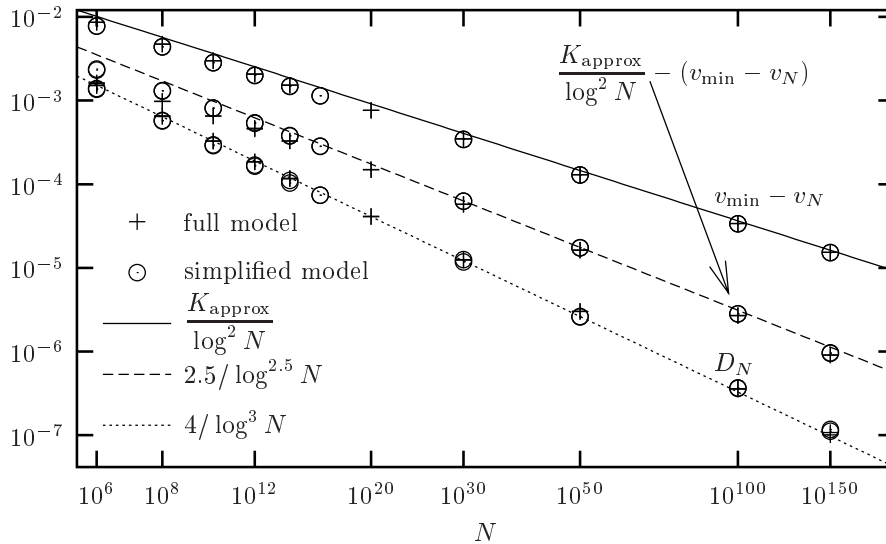
		Propagation dans un état instable		Propagation dans un état stable
		<i>Pulled</i>	<i>Pushed</i>	stable
		Beaucoup de solutions possibles La solution stable <i>la plus lente</i> est sélectionnée		Une seule solution existe —
		Résoudre une équation linéaire		Résoudre une équation non-linéaire
Si la condition initiale est localisée		$v(t) \approx v^* - \frac{3/(2\gamma^*)}{t}$	$v(t) = v_c + (\text{corrections très vite négligeables})$	
Vitesse avec <i>cutoff</i>		$v \approx v^* - \frac{K}{\log^2 N}$ —	$\alpha < 1$	$v \approx v_c - \frac{K}{N^\alpha}$ $\alpha > 1$

3 Le front avec bruit

On ne s'intéresse plus maintenant qu'aux fronts se propageant dans un état instable de type *pulled*.

La théorie du *cutoff* marche bien (simulations...) mais elle reste une théorie déterministe. Elle ne peut pas, en particulier, donner une prédiction pour la constante de diffusion. On va donc essayer de traiter plus directement le bruit.

Commençons par une simulation de modèle avec bruit. (Le modèle n'est pas exactement l'équation de Fisher-KPP, mais un modèle de la même classe, discret en espace et en temps, ce qui permet, avec quelques astuces, de simuler des systèmes *très* grands.)



De haut en bas, on a $v^* - v_N$, $v_N - v_{\text{cutoff}}$ et la constante de diffusion D_N . La première ligne droite est la prédiction du *cutoff* pour $v^* - v_N$, et les deux autres lignes sont des *fits* faits à la main des données numériques.

Première remarque, la théorie du *cutoff* fonctionne plutôt bien. Les symboles ne sont pas exactement sur la ligne, mais la différence entre v_N et la théorie du *cutoff* décroît clairement plus vite que $1/\log^2 N$, ce qui suggère que le coefficient du *cutoff* $(\pi\gamma^*)^2 v''(\gamma^*)/2$ est bien le bon. On peut aussi noter que la différence entre la théorie du *cutoff* et v_N décroît moins vite que $1/\log^3 N$, qui serait la prédiction du *cutoff*. Le deuxième terme du développement asymptotique n'est donc pas accessible par la théorie du *cutoff* seule.

Deuxième remarque, la constante de diffusion semble décroître comme $1/\log^3 N$.

Enfin, et c'est sans doute le plus intéressant, on a simulé deux modèles : le « full model » et le « simplified model ». Le « full model » correspond au modèle complet qui décrit exactement toutes les interactions microscopiques et toutes les sources de bruit. Le « simplified model », par contre, reprend l'équation déterministe de type Fisher-KPP pour tous les sites occupés par le front, sauf pour le site le plus à droite qui reste stochastique. Les résultats des deux modèles sont quasiment indistinguables. Autrement dit, il semble que *seul le bruit à l'extrémité du front a une réelle importance sur la propagation du front*.

On peut observer l'évolution d'un front bruité. On repère la position du front X_t et on regarde $h(X_t + z, t)e^{\gamma^* z}$ en fonction de z et de t . (Il est important de multiplier par $e^{\gamma^* z}$, sinon on ne voit rien.) On peut alors faire les hypothèses suivantes :

- La plupart du temps, on voit une magnifique arche de sinus de longueur $(\log N)/\gamma^*$. La théorie du *cutoff* est en gros correcte.
- La plupart du temps, le bruit agite tout doucement l'extrémité de cette arche de sinus.
- De temps en temps (mais rarement), on voit apparaître une *énorme* fluctuation qui part de l'extrémité de l'arche de sinus et qui la déforme complètement. Cette fluctuation apparaît très vite.
- Les fluctuations relaxent lentement et le front retrouve sa forme de sinus. Cette relaxation est « lisse » et le bruit ne semble pas y jouer de rôle.
- Une fluctuation semble pouvoir disposer du temps nécessaire pour relaxer avant qu'une autre fluctuation apparaisse.

C'est une hypothèse raisonnable de penser que l'aspect aléatoire dans la propagation du front est dominé par ces fluctuations rares et grandes. Le scénario devient alors :

- Le front se déplace à la vitesse v_{cutoff} et sa forme est l'arche de sinus caractéristique de la théorie du *cutoff*.
- Rarement, une fluctuation de grande taille apparaît rapidement de manière aléatoire puis relaxe lentement de *manière déterministe*, en suivant les équations du *cutoff*. Après un certain temps, on retrouve l'arche de sinus. et tout recommence.

L'hypothèse la plus forte, ici est de supposer que la relaxation de la fluctuation se fait de manière déterministe. Je ne sais pas le justifier autrement que par « c'est l'impression que la vidéo donne. »

Notons qu'il y a trois échelles de temps dans cette description : le temps T_{build} que met une fluctuation à se

construire, le temps T_{relax} que met la fluctuation à disparaître, et le temps T_{wait} entre deux fluctuations d'importance. Le scénario proposé suppose que

$$T_{\text{build}} \ll T_{\text{relax}} \ll T_{\text{wait}} \quad (82)$$

- T_{relax} est facile à estimer. Il s'agit de la relaxation d'une perturbation par un système diffusif de taille $\log N$. L'échelle de temps nécessaire est en $\log^2 N$, qui est l'échelle naturelle du modèle.
- T_{build} est sans doute d'ordre 1 (on reviendra là dessus). Elle est en tout cas tellement rapide qu'on la supposera plus ou moins instantanée.
- T_{wait} , comme on le verra plus loin, est d'ordre $\log^3 N$.

On pose δ la « taille » d'une fluctuation (on définira précisément δ plus tard). On pose $p(\delta) d\delta$ la probabilité d'observer une fluctuation de taille δ par unité de temps. Après un certain temps, on retrouve l'arche de sinus. Sans la fluctuation, la position du front aurait été $X_t = X_0 + v_{\text{cutoff}}t$. Avec la fluctuation, l'effet à long terme (mais avant la fluctuation suivante) est d'introduire un décalage de la position et l'on note $X_t = X_0 + v_{\text{cutoff}}t + R(\delta)$.

Si on connaît $p(\delta)$ et $R(\delta)$ (et si les hypothèses sont correctes...) le problème est résolu. En effet, on a

$$X_{t+dt} = X_t + v_{\text{cutoff}}dt + \begin{cases} R(\delta) & \text{proba. } p(\delta) d\delta dt \\ 0 & \text{proba. } 1 - dt \int d\delta p(\delta), \end{cases} \quad (83)$$

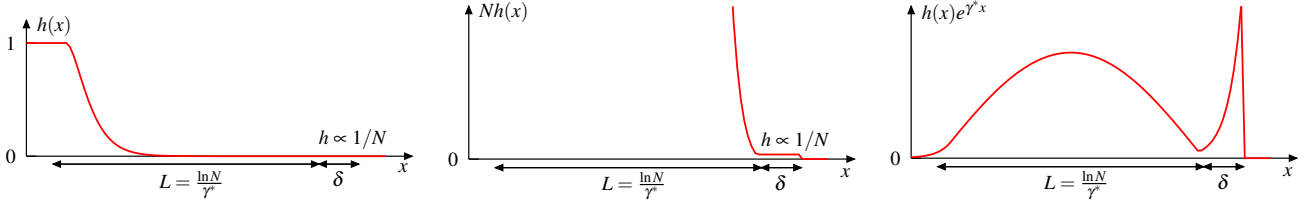
et on trouve rapidement

$$\log \langle e^{\lambda X_t} \rangle = \lambda(X_0 + v_{\text{cutoff}}t) + t \int d\delta p(\delta) (e^{\lambda R(\delta)} - 1). \quad (84)$$

Soit

$$v = v_{\text{cutoff}} + \int d\delta p(\delta) R(\delta), \quad D = \int d\delta p(\delta) R(\delta)^2, \quad \frac{k\text{-ième cumulante de } X_t}{t} = \int d\delta p(\delta) R(\delta)^k. \quad (85)$$

Il faut maintenant définir δ . Les fluctuations de la vidéo étaient énormes, des montagnes! Mais c'est parce qu'on a représenté non pas le front, mais le front fois $e^{\gamma^* z}$. Il suffit donc que le front soit étendu de quelques unités vers l'avant pour que, dans cette représentation, on voie une énorme fluctuation. On va donc définir la taille δ d'une fluctuation par la différence entre la longueur réelle du front et sa longueur naturelle :



Sur l'échelle réelle du front (figure de gauche) on ne voit rien. Si on zoome l'axe des ordonnées par un facteur N (figure du centre), la fluctuation est une petite extension de longueur δ du front. On imagine « quelques » particules (1 ? 10 ? 1 000 ? Je ne sais pas) qui sont en avant de la position normale du *cutoff*. On a représenté une forme de hauteur d'ordre $1/N$, qu'on a dessinée plate par ignorance de la forme réelle (sans doute aléatoire). Dans la représentation où l'on voit l'arche de sinus (figure de droite), à savoir $h(z)e^{\gamma^* z}$, la fluctuation est une montagne de hauteur $e^{\gamma^*(L+\delta)}/N = e^{\gamma^*\delta}$.

Essayons d'évaluer $p(\delta)$ et $R(\delta)$.

3.1 Expression de $p(\delta)$

Je vais supposer que

$$p(\delta) \approx C_1 e^{-\gamma^* \delta}. \quad (86)$$

En effet, c'est assez naturel de postuler une décroissance exponentielle : (proba qu'une particule aille à une distance kx) = (proba qu'une particule aille à une distance x)^k, et (86) est la décroissance exponentielle naturelle du front. On peut justifier cette expression un peu mieux en considérant le petit modèle suivant :

On regarde un *Branching Random Walk* : des particules diffusent et se dupliquent avec un taux 1. Si on ajoutait un mécanisme de saturation (par exemple, deux particules qui se croisent peuvent coalescer avec une toute petite probabilité), on obtiendrait un front de type Fisher-KPP. Cependant, considérant que les fluctuations se construisent à l'extrémité $h \ll 1$ du front en un temps court, il est raisonnable de supposer que les mécanismes de saturation n'interviennent pas pour la formation de ces fluctuations, et on les néglige ici.

Si on part d'une condition initiale qui ressemble au front et dont l'extrémité se trouve en $x = 0$ à $t = 0$, on trouve, pour t suffisamment grand, que la probabilité qu'il n'y ait aucune particule à gauche de x est donnée par

$$Q(x, t) \approx \exp[-C e^{-(x-2t)}]. \quad (87)$$

Qu'est-ce que cela signifie ? Sans terme de saturation (ce qui revient à prendre $N = \infty$), la position du front est une variable aléatoire de moyenne $2t$ et de variance d'ordre 1. Il n'y a donc pas de diffusion. Dans le référentiel qui se déplace avec le front à la vitesse $2t$, la position δ de la particule la plus à droite est donnée par une distribution de Gumbel. En particulier, pour δ grand, on a tout simplement

$$p(\delta) \propto e^{-\delta}. \quad (88)$$

Il est raisonnable d'interpréter ces événements comme des fluctuations de taille δ , et on retrouve le résultat annoncé.

On part d'une particule en 0 au temps $t = 0$. Quelle est la probabilité $P(x, t)$ qu'au temps t , toutes les particules soient à gauche de x ? En raisonnant sur le premier intervalle de temps dt , on a

$$P(x, t + dt) = \begin{cases} P(x - \eta\sqrt{dt}) & \text{proba } 1 - dt, \\ P(x, t)^2 & \text{proba } dt, \end{cases} \quad (89)$$

soit

$$\partial_t P = \partial_x^2 P - P + P^2. \quad (90)$$

on voit que la quantité $1 - P$ vérifie l'équation Fisher-KPP sans bruit. La condition initiale est $P(x, 0) = 1$ si $x > 0$ et $P(x, 0) = 0$ si $x < 0$. Dans la condition initiale qui nous intéresse, on n'a pas une seule particule, mais de nombreuses particules distribuées avec une certaine distribution $\rho(x)$. Quelle est la probabilité $Q(x, t)$ que tous leurs descendants soient à gauche de x au temps t ? On a

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= \prod_y (1 \times (1 - \rho(y)dy) + P(x - y, t)\rho(y)dy) \\ &= \exp\left(\int dy \rho(y)[1 - P(x - y, t)]\right). \end{aligned} \quad (91)$$

Dans le bon domaine (x et t assez grands), on a

$$1 - P(x, t) = A(x - X_t)e^{-(x - X_t) - (x - X_t)^2/4} \quad \text{avec } X_t = 2t - (3/2) \log t. \quad (92)$$

Pour $\rho(y)$, on veut donner une condition initiale qui ressemble au front. On avait écrit

$$\tilde{h}(z) \propto L \sin \frac{\pi z}{L} e^{-z} \quad \text{pour } 1 \ll z < L. \quad (93)$$

La densité de particule est donnée par Nh . De plus, on veut regarder le front depuis la pointe ($y = 0$) à la pointe du front. On écrit donc

$$\rho(y) = N\tilde{h}(y + L). \quad (94)$$

On est dans la limite où il n'y a pas de saturation, c'est-à-dire la limite $N \rightarrow \infty$. On obtient donc finalement

$$\rho(y) \propto (-y)e^{-y} \quad \text{pour } y < 0, \text{ et } 0 \text{ pour } y > 0. \quad (95)$$

On peut maintenant reporter ρ et $1 - P$ dans l'expression de Q et l'on obtient le résultat demandé pour t suffisamment grand et $x - 2t \ll \sqrt{t}$.

Notons que le calcul qui suit n'utilise ce résultat que pour des δ d'ordre $3 \log \log N$. On n'a donc pas besoin que (86) soit vrai pour des δ trop petits (beaucoup d'événements qui contribuent peu) ou pour δ trop grands (événements beaucoup trop rares pour contribuer.)

3.2 Expression de $R(\delta)$.

Ce calcul est purement déterministe. Il s'agit de prendre en compte la théorie du *cutoff* pour calculer l'effet sur la position du front d'une fluctuation de taille δ présente à l'instant $t = 0$.

On pose X_t la position du front, définie de manière à ce que dans la partie linéaire du front, mais loin du *cutoff*, on ait

$$h(X_t + z, t) \approx Aze^{-\gamma^* z}. \quad (96)$$

Ici, le coefficient A est fixé par les non-linéarités, et cette expression devient bien sûr non valide dès qu'on est trop près de 0. On va supposer que, dans cette histoire, le rôle des non-linéarités consiste à maintenir cette relation vraie en dépit des fluctuations. On va même simplifier au maximum ce rôle des non-linéarités. On suppose que pour $z > 0$, on peut décrire h par l'équation de Fisher-KPP linéarisée, et que le seul effet des non-linéarités est d'imposer

$$\begin{cases} h(X_t, t) = 0, \\ \partial_x h(X_t, t) = A. \end{cases} \quad (97)$$

On arrive alors à traiter ce problème en introduisant la fonction d'échelle $G(y, \tau)$ définie par

$$h(X_t + z, t) = ALG\left(\frac{z}{L}, \frac{t}{L^2}\right) e^{-\gamma^* z} e^{-\gamma^*(X_t - X_0 - v_{\text{cutoff}}t)}. \quad (98)$$

Le terme dans la seconde exponentielle est particulièrement intéressant, puisque c'est le terme que l'on cherche à calculer :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t - X_0 - v_{\text{cutoff}}t = R(\delta). \quad (99)$$

La condition initiale est celle d'un front avec une fluctuation, la condition finale est l'arche de sinus :

$$\begin{aligned} h(X_0 + z, 0)e^{\gamma^* z} &= ALG\left(\frac{z}{L}, 0\right) = \text{[Graphique: une courbe rouge en forme d'arche de sinus sur un axe } z \text{, commençant à } z=0 \text{ et se terminant à } z=L \text{. L'axe } z \text{ est étiqueté avec } L = \frac{\ln N}{\gamma^*} \text{ et } \delta \text{.} \text{]} \\ h(X_t + z, t)e^{\gamma^* z} &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} ALG\left(\frac{z}{L}, \infty\right) e^{-\gamma^* R(\delta)} = \text{[Graphique: une courbe rouge en forme d'arche de sinus sur un axe } z \text{, commençant à } z=0 \text{ et se terminant à } z=L \text{. L'axe } z \text{ est étiqueté avec } L = \frac{\ln N}{\gamma^*} \text{.} \text{]} \end{aligned} \quad (100)$$

Les conditions à gauche imposent

$$\begin{cases} G(0, \tau) = 0, \\ \partial_y G(0, \tau) = e^{\gamma^*(X_t - X_0 - v_{\text{cutoff}}t)}. \end{cases} \quad (101)$$

En particulier

$$\partial_y G(0, \infty) = e^{\gamma^* R(\delta)}. \quad (102)$$

Pour les conditions à droite, on a

$$\begin{cases} G(1 + \frac{\delta}{L}, 0) = 0, \\ G(1, \infty) = 0. \end{cases} \quad (103)$$

Au delà de ce point, on est dans le domaine du *cutoff*, l'équation linéaire n'est plus valable et le front est uniformément 0. Pendant toute la relaxation du système, le front atteindra 0 en un point y compris entre 1 et $1 + \delta/L$. Au premier ordre en $1/L$ on peut écrire, plus simplement,

$$G(1, \tau) \approx 0. \quad (104)$$

Enfin, en reportant h dans l'équation de Fisher-KPP linéarisée, on obtient

$$\partial_\tau G = \partial_y^2 G + \pi^2 G, \quad (105)$$

valable pour $0 < y < 1$ avec, donc

$$G(0, \tau) = G(1, \tau) = 0, \quad (106)$$

et

$$\begin{aligned} G(y, 0) &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi y) + \text{fluctuation de largeur } 1/L \text{ et de hauteur } e^{\gamma^* \delta}/L \text{ localisée à droite,} \\ G(y, \infty) &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi y) e^{\gamma^* R(\delta)}. \end{aligned} \quad (107)$$

La solution à (105,106) s'obtient en décomposition de Fourier :

$$G(y, \tau) = \sum a_n \sin(n\pi y) e^{-(n^2-1)\pi^2 \tau}. \quad (108)$$

Pour des temps longs, tous les modes disparaissent sauf le mode $n = 1$, et on retrouve bien l'arche de sinus. Le coefficient a_1 est donc relié à $R(\delta)$, et on obtient sa valeur en projetant la condition initiale sur ce mode :

$$e^{\gamma^* R(\delta)} = \pi a_1 = 2\pi \int_0^1 dy \sin(\pi y) G(y, 0). \quad (109)$$

L'intégrale sur le premier terme en $G(y, 0)$ vaut 1, reste à calculer l'intégrale de $\sin(\pi y) \times (\text{fluctuation})$. La fluctuation est localisée toute à droite ($y \approx 1$) sur une région de largeur $1/L$. Donc, $\sin(\pi y) \approx \pi(1 - y) \propto 1/L$. Par ailleurs, La fluctuation est d'ordre $e^{\gamma^* \delta}/L$, donc l'intégrande est d'ordre $e^{\gamma^* \delta}/L^2$. On intègre sur une région de taille $1/L$, le résultat est donc d'ordre $e^{\gamma^* \delta}/L^3$. Au final :

$$e^{\gamma^* R(\delta)} \approx 1 + C_2 \frac{e^{\gamma^* \delta}}{L^3}, \quad (110)$$

où C_2 est un nombre d'ordre 1.

On peut vérifier que cette expression est cohérente en considérant un très grand δ : une particule est très en avant devant le front. Cette particule va développer un nouveau front qui va remplacer le premier. La vitesse de ce front est d'abord $v_t = v^* - 3/(2\gamma^* t)$ (comme tout front qui se développe) tant que le *cutoff* est négligeable, puis elle se stabilise à $v_{\text{cutoff}} = v^* - K/L^2$. Le moment où cette stabilisation intervient est $t_1 \propto L^2$. La position du front, pour $t < t_1$, est $X_t = \delta + v^* t - 3/(2\gamma^*) \log t$ et devient, pour $t > t_1$ égale à $X_t = \delta + v^* t_1 - 3/(2\gamma^*) \log t_1 + v_{\text{cutoff}}(t - t_1)$. On trouve donc que $R(\delta) = X_t - v_{\text{cutoff}} t \approx \delta + K t_1 / L^2 - 3/(2\gamma^*) \log t_1 \approx \delta - 3(\log L) / \gamma^*$, qui est bien la prédiction de la formule générale.

On a alors $R(\delta) \approx \delta - 3 \log L$.

3.3 Calcul des cumulants

On a donc

$$p(\delta) \approx C_1 e^{-\gamma^* \delta}, \quad R(\delta) \approx \frac{1}{\gamma^*} \log \left(1 + C_2 \frac{e^{\gamma^* \delta}}{L^3} \right), \quad (111)$$

et l'on veut calculer (voir (85))

$$\int d\delta p(\delta) R(\delta)^k. \quad (112)$$

Le résultat final est

$$v \approx v_{\text{cutoff}} + \frac{C_1 C_2 3 \log L}{(\gamma^*)^2 L^3}, \quad \frac{k\text{-ième cumulant de } X_t}{t} \approx \frac{C_1 C_2}{(\gamma^*)^{k+1}} \frac{k! \zeta(k)}{L^3}. \quad (113)$$

On fait le changement de variable $x = C_2 e^{\gamma^* \delta} / L^3$. On trouve

$$\int d\delta p(\delta) R(\delta)^k = \frac{C_1 C_2}{(\gamma^*)^{k+1} L^3} \int_{C_2/L^3}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \log(1+x)^k. \quad (114)$$

Pour $k = 1$, on sait intégrer facilement (par parties). Pour $k \geq 2$, on se convainc que l'on peut ramener la borne inférieure à 0 sans trop changer la valeur de l'intégrale et l'on trouve une représentation de la fonction ζ . L'intégrale est dominée par des valeurs de x d'ordre 1, c'est-à-dire des valeurs de δ d'ordre $(3/\gamma^*) \log L$.

On a donc déterminé la vitesse et tous les cumulants de la position à un unique terme multiplicatif près, à savoir $C_1 C_2$.

Avant d'essayer d'évaluer ce $C_1 C_2$, on peut remarquer que le calcul de ces intégrales est dominé par des valeurs de δ d'ordre $(3/\gamma^*) \log L$. Les δ nettement plus petits sont fréquents mais n'ont pas assez d'effet, les δ nettement plus grand sont beaucoup trop rares pour contribuer réellement au mouvement. Étant donnée l'expression de $p(\delta)$, cela signifie que l'on a une fluctuation pertinente (qui contribue effectivement à la position du mouvement) avec une probabilité d'ordre dt/L^3 , soit une fluctuation tous les L^3 unités de temps. Étant donné que chaque fluctuation relaxe en un temps L^2 , l'hypothèse de séparation des échelles de temps est justifiée *a posteriori*.

3.4 Évaluation du terme $C_1 C_2$

La théorie du *cutoff* nous a donné

$$v \approx v^* - \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)/2}{L^2}, \quad (115)$$

où L est la « longueur du front », définie comme la distance entre la particule la plus à droite (là où le front h atteint 0) et le milieu du front (là où h vaut 0,5, par exemple, ou la position moyenne des particules. La définition précise ne change pas grand chose.) Le jeu entre l'exponentielle décroissante et l'arche de sinus donnait pour valeur de L

$$L_{\text{cutoff}} = \frac{\log N}{\gamma^*}. \quad (116)$$

La théorie phénoménologique du front avec bruit suggère que des fluctuations font que des particules s'aventurent au delà de cette longueur jusqu'à des distances d'ordre $3(\log L)/\gamma^* \approx 3(\log \log N)/\gamma^*$. (En fait, des particules peuvent s'aventurer plus loin que cette quantité, mais ces événements ne comptent pas.) Tout se passe donc comme si la longueur *effective* du front était plutôt

$$L_{\text{effective}} = \frac{\log N + 3 \log \log N}{\gamma^*}. \quad (117)$$

Si on utilise cette longueur-ci dans la formule du *cutoff*, la vitesse devient, en développant,

$$\begin{aligned} v &\approx v^* - \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)/2}{L_{\text{effective}}^2}, \\ &\approx v^* - \frac{\pi^2 (\gamma^*)^2 v''(\gamma^*)/2}{\log^2 N} + \pi^2 (\gamma^*)^2 v''(\gamma^*) \frac{3 \log \log N}{\log^3 N}, \\ &\approx v^* - \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)/2}{L_{\text{cutoff}}^2} + \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)}{\gamma^*} \frac{3 \log L_{\text{cutoff}}}{L_{\text{cutoff}}^3}, \\ &\approx v_{\text{cutoff}} + \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)}{\gamma^*} \frac{3 \log L_{\text{cutoff}}}{L_{\text{cutoff}}^3}. \end{aligned} \quad (118)$$

En comparant avec (113), il vient la prédiction

$$C_1 C_2 = \pi^2 \gamma^* v''(\gamma^*) \quad (119)$$

et donc

$$\frac{k\text{-ième cumulant de } X_t}{t} \approx \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)}{(\gamma^*)^k} \frac{k! \zeta(k)}{L^3}. \quad (120)$$

Je suis conscient que cet argument n'est pas très convaincant, et cette détermination de $C_1 C_2$ reste, à mon avis, le point le plus faible de ce cours. J'ai néanmoins quelques autres arguments en faveur de cette prédiction :

- L'équation Fisher-KPP semble avoir des applications en QCD (que je ne comprends pas), où il semble clair (?) que $(\log N + 3 \log \log N)/\gamma^*$ joue le rôle d'une longueur effective.
- Il y a un modèle très proche de Fisher-KPP, soluble, avec des résultats pour la vitesse et la constante de diffusion qui ressemblent en un certain sens au cas de Fisher-KPP, et, par analogie avec ce modèle, c'est cette valeur là qui apparaît naturellement dans la vitesse.
- Cette relation entre N et L apparaît aussi dans des mini-modèles conçus pour être très proches de Fisher-KPP, mais solubles.

Modèle de mur

On considère une *Branching Random Walk*, avec une règle de saturation qui maintient la densité de particules à l'arrière du front (ou le nombre total de particules) à la valeur N . On suppose que ce front à une longueur L (distance entre le milieu du front et la particule la plus à droite), mais on ne fait *a priori* aucune hypothèse sur la relation entre N et L . La configuration typique (dans la partie linéaire) et la vitesse de ce front sont respectivement données par

$$\tilde{h}(z) \propto L \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{-\gamma^* z}, \quad v \approx v^* - \frac{\pi^2 v''(\gamma^*)/2}{L^2}. \quad (121)$$

Le nombre N intervient quand on veut parler de la densité $\rho(z)$ de particules : on suppose que les configurations microscopiques peuvent être décrites par un processus de Poisson (en négligeant, donc, les corrélations) : il y a, indépendamment pour chaque intervalle dz , une particule dans cet intervalle avec une probabilité $\rho(z) dz$. On a alors

$$\rho(z) = N\tilde{h}(z). \quad (122)$$

Partant de cette configuration initiale, on suppose que l'on supprime le mécanisme de saturation (les particules continuent néanmoins à diffuser et à se dupliquer), et qu'on le remplace par un mur partant de $z = 0$ et se déplaçant vers la droite à vitesse constante. À chaque fois qu'une particule rencontre le mur, elle est supprimée. On conçoit que si le mur va plus vite que la vitesse du front, toutes les particules vont probablement finir par être absorbées par le mur. Au contraire, si le mur va plus lentement que le front, les particules ont plus d'espace pour se multiplier et vont très probablement survivre infiniment longtemps. Ce n'est que si le mur va exactement à la vitesse du front que l'on s'attend, pour des temps longs, à ce que les particules survivent ou disparaissent avec une probabilité intermédiaire, ni proche de 1 ni proche de 0. En imposant cette condition, on obtiendra une relation entre N et L .

On suppose donc que le mur se déplace à la même vitesse v que le front. Commençons par supposer qu'initialement, il y a une unique particule à une distance z du mur. Quelle est la probabilité $P(z)$ que le système survive aux temps longs ? Pendant le premier instant dt , la particule a diffusé d'une quantité $\eta\sqrt{dt}$ (avec η variable gaussienne), le mur a avancé de vdt et la particule s'est peut-être dupliquée (avec une probabilité dt .) On a donc

$$P(z) = \int d\eta p(\eta) \left(P(z + \eta\sqrt{dt} - vdt)(1 - dt) + dt[1 - (1 - P(z))^2] \right). \quad (123)$$

On trouve en développant que $P(z)$ vérifie l'équation

$$\partial_z^2 P - v\partial_z P + P - P^2 = 0. \quad (124)$$

C'est l'équation qui permet de déterminer la forme d'un front qui se déplacerait à la vitesse v en allant *de la droite vers la gauche*, (contrairement à *tout le reste de ce cours*) décrit par Fisher-KPP ! Il y a néanmoins une différence importante avec les autres fronts de ce cours, qui tient dans les conditions au bord :

$$P(0) = 0, \quad P(\infty) = 1. \quad (125)$$

Ici, $v < v^*$. La solution pour $P(z)$, si cette quantité était définie sur toute la ligne, serait une oscillation amortie. Mais $P(z)$ est positif, n'est définie que pour $z \geq 0$ et doit s'annuler en $z = 0$. La solution consiste donc à prendre la même solution que pour le front avec *cutoff*, c'est-à-dire le front avec une seule arche de sinus et qui s'arrête au premier 0. (Note, pour $v \geq v^*$, la seule solution pour que $P(0) = 0$ est de prendre $P(z)$ uniformément nulle : le mur va trop vite et la mort du système est une certitude, quel que soit z .)

En n'oubliant pas que le front décroît de droite à gauche (contrairement au reste du document) et que l'origine des z n'est pas à l'endroit habituel, on obtient donc, dans la région où $P(z) \ll 1$,

$$P(z) \approx AL e^{-\gamma^* L} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{\gamma^* z}, \quad (126)$$

La constante A est définie par les non-linéarités et v et L sont reliés par (121).

Au lieu de partir d'une seule particule, on suppose maintenant qu'il y a beaucoup de particules distribuées selon un processus de Poisson de densité $\rho(z)$. On obtient facilement que la probabilité de survie du système est donnée par

$$P^* = 1 - \exp\left[-\int dz \rho(z)P(z)\right] \quad (127)$$

On applique maintenant ce résultat au $\rho(z)$ qui décrit le front avec N particules. On obtient

$$P^* \approx 1 - \exp\left[-KNL^3 e^{-\gamma^* L}\right] \quad (128)$$

(où K est une constante), et donc, si on veut une probabilité de mort ou de survie intermédiaire,

$$NL^3 e^{-\gamma^* L} \approx 1, \quad (129)$$

soit

$$L \approx \frac{\log N + 3 \log \log N}{\gamma^*}. \quad (130)$$

4 Le modèle exponentiel

On considère N particules aux positions $x_1(t), \dots, x_N(t)$. Entre le temps t et $t + 1$, chaque particule a un nombre infini de descendants, puis disparaît. Les descendants de la particule k sont aux positions $x_k(t) + \eta_k^{(1)}(t), x_k(t) + \eta_k^{(2)}(t), \dots$, où les nombres η sont choisis indépendamment entre particules selon un processus de Poisson de densité $\psi(\eta)$. (*i.e.*, indépendamment pour chaque intervalle $d\eta$, il y a une particule présente avec une probabilité $\psi(\eta)d\eta$.) On ne garde que les N particules qui sont, globalement, le plus à droite.

Pour que le modèle soit bien défini, il faut que la densité $\psi(\eta)$ vérifie quelques propriétés. D'abord, elle doit être positive (évident, pour une densité). Ensuite, on doit avoir $\int d\eta \psi(\eta) = \infty$, pour que chaque particule ait effectivement un nombre infini de descendants. Si ce n'est pas le cas, il y a, à chaque étape, une probabilité $\exp[-N \int \psi d\eta]$ que le système s'éteigne. Enfin, ψ doit décroître suffisamment vite en $+\infty$ pour qu'il y ait effectivement une particule la plus à droite.

On peut écrire une équation de front pour ce modèle. Si $h(x, t)$ est la proportion de particules à droite de x , on trouve

$$h(x, t + 1) = \min\left(1, \int d\eta \psi(\eta)h(x - \eta, t) + \text{Bruit}\right), \quad (131)$$

où le bruit est de moyenne nulle et de variance d'ordre $1/N$. Dans la limite des N grands, il est raisonnable de supprimer le bruit, et on a une équation de front. On calcule le $v(\gamma)$

$$v(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \log \left[\int d\eta \psi(\eta) e^{\gamma\eta} \right]. \quad (132)$$

Pour beaucoup de fonction $\psi(\eta)$ (par exemple, $\phi(\eta) = 1$ pour $\eta < 0$ et $\phi(\eta) = 0$ pour $\eta > 0$, la fonction $v(\gamma)$ a la bonne allure et on peut vérifier numériquement que le front obtenu est bien un front de type Fisher-KPP. Mais pour d'autres choix de $\psi(\eta)$, on a des fronts de type différent. Un choix très intéressant est de prendre

$$\psi(\eta) = e^{-\eta}. \quad (133)$$

On obtient alors ce qu'on a appelé le « modèle exponentiel. » Pour ce choix de $\psi(\eta)$, la vitesse $v(\gamma)$ vaut $+\infty$ pour toute valeur de γ . Le front n'est certainement pas de type Fisher-KPP. Mais il a une grande qualité : on peut le résoudre explicitement.

En effet, considérons où vont arriver les particules à l'instant $t + 1$. Les descendantes de la k -ième particule de la génération t sont distribuées selon un processus de Poisson de densité $\psi(x - x_k(t))$. Les processus de Poisson sont additifs, ce qui signifie que la génération $t + 1$ au complet est tirée selon un processus de Poisson de densité $\Psi(x)$, avec

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^N \psi(x - x_k(t)). \quad (134)$$

En général, il n'y a rien de plus à dire, mais si $\psi(\eta)$ est l'exponentielle décroissante, tout ceci se simplifie en

$$\Psi(x) = e^{-(x-X_t)} \quad \text{avec} \quad X_t = \log \left(e^{x_1(t)} + \dots + e^{x_N(t)} \right). \quad (135)$$

Pour tirer la génération $t + 1$, tout se passe donc comme si les particules descendaient non pas de leurs parents respectifs, mais d'une unique particule située en X_t . En particulier, la forme du front à l'instant $t + 1$ ne dépend pas de la forme du front à l'instant t , et si on utilise X_t comme définition de la position du front, la variable $X_{t+1} - X_t$ est une variable aléatoire qui ne dépend ni de X_t , ni de la distribution des particules au temps t .

En utilisant les propriétés de cette variable aléatoire, on peut alors calculer la vitesse moyenne, la constante de diffusion et tous les cumulants en fonction de N . (Voir tableau ci-dessous.) Bien qu'on a une solution exacte, il se trouve que l'on peut également appliquer à ce modèle l'analyse phénoménologique que l'on a employée pour Fisher-KPP : si à un instant t la particule la plus à droite est à une distance δ au delà de sa position moyenne (ce qui arrive avec une probabilité $p(\delta)$), quel sera l'effet $R(\delta)$ sur la position du front ? (Effet que l'on observe dès l'instant $t + 1$; la relaxation est instantanée.) En utilisant cette description en termes de $p(\delta)$ et $R(\delta)$, on arrive à retrouver aux premiers ordres les bonnes expressions de la vitesse et des cumulants de la position. Tout est dans le tableau suivant, où l'on compare les résultats à Fisher-KPP :

	Modèle exponentiel	Fisher-KPP
v_{cutoff}	$\log(\log N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log N}\right)$	$v^* - \frac{K}{(\log N)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 N}\right)$
Vitesse	$\log(\log N + \log \log N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log N}\right)$	$v^* - \frac{K}{(\log N + 3 \log \log N)^2} + \dots$
Constante de diffusion	$\frac{\pi^2/3}{(\log N + \log \log N)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^2 N}\right)$	$(2K/\gamma^*) \frac{\pi^2/3}{(\log N + \dots)^3} + \dots$
$p(\delta)$	$\frac{e^{-\delta}}{e^{-\delta}}$	$C_1 e^{-\gamma^* \delta}$
$R(\delta)$	$\log\left(1 + \frac{e^\delta}{\log N}\right)$	$\frac{1}{\gamma^*} \log\left(1 + C_2 \frac{e^{\gamma^* \delta}}{\log^3 N}\right)$
Longueur du front	$\log N + \log \log N$	$(\log N + 3 \log \log N)/\gamma^*$
Temps de relaxation	1	$\log^2 N$
Temps entre deux fluctuations	$\log N$	$\log^3 N$

La similarité entre ces deux systèmes est claire, et apporte une justification supplémentaire à la théorie phénoménologique.

Notons qu'on peut également étudier les arbres généalogiques que donne ce modèle. Le temps moyen pour retrouver l'ancêtre commun entre deux individus est $\log N$, et la statistique de ces arbres (correctement mis à l'échelle, et dans la limite $N \rightarrow \infty$) est donnée par le coalescent de Bolthausen-Sznitman. On pense que cela reste vrai dans le cas Fisher-KPP, mais avec un temps d'ordre $\log^3 N$ pour trouver l'ancêtre commun à deux individus.