

LP200

Éric Brunet
Eric.Brunet@lps.ens.fr

5 janvier 2013

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Puissances et continuité	3
1.2	Fonctions	4
1.3	Programme	5
2	Limites, continuités, dérivabilité	6
2.1	Continuité et limites	6
2.2	Dérivabilité	8
3	Formules de Taylor, développements limités, séries entières	12
3.1	Introduction	12
3.2	Développements de Taylor	12
3.3	Notation de Landau	13
3.4	Séries entières	14
3.5	Exemples	15
3.6	Développements asymptotiques	17
4	Intégration, primitives	19
4.1	Définition	19
4.2	Premiers exemples et propriétés élémentaires	20
4.3	Relation entre intégrale et primitive	21
4.4	Calculs de primitives	21
4.5	Calculs d'intégrales	23
4.6	Intégrales impropres	23
4.7	Techniques avancées	25
5	Équations différentielles	27
5.1	Équations différentielles linéaires	27
5.2	Techniques pour résoudre les équations différentielles linéaires	28
5.3	Équations différentielles non linéaires	30
6	Fonctions de plusieurs variables, différentielles	31
6.1	Limites, continuité	31
6.2	Dérivées partielles, fonctions différentiables	32
6.3	Dérivées secondes et théorème de Schwartz	33
6.4	Formes différentielles	33
6.5	Intégration d'une forme différentielle le long d'un chemin	34
6.6	Pour aller plus loin, un exemple de forme fermée non exacte	35
6.7	L'exemple de la thermodynamique ; fonctions réciproques	36
7	Champs, gradients, intégrales le long d'un chemin	38
7.1	Introduction	38
7.2	Déplacement infinitésimal et gradient	38
7.3	Intégration le long d'un chemin	40
8	Intégrales de volume et de surface	41
8.1	Intégration sur un carré	41
8.2	Intégration sur un disque en cartésien	42
8.3	Intégration sur un disque d'une fonction du rayon	42
8.4	Intégrale gaussienne	43
8.5	Intégrales de volume	43

9	Systèmes de coordonnées	44
9.1	Coordonnées cartésiennes	44
9.2	Coordonnées polaires et cylindriques	45
9.3	Coordonnées sphériques	45
9.4	Coordonnées et gradients	46
9.5	Coordonnées et intégration de volume	46

Chapitre 1

Introduction

1.1 Puissances et continuité

Que signifie 2^π ? Commençons par le commencement.

Si p est un entier strictement positif et x un réel, alors on sait que $x^p = \underbrace{xx \cdots x}_{p \text{ fois}}$. On a alors les propriétés

$$\boxed{x^{p+q} = x^p x^q, \quad x^{pq} = (x^p)^q, \quad (xy)^p = x^p y^p.} \quad (1.1)$$

Que signifie x^0 ? A priori, rien, mais on décide d'un sens, du seul sens qui permet de garder les mêmes règles. On doit avoir

$$x^{p+0} = x^p x^0 = x^p, \quad (1.2)$$

et donc soit $x^0 = 1$, soit $x^p = 0$. Mais $x^p = 0$ ne peut arriver que si $x = 0$, et donc on en déduit

$$\boxed{x^0 = 1 \quad \text{si } x \neq 0} \quad (1.3)$$

La forme 0^0 est indéterminée. On y reviendra.

Que signifie x^{-p} pour p entier strictement positif? A priori rien, mais on décide d'un sens, du seul sens qui permet de garder les mêmes règles. On doit avoir

$$x^{p-p} = x^p x^{-p} = x^0 = 1 \quad \text{si } x \neq 0 \quad (1.4)$$

Et donc

$$\boxed{x^{-p} = 1/x^p \quad \text{si } x \neq 0} \quad (1.5)$$

Que signifie $x^{1/2}$? A priori rien, mais on décide d'un sens, du seul sens qui permet de garder les mêmes règles. On doit avoir

$$x^{(1/2) \times 2} = x = (x^{1/2})^2 \quad (1.6)$$

$x^{1/2}$ doit donc être **une** racine carrée de x . Rappelons qu'un réel strictement positif a deux racines carrées notées \sqrt{x} et $-\sqrt{x}$. Pour trouver des racines carrées à un réel négatif, il faut partir dans les complexes, ce qui est faisable mais un peu compliqué ici; on décide donc de se restreindre à $x \geq 0$ et, arbitrairement, on décide que

$$\boxed{x^{1/2} = \sqrt{x} \quad \text{si } x \geq 0} \quad (1.7)$$

De même, $x^{1/q}$ pour $x \geq 0$ et q entier strictement positif est **la** racine q -ième positive de x .

On sait maintenant définir $x^{p/q}$ pour x positif et p et q entiers en combinant les opérations au dessus. Par exemple

$$27^{2/3} = \begin{cases} (27^2)^{1/3} = \text{racine cubique du carré de } 27 = \sqrt[3]{729} \\ (27^{1/3})^2 = \text{carré de la racine cubique de } 27 = 3^2 = 9. \end{cases} \quad (1.8)$$

On sait donc définir des choses comme $2^{3,14159} = 2^{314159/100000}$, mais que vaut 2^π ? Sortons exceptionnellement la calculatrice

$$2^3 = 8 \quad 2^{3,1} = 8,57\dots \quad 2^{3,14} = 8,815\dots \quad 2^{3,141} = 8,821\dots \quad 2^{3,1415} = 8,8244\dots \quad (1.9)$$

$$2^{3,14159} = 8,82496\dots \quad 2^{3,141592} = 8,8249738\dots \quad 2^{3,1415926} = 8,824977499\dots \quad (1.10)$$

On constate que si r et r' sont deux rationnels « proches », alors 2^r et $2^{r'}$ sont également proches. On peut rendre cette remarque rigoureuse, et on dira que la fonction $r \mapsto 2^r$ (définie sur les rationnels) est **continue**.

Cette continuité implique que si une **suite** (r_n) de rationnels converge vers π , alors la suite (2^{r_n}) converge vers un nombre indépendant de la suite (r_n) et qu'on nomme, naturellement, 2^π . On a ainsi défini 2^π et on trouve

$$2^\pi = 8,824977827\dots \quad (1.11)$$

L'exemple qui précède est en fait assez compliqué, mais les notions de limite, de convergence et de continuité sont centrales et seront vues en détail dans le chapitre suivant.

1.2 Fonctions

1.2.1 Puissances, exponentielles et logarithmes

Dans la section précédente, on a implicitement introduit les fonctions **puissance** et **exponentielle** :

– Pour y donné, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^y \end{aligned} \quad (1.12)$$

est une fonction **puissance**. Par exemple, $x \mapsto x^2$.

– Pour $b > 0$ donné, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto b^x \end{aligned} \quad (1.13)$$

est la fonction **exponentielle** de base b . Par exemple, $x \mapsto 2^x$.

La fonction exponentielle de base b est **croissante** si $b > 1$ et **décroissante** si $b < 1$.

La fonction **réciproque** de l'exponentielle de base b est le logarithme de base b , noté \log_b . Par exemple

$$\begin{aligned} \log_2(16) &= 4 \quad \text{parce que } 2^4 = 16 \\ \log_{10}(1000) &= 3 \quad \text{parce que } 10^3 = 1000. \end{aligned} \quad (1.14)$$

De manière générale, $b^{\log_b(x)} = \log_b(b^x) = x$.

Les propriétés du logarithme se déduisent des propriétés de l'exponentielle.

$$\begin{aligned} b^0 &= 1 && \Rightarrow && \log_b(1) &= 0 \\ b^1 &= b && \Rightarrow && \log_b(b) &= 1 \\ b^{x+y} &= b^x b^y && \Rightarrow & x + y = \log_b(b^x b^y) && \Rightarrow & \log_b(X) + \log_b(Y) = \log_b(XY) \\ b^{xy} &= (b^x)^y && \Rightarrow & xy = \log_b[(b^x)^y] && \Rightarrow & y \log_b(X) = \log_b(X^y) \\ b^{-x} &= 1/b^x && \Rightarrow & -x = \log_b(1/b^x) && \Rightarrow & -\log_b(X) = \log_b(1/X) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Il y a une base « naturelle » (pour des raisons qu'on verra plus tard) de l'exponentielle et du logarithme : la base $e = 2,7182818\dots$ dite **népérienne**. e^x est noté $\exp(x)$ et \log_e est noté \ln .

Remarque 1 : si on suppose connues par avance les fonctions \exp et \ln , une autre manière de définir x^y pour un réel y quelconque est $x^y = \exp[y \ln(x)]$.

Remarque 2 : chez les chimistes, \log (sans indice) signifie \log_{10} . Chez les mathématiciens, $\log = \ln$. Chez les informaticiens, $\log = \log_2$. Les physiciens expérimentateurs sont comme les chimistes, les physiciens théoriciens comme les mathématiciens.

1.2.2 Rappels de terminologie

Une fonction associe à chaque élément d'un **ensemble de départ** au plus un élément d'un **ensemble d'arrivée**. Exemples :

- À chaque craie, on associe une couleur : ensemble des craies de la boîte vers l'ensemble des couleurs. Chaque craie n'a qu'une couleur.
- À chaque étudiant, on associe une note : ensemble des étudiants vers ensemble des réels. Certains étudiants absents n'ont pas de note.
- On lance un objet. À chaque instant t , on associe la vitesse $v(t)$ de l'objet lancé : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- On peut aussi associer à t le **vecteur vitesse** $\mathbf{v}(t)$: \mathbb{R} vers V , ensemble des vecteurs de l'espace
- À chaque point de l'espace, une température, une pression : espace vers \mathbb{R} . Remarque : une fonction qui associe un nombre à chaque point de l'espace s'appelle un **champ scalaire**
- À chaque point de l'espace, le vecteur vitesse du vent, le vecteur champ électrique : espace vers V . Remarque : une fonction qui associe un vecteur à chaque point de l'espace s'appelle un **champ vectoriel**
- Si l'espace est repéré en coordonnées cartésiennes, à tout triplet (x, y, z) la température $T(x, y, z) : \mathbb{R}^3$ vers \mathbb{R}

L'**ensemble de définition** est la partie de l'ensemble de départ où la fonction est bien définie. Par exemple, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 1/x$ a pour ensemble de définition \mathbb{R}^* .

L'**image** est l'ensemble des valeurs atteintes. Par exemple, l'image de \exp est \mathbb{R}^{*+} , l'image de \sin est $[-1, 1]$.

Pour les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , vous savez normalement ce qu'est une fonction **paire**, **impaire**, **croissante**, **décroissante**, **monotone**, **périodique**, **convexe**, **concave**.

Quand les éléments de l'**image** n'ont qu'un seul **antécédent**, on dit que la fonction est **injective**. Par exemple, \exp est injective mais la fonction « carré » $x \mapsto x^2$ ne l'est pas. Toute fonction **strictement monotone** est injective.

Quand une fonction f est injective, on peut définir la fonction **réciproque** (parfois notée f^{-1}) qui à tout élément de l'**image** de f associe son **antécédent** par f : si $f(x) = y$, alors $f^{-1}(y) = x$.

On a parfois envie de définir la fonction réciproque d'une fonction qui n'est pas injective, comme par exemple \sin , mais c'est problématique : est-ce que $\arcsin(1/2)$ vaut $\pi/6$, ou $5\pi/6$, ou $\pi/6 + 2\pi$, ou autre chose ? On choisit arbitrairement que $\arcsin(x)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$: en effet, sur cet intervalle, \sin est injective et atteint tous les points de son image. La conséquence de cette manipulation est que l'on a bien

$$\sin[\arcsin(x)] = x \tag{1.16}$$

mais que (attention !)

$$\arcsin[\sin(x)] = x \quad \text{seulement si } x \in [-\pi/2, \pi/2]. \tag{1.17}$$

De même, on décrète que $\arccos(x)$ prend ses valeurs dans $[0, \pi]$ et $\arctan(x)$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

1.3 Programme

Nous allons passer une bonne partie du module sur les fonctions réelles d'une variable réelle ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) : dérivées, intégration, développements limités, équations différentielles.

Une deuxième partie concernera les fonctions de plusieurs variables ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, typiquement) : dérivées partielles, différentielles.

Enfin, nous apprendrons à manipuler les champs (fonctions dont l'ensemble de départ est l'espace) : intégration de surface, de volume, gradients et divergences.

Beaucoup de notions sont supposées connues. Par exemple, toutes celles qui ont été rappelées dans ce chapitre d'introduction (voir par exemple tous les mots en gras, ou toutes les règles de transformation) : je ne veux voir personne se tromper sur les règles de simplification d'un logarithme !

Chapitre 2

Limites, continuités, dérivabilité

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux fonctions réelles d'une variable réelles : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1 Continuité et limites

2.1.1 Définition de la continuité

Qu'est-ce qu'une fonction continue? Est-ce une fonction dont la valeur « ne saute pas », une fonction qu'on peut tracer d'un seul coup de crayon? Une fonction telle que si x et y sont proches, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches?

Tout ceci est plus ou moins vrai¹, mais n'est pas très rigoureux. Pour avoir une bonne définition de la continuité, on doit utiliser la notion de limite :

Définition. Une fonction est continue si elle est continue en chacun des points où elle est définie.

Une fonction f est continue en un point a si la limite de f en a existe (et vaut alors nécessairement $f(a)$).

En équation, on écrira que f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a). \quad (2.1)$$

2.1.2 Rappels sur la notion de limite

Rappelons ce que signifie (2.1) :

- $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de $f(a)$ si l'on choisit x assez proche de a .
- À la physicienne : $f(a + \delta) \approx f(a)$ si δ est tout petit.
- Plus rigoureusement, pour tout $h > 0$ mais aussi petit que l'on veut, on peut toujours trouver un intervalle I autour de a tel que pour toute valeur de x dans I on a

$$|f(a) - f(x)| < h \quad \text{ou} \quad f(a) - h < f(x) < f(a) + h \quad (2.2)$$

On peut écrire la même chose avec une grosse équation intimidante :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{signifie} \quad \forall h > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \quad |f(x) - f(a)| < h. \quad (2.3)$$

Pour faire le tour de la notion de limite, écrivons :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{signifie} \quad \forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \quad f(x) > A, \quad (2.4)$$

ou, en mots : $f(x)$ tend vers $+\infty$ en a si pour tout nombre A aussi grand que l'on veut, on peut toujours trouver un intervalle I autour de a tel que pour toute valeur de x dans I on a $f(x) > A$.

Écrivons aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{signifie} \quad \forall h > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x > B, \quad |f(x) - l| < h, \quad (2.5)$$

ou, en mots : $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si pour tout $h > 0$ mais aussi petit que l'on veut, on peut toujours trouver un nombre B tel que pour tout x plus grand que B , on a $f(x)$ proche de l à h près.

On laisse comme exercice le soin d'écrire la signification de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

¹Il existe des fonctions continues « monstrueuses » qu'on ne peut pas envisager de dessiner...

Une notion très importante liée aux limites est la notion d'équivalents :

Définition. On considère deux fonctions f et g définies autour d'un point a . On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad (2.6)$$

On peut aussi dire que f est un équivalent de g , ou que g est un équivalent de f au voisinage de a . On note alors

$$f \sim g \quad \text{au voisinage de } a \quad (2.7)$$

Remarque : on peut parler d'équivalence autour d'un point a fini ($a = 0$, par exemple) ou infini ($a = +\infty$).

Intuitivement, g est un équivalent de f si, au voisinage du point considéré, g est une bonne approximation de f . Par exemple, si on prend la fonction $x \mapsto x + x^2$, alors

$$x + x^2 \sim x \quad \text{au voisinage de } 0, \quad x + x^2 \sim x^2 \quad \text{au voisinage de } \infty. \quad (2.8)$$

Ça se vérifie directement par la définition. La compréhension intuitive est que si x est proche de 0, alors x^2 est négligeable devant x et que donc $x + x^2$ est presque égal à x . Par contre, au voisinage de l'infini, c'est x^2 qui est négligeable devant x^2 et donc $x + x^2$ est presque égal à x^2 .

Si f a une limite non-nulle en a , alors dire que f et g sont équivalents revient à dire que g a la même limite que f en a .

Ça n'a aucun sens d'écrire qu'une fonction est équivalente à 0 (la fonction nulle).

Il est important de bien comprendre la notion d'équivalence, mais il faut réfléchir à chaque fois parce qu'il est facile de se tromper. En particulier, supposons que $f \sim g$ et $h \sim k$ autour d'un point a . Alors **il n'est pas toujours vrai que** $f + h \sim g + k$, ou que $\phi \circ f \sim \phi \circ g$ (où ϕ est une fonction donnée), ou que $f' \sim g'$. Exercice : trouver des contre-exemples.

2.1.3 Propriétés des fonctions continues

La notion de limite en a , et donc la notion de continuité en a n'a de sens que si la fonction considérée est définie en a et autour de a , au moins d'un côté (ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur \mathbb{R}^+ , est continue en 0).

Toutes les fonctions usuelles (exp, ln, sin, etc.) sont continues. Même la fonction inverse $x \mapsto 1/x$ est continue, d'après notre définition : cette fonction n'est pas définie en 0, et elle est bien continue en tous les points où elle est définie!

Si f et g sont deux fonctions continues, alors $f + g$, fg , $f \circ g$, f/g sont continues ; il n'y a pas de mauvaise surprise.

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ atteint dans cet intervalle toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Quand on fait le rapport f/g de deux fonctions continues et que $g(a) = 0$, alors f/g n'est pas définie en a . Lorsque f s'annule aussi en a , alors le rapport f/g a parfois une limite en a , et on peut **prolonger la fonction par continuité**. L'exemple canonique est la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ autour de $a = 0$, voir la figure 2.1. On peut démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$, et donc la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

est bien une fonction continue, c'est le seul prolongement continu de $\sin(x)/x$ en $x = 0$.

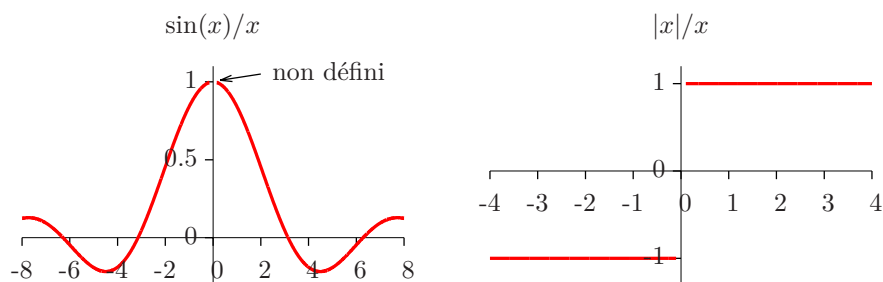


FIG. 2.1 – Les fonctions $x \mapsto \sin(x)/x$ et $x \mapsto |x|/x$ ne sont pas définies en 0, mais la première peut-être prolongée par continuité en 0.

Un contre-exemple (voir la figure) est la fonction $x \mapsto |x|/x$. Cette fonction a une **limite à droite** en 0 qui vaut 1 et une **limite à gauche** en 0 qui vaut -1 . On ne peut pas prolonger de manière continue cette fonction en 0.

2.1.4 Notation ϵ

On considère une fonction f définie autour d'un point a . Une manière pratique de noter que la fonction f est continue en a est de dire que la fonction $\epsilon(\delta)$ définie par

$$f(a + \delta) = f(a) + \epsilon(\delta) \quad (2.10)$$

est telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon(\delta) = 0. \quad (2.11)$$

Autrement dit, si δ est petit, alors $f(a + \delta)$ est égal à $f(a)$ plus quelque chose de petit. On prend la convention générale suivante :

Définition. De manière implicite, la fonction $\delta \mapsto \epsilon(\delta)$ représente toujours une fonction non-précisée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie dans un voisinage de 0 et telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon(\delta) = 0 \quad (2.12)$$

(Dit autrement, cette fonction est continue en 0 et vaut 0 en 0). On s'autorise à réutiliser cette notation dans plusieurs lignes de calculs, voire même dans la même ligne pour signifier à chaque fois une fonction **différente**, mais ayant cette propriété.

Par exemple, on écrira

$$\exp(\delta) = 1 + \epsilon(\delta), \quad (2.13)$$

ce qui signifie que la fonction \exp est continue en 0 et vaut 1 en 0. Autre exemple :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \delta\right) = \frac{1}{2} + \epsilon(\delta), \quad (2.14)$$

c'est-à-dire : \sin est continue en $\pi/6$ et vaut $1/2$. Ce n'est pas la même fonction ϵ dans les deux exemples précédents ! Si on fait la somme de ces deux équations, on écrira

$$\exp(\delta) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \delta\right) = \frac{3}{2} + \epsilon(\delta) \quad (2.15)$$

Ce dernier $\epsilon(\delta)$ est la somme des deux précédents.

Remarquons au passage qu'écrire $\delta + \epsilon(\delta)$ n'a pas grand sens : si $\epsilon(\delta)$ tend vers 0 en 0, alors $\delta + \epsilon(\delta)$ tend aussi vers 0 en 0, on peut absorber le δ dans le $\epsilon(\delta)$ et remplacer $\delta + \epsilon(\delta)$ par (un autre) $\epsilon(\delta)$.

2.2 Dérivabilité

2.2.1 Définition et notations

Si une fonction est continue en a , alors $f(a + \delta) \approx f(a)$ pour δ petit. Peut-on faire plus précis ? En général non, mais si la fonction est **dérivable en a** , alors il existe un nombre appelée dérivée de f en a et notée $f'(a)$ tel que

$$f(a + \delta) \approx f(a) + f'(a)\delta. \quad (2.16)$$

Prenons un exemple. On a $\exp(0) = 1$. Pour un argument proche de zéro, on trouve

$$\begin{array}{ll} \exp(0,001) = 1,00100050016671\dots & \exp(-0,001) = 0,999000499833375\dots \\ \exp(0,005) = 1,00501252085940\dots & \exp(-0,005) = 0,995012479192682\dots \\ \exp(0,01) = 1,01005016708417\dots & \exp(-0,01) = 0,990049833749168\dots \\ \exp(0,02) = 1,02020134002676\dots & \exp(-0,02) = 0,980198673306755\dots \end{array} \quad (2.17)$$

Manifestement,

$$\exp(\delta) = 1 + \delta + (\text{termes plus petits que } \delta) \quad \text{si } \delta \text{ est petit,} \quad (2.18)$$

ou, dit autrement,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\exp(\delta) - 1}{\delta} = 1. \quad (2.19)$$

Le membre de droite est $1 = \exp'(0)$, la dérivée de la fonction exponentielle en 0. On est conduit à la définition :

Définition. Une fonction f est dérivable en a si elle est définie autour de a et que $[f(a + \delta) - f(a)]/\delta$ a une limite quand δ tend vers 0. Cette limite s'appelle la dérivée de f au point a et se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta} \quad (2.20)$$

Une fonction est dérivable si elle est dérivable en chacun des points où elle est définie.

Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a . En effet, pour que la limite dans (2.20) existe alors que le dénominateur tend vers 0, il faut nécessairement que le numérateur tende aussi vers 0.

La réciproque n'est pas vraie. Par exemple, $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} et dérivable partout sauf en $x = 0$. De même, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue mais non dérivable en 0. On peut construire des fonctions continues partout mais dérivables nulle part².

Fonctions dérivées Si la fonction f est dérivable sur un intervalle I , c'est-à-dire si on peut calculer $f'(a)$ pour tous les a dans I , alors on peut définir naturellement la fonction dérivée, notée $f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ qui en tout point de I associe la dérivée de f en ce point.

Si la fonction f' est elle-même dérivable, on notera f'' sa dérivée, appelée dérivée seconde de f , et ainsi de suite. La dérivée n -ième de f est notée $f^{(n)}$.

Autres notations La limite dans (2.20) peut se réécrire avec la notation ϵ :

$$\frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta} = f'(a) + \epsilon(\delta) \quad \text{ou} \quad f(a + \delta) = f(a) + f'(a)\delta + \delta\epsilon(\delta) \quad (2.21)$$

La dernière écriture peut être vue comme une approximation de $f(a + \delta)$ pour δ petit valable quand la fonction est dérivable en a .

Remarquer que $\delta\epsilon(\delta)$ est une fonction de δ qui tend vers 0 quand δ tend vers 0, et qui le fait très rapidement puisque si on divise $\delta\epsilon(\delta)$ par δ , le résultat tend encore vers 0. Remarquer aussi que le fragment $f'(a)\delta + \delta\epsilon(\delta)$ tend vers 0 en 0; en perdant de l'information, on peut donc le remplacer si on veut par (un autre) $\epsilon(\delta)$, ce qui conduit à $f(a + \delta) = f(a) + \epsilon(\delta)$, c'est-à-dire à « f est continue en a ».

Pour une fonction f dont la variable s'appelle naturellement x (ou t , ou ...), les physiciens aiment bien noter la fonction dérivée f' sous la forme df/dx (ou df/dt , ou ...). Cette notation se comprend de la manière suivante : dx et df sont des **accroissements infiniment petits de x et de f** . Si on est en un point a quelconque, la fonction vaut $f(a)$. Si on se déplace de l'accroissement infiniment petit dx (qu'on appelait plus haut δ), la valeur de f augmente de l'accroissement infiniment petit $df = f(a + dx) - f(a) = f'(a)dx$ d'après (2.21), à un reste négligeable près. En « divisant » par dx , on a donc bien au point a

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a). \quad (2.22)$$

La notation d/dx sert également à **dériver une expression quelconque**, en l'interprétant comme une fonction de x ; par exemple, on écrira

$$\frac{d}{dx}[x^2 + 2xy + 1] = (\text{La dérivée de la fonction } x \mapsto x^2 + 2xy + 1 \text{ appliquée en } x) = 2x + 2y \quad (2.23)$$

Évidemment, on peut aussi dériver par rapport aux autres variables : $\frac{d}{dy}[x^2 + 2xy + 1] = 2x$.

2.2.2 Dérivée et accroissement

Dans l'approximation (2.16), on remplace $f(a + \delta)$ par $f(a) + f'(a)\delta$, qui est l'équation de la droite passant en $f(a)$ au point a (quand $\delta = 0$) et de coefficient directeur $f'(a)$. Cette droite est la **tangente** au graphe de f en a , et $f'(a)$ en est la pente. La figure 2.2 compare la fonction exponentielle avec sa tangente en 0.

Si $f'(a) > 0$, alors la tangente en a a une pente positive et la fonction est croissante sur un intervalle autour de a . Si $f'(a) < 0$ est négatif, la tangente en a a une pente négative et la fonction est décroissante autour de a .³

Des deux propriétés précédentes, on déduit que si f est dérivable en a et a un maximum (ou un minimum) local en a , alors $f'(a)$ vaut 0.

Dans l'autre sens, il faut faire plus attention. Une fonction telle que $f'(a) = 0$ en un certain point a n'est pas forcément extrême en ce point; par exemple, $x \mapsto x^3$ en 0.

Si une fonction f a une dérivée f' qui est nulle sur tout un intervalle, alors f est constante sur cet intervalle. Si deux fonctions ont des dérivées égales sur un intervalle, alors ces deux fonctions diffèrent d'une constante sur cet intervalle⁴.

²Weierstrass, 1872. En 1908, Poincaré nommait ces fonctions des « monstres ».

³Pour le démontrer, il suffit d'écrire que par définition de la limite, si $f'(a) > 0$ alors (2.20) implique qu'il existe un intervalle de δ tel que $[f(a + \delta) - f(a)]/\delta > 0$, c'est-à-dire que $f(a + \delta) > f(a)$ pour $\delta > 0$ et $f(a + \delta) < f(a)$ pour $\delta < 0$.

⁴On peut démontrer ces résultats (exercice) à partir du **théorème des accroissements finis**, qui dit que si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

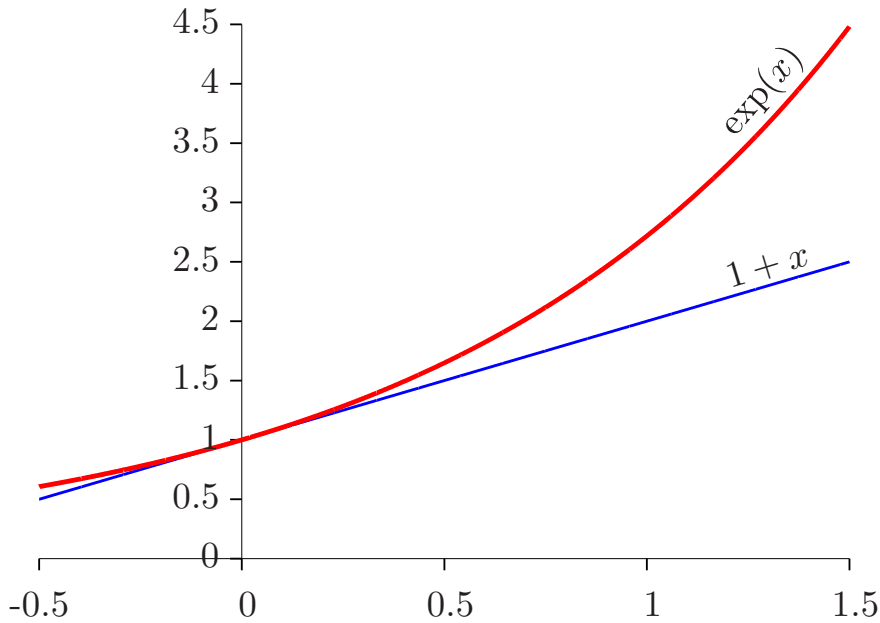


FIG. 2.2 – Graphes des fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto 1 + x$.

2.2.3 Règles de calcul

Pour avoir la forme usuelle, on calcule les dérivées en x plutôt qu'en a .

Les exemples les plus simples

Si $f(x) = Ax + B$: on trouve $f(x + \delta) = f(x) + A\delta$ et donc $f'(x) = A$.

Si $f(x) = x^2$: on trouve $f(x + \delta) = f(x) + 2x\delta + \delta^2$. Le « δ^2 » est bien un $\delta \epsilon(\delta)$, et donc $f'(x) = 2x$

Si $f(x) = \exp(x)$: on a déjà vu dans l'équation (2.19) que $\exp'(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\exp(\delta) - 1]/\delta = 1$. Calculons maintenant la dérivée en un point x quelconque :

$$\exp'(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\exp(x + \delta) - \exp(x)]/\delta = \exp(x) \times \lim_{\delta \rightarrow 0} [\exp(\delta) - 1]/\delta. \quad (2.24)$$

Mais la limite qui reste est justement $\exp'(0) = 1$. On obtient donc

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x)} \quad (2.25)$$

Le nombre $e = 2.7182818\dots$ qui forme la base népérienne est le seul pour lequel on a (2.25).

Règles de calcul Prenons deux fonctions f et g dérivables. On a

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x)\delta + \delta \epsilon(\delta), \quad g(x + \delta) = g(x) + g'(x)\delta + \delta \epsilon(\delta). \quad (2.26)$$

On en déduit immédiatement que

$$f(x + \delta) + g(x + \delta) = f(x) + g(x) + [f'(x) + g'(x)]\delta + \delta \epsilon(\delta). \quad (2.27)$$

et

$$f(x + \delta)g(x + \delta) = f(x)g(x) + [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\delta + \delta \epsilon(\delta). \quad (2.28)$$

et donc

$$\boxed{(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'} \quad (2.29)$$

En particulier, si g est une fonction constante égale à λ , alors $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Passons à la composition de fonction : quelle est la dérivée de $f \circ g(x) = f[g(x)]$? Écrivons :

$$f \circ g(x + \delta) = f[g(x) + \underbrace{g'(x)\delta + \delta \epsilon(\delta)}_{\eta}]. \quad (2.30)$$

Quand δ est petit, la quantité η définie par l'accolade est également petite, et donc

$$f \circ g(x + \delta) = f[g(x)] + f'[g(x)]\eta + \eta \tilde{\epsilon}(\eta) = f \circ g(x) + f' \circ g(x) \times g'(x)\delta + [f' \circ g(x) \delta \epsilon(\delta) + \eta \tilde{\epsilon}(\eta)]. \quad (2.31)$$

Comme elles s'appliquent à des arguments différents, on a préféré noter différemment les deux fonctions ϵ . Les termes entre crochets à la fin de l'équation précédente peuvent être remplacés par un $\delta\epsilon(\delta)$ parce que si on les divise par δ , on obtient quelque chose qui tend vers 0 quand $\delta \rightarrow 0$. (Exercice : le vérifier.) On en déduit

$$\boxed{(f \circ g)' = f' \circ g \times g'} \quad (2.32)$$

Avec des mots : quand on veut dériver f (« quelque chose »), on dérive f normalement et on applique le résultat à « quelque chose », puis on multiplie par la dérivée de « quelque chose ». Par exemple, dérivons $f[(ax+b)^2]$ par rapport à x pour une fonction f dérivable quelconque. D'après la règle qui précède, le résultat est $f'[(ax+b)^2]$ multiplié par la dérivée de $(ax+b)^2$. Mais $(ax+b)^2$ est la fonction « carré » appliquée à $ax+b$. Sa dérivée est donc $2 \times (ax+b)$ multiplié par la dérivée de $ax+b$ qui est a . Au final,

$$\frac{d}{dx} f[(ax+b)^2] = f'[(ax+b)^2] \times 2(ax+b) \times a. \quad (2.33)$$

Autre exemple : on sait que $\exp(\ln x) = x$ puisque \ln est la fonction réciproque de \exp . La dérivée de $x \mapsto \exp(\ln x)$ est donc égale à 1. Mais on peut aussi appliquer la formule (2.32) :

$$\frac{d}{dx} \exp(\ln x) = 1 = \exp'(\ln x) \times \ln'(x). \quad (2.34)$$

Mais $\exp' = \exp$ et donc $\exp'(\ln x) = x$. On en déduit que

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}} \quad (2.35)$$

Cette méthode permet de calculer toutes les dérivées de fonctions réciproques.

La dérivée d'une exponentielle de base b quelconque $x \mapsto b^x$ se fait en remarquant que $b^x = \exp(x \ln b)$. On trouve (le faire en exercice)

$$\frac{d}{dx} b^x = \ln b \times b^x. \quad (2.36)$$

On peut aussi écrire la dérivée de la fonction puissance

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d}{dx} \exp(\alpha \ln x) = \exp'(\alpha \ln x) \times \alpha \ln'(x). \quad (2.37)$$

Mais $\exp'(\alpha \ln x) = \exp(\alpha \ln x) = x^\alpha$ et $\ln'(x) = 1/x$. Donc

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}} \quad (2.38)$$

En particulier, prenant $\alpha = -1$,

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}. \quad (2.39)$$

En prenant $\alpha = 1/2$,

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (2.40)$$

Au passage, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 : la tangente est verticale et sa pente est infinie.

Terminons avec la dérivée d'un rapport. On a d'abord

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad (2.41)$$

(obtenu en utilisant (2.39) et (2.32)), puis, en écrivant f/g comme $f \times 1/g$ on trouve

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = f'g - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \quad (2.42)$$

Exercice : recalculer la dérivée de x^n sans passer par l'exponentielle pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Chapitre 3

Formules de Taylor, développements limités, séries entières

3.1 Introduction

Considérons une fonction f continue en zéro. Pour x petit on a une approximation de f qui est

$$f(x) = f(0) + \epsilon(x). \tag{3.1}$$

On a approché f par une fonction constante. Si la fonction est dérivable en zéro, on peut faire mieux :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x \epsilon(x). \tag{3.2}$$

On a approché f par une fonction affine, c'est-à-dire une droite, celle qui suit le mieux la fonction.

On conçoit facilement que l'on peut faire une approximation encore meilleure sous la forme d'un polynôme du deuxième degré (une parabole), du troisième degré, etc. La figure 3.1 illustre cette remarque en représentant les meilleures approximations polynomiales de faible degré de la fonction exponentielle autour de zéro.

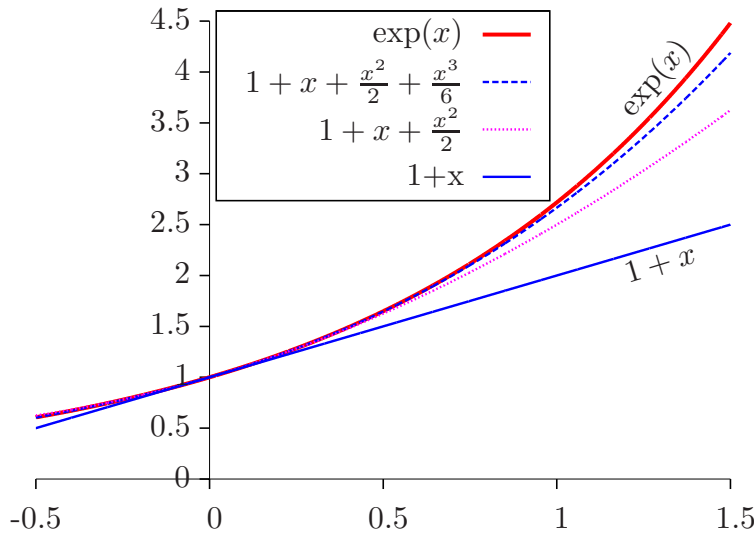


FIG. 3.1 – Approximations successives de la fonction exponentielle autour de 0.

Les formules de Taylor donnent ces approximations.

3.2 Développements de Taylor

La formule la plus simple est la formule de Taylor-Young

Théorème (Taylor-Young). *On considère une fonction f qui est dérivable k fois au point a . Alors*

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{x^3}{6} + \dots + f^{(k)}(a)\frac{x^k}{k!} + x^k \epsilon(x) \tag{3.3}$$

Le polynôme $f(a) + \dots + (x^k/k!)f^{(k)}(a)$ s'appelle le polynôme de Taylor de degré k de f au point a . C'est la meilleure approximation polynomiale de f autour de a . Le terme $x^k\epsilon(x)$ est le reste. C'est une fonction qui tend très vite vers zéro en zéro, puisque même si on la divise par x^k , elle tend encore vers zéro.

Même si le reste tend « vite » vers zéro, on ne sait pas à quelle vitesse. Il existe pour cela d'autres formules comme par exemple :

Théorème (Taylor-Lagrange). *On considère une fonction f différentiable $k+1$ fois sur l'intervalle $[a, a+x]$. Alors il existe un θ compris entre 0 et x et qui dépend de a et x tel que*

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{x^3}{6} + \dots + f^{(k)}(a)\frac{x^k}{k!} + f^{(k+1)}(a+\theta)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (3.4)$$

Ainsi, si on arrive à **majorer** $f^{(k+1)}$, on peut donner des informations précises sur comment le reste tend vers zéro.

Voici l'esquisse d'une démonstration du théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre $k=2$. Soit f une fonction trois fois dérivable. On définit la fonction $\theta \mapsto \phi(\theta)$ par

$$\phi(\theta) = f(a+\theta) + f'(a+\theta)(x-\theta) + f''(a+\theta)\frac{(x-\theta)^2}{2} + \lambda\frac{(x-\theta)^3}{6}, \quad (3.5)$$

où λ est choisi tel que $\phi(x) = \phi(0)$, c'est-à-dire tel que

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2} + \lambda\frac{x^3}{6}. \quad (3.6)$$

La fonction ϕ est dérivable et a une dérivée particulièrement simple (tout se simplifie!) :

$$\phi'(\theta) = [f^{(3)}(a+\theta) - \lambda]\frac{(x-\theta)^2}{2}. \quad (3.7)$$

Mais comme $\phi(0) = \phi(x)$, il doit y avoir un nombre θ strictement compris entre 0 et x pour lequel ϕ est maximale ou minimale (faire un dessin). Comme ϕ est dérivable, on doit avoir en ce point extrémal $\phi'(\theta) = 0$. L'équation (3.7) donne alors $\lambda = f^{(3)}(a+\theta)$ et on obtient la formule de Taylor-Lagrange en reportant dans (3.6).

Si on suppose de plus que $f^{(3)}$ est continue en a , on peut écrire $f^{(3)}(a+\theta) = f^{(3)}(a) + \epsilon(\theta) = f^{(3)}(a) + \epsilon(x)$ (puisque θ tend vers 0 quand x tend vers 0) et on retrouve la formule de Taylor-Young¹ à l'ordre $k=3$.

Il est grand temps de prendre un exemple. On sait que $\exp' = \exp = \exp^{(k)}$ et donc, pour tout k ,

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!} + x^k \epsilon(x) \quad (3.8)$$

Prenons $x = 0,01$. Les quatre premiers termes (jusqu'à $k=3$) sont $1, 0,01, 0,00005, 0,000000166666\dots$ ce qui donne en les additionnant

$$\exp(0,01) \approx 1,01005016\dots \quad (3.9)$$

ce qui est une très bonne approximation.

Application : on considère une fonction deux fois dérivable telle que $f'(a) = 0$ en un point a donné. Le point a est-il un maximum local, un minimum local ou autre chose? On écrit le développement de Taylor-Young à l'ordre 2

$$f(a+x) = f(a) + f''(a)\frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x). \quad (3.10)$$

Supposons $f''(a) > 0$. Pour $|x|$ suffisamment petit, le terme $\epsilon(x)$ (qui tend vers 0) est forcément tel que $f''(a)/2 + \epsilon(x) > 0$ et on trouve que $f(a+x) > f(a)$, c'est-à-dire que le point a est un minimum local. De même, si $f''(a) < 0$, le point a est un maximum local. Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire à cet ordre et il faut travailler un peu plus si on veut connaître le comportement autour de a .

3.3 Notation de Landau

Dans le développement de Taylor-Young, rappelons que le terme $x^k\epsilon(x)$ signifie « une fonction de x telle que si on la divise par x^k , le résultat tend vers zéro lorsque x tend vers zéro ». La **notation de Landau** est une autre manière d'écrire la même chose :

$$x^k\epsilon(x) = o(x^k) \quad (\text{notation de Landau}) \quad (3.11)$$

¹La difficulté est de démontrer Taylor-Young sans supposer que $f^{(k)}$ est continue.

On prononce $o(x^k)$ « petit o de x^k » et on comprend qu'il s'agit d'une quantité négligeable devant x^k . Par exemple, on peut écrire

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad (3.12)$$

puisque le reste du développement de l'exponentielle est négligeable devant x^2 .

Attention : $o(1)$ est la même chose que $\epsilon(x)$, c'est-à-dire une fonction de x qui tend vers zéro.

On rencontre aussi la notation $\mathcal{O}(x^k)$ (prononcée « grand O de x^k ») qui représente une fonction quelconque de x telle que, si on la divise par x^k , le résultat reste borné quand x tend vers zéro. De manière informelle, un $\mathcal{O}(x^k)$ est une quantité d'ordre x^k . Par exemple on peut écrire

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (3.13)$$

puisque le reste du développement de l'exponentielle est d'ordre x^3 .

Un $\mathcal{O}(x^3)$ est forcément un $o(x^2)$. La réciproque n'est pas vraie (par exemple : $x^{2,5}$.)

3.4 Séries entières

Posons $P_k(x)$ l'approximation de $\exp(x)$ donnée par la formule de Taylor à l'ordre k :

$$P_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!}. \quad (3.14)$$

On peut démontrer que quel que soit x , on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = \exp(x). \quad (3.15)$$

Écrit plus simplement

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (3.16)$$

On a écrit l'exponentielle sous la forme d'une **série entière**. On appelle série entière de variable x une somme infinie de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots \quad (3.17)$$

où les a_k sont des réels donnés.

On démontre que pour toute série entière, il existe un réel R nommé « rayon de convergence » tel que

- la série converge si $|x| < R$
- la série diverge si $|x| > R$

(le théorème ne dit rien pour $|x| = R$.) Quand le rayon de convergence est nul, c'est que la série diverge pour tout x non nul. Certaines séries entières (comme celle associée à l'exponentielle) ont un rayon de convergence infini.

Quand le rayon de convergence est non-nul, la série définit une fonction de x . Quand une fonction peut être écrite sous la forme d'une série entière, on dit qu'elle est **analytique**. On peut montrer que cela implique qu'elle infiniment dérivable.

Réciproquement, pour une fonction f quelconque infiniment dérivable en 0, on peut écrire la série entière associée, dite **série de Taylor** :

$$f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (3.18)$$

Si cette série a un rayon de convergence non-nul, la somme (3.18) définit une fonction analytique, **mais cette fonction n'est égale à f que si f est analytique**. Si f n'est pas analytique, elle n'est pas égale à la somme de sa série de Taylor. Par exemple, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

est continue, infiniment dérivable et a toutes ses dérivées nulles en 0 (exercice). Sa série entière est donc la série nulle, dont la somme est la fonction nulle, qui est différente de (3.19). Une fonction infiniment dérivable n'est pas forcément analytique !

On démontre que les fonctions analytiques sont les mêmes que les fonctions d'une variable complexes qui sont dérivables au sens des complexes (fonctions holomorphes). La condition de convergence $|x| < R$ fonctionne alors dans tout le plan complexe².

²La fonction de (3.19) se comporte très mal dans le plan complexe dès qu'on sort de l'axe des réels. Par exemple, en $i\delta$ avec δ petit cette fonction est très grande, ce qui signifie que vue comme une fonction complexe, elle n'est même pas continue en 0.

La série entière d'une fonction analytique est unique. Les séries entières s'ajoutent, se multiplient, se composent, se dérivent et s'intègrent de la manière naturelle (voir la section suivante pour des exemples de calcul), et les opérations sur les séries sont compatibles avec les opérations sur les fonctions : la série entière d'une somme de fonctions analytiques est égale à la somme des séries entières, la série entière de la dérivée est égale à la dérivée de la série entière, etc. Pour prendre un exemple, on voit facilement en dérivant la série entière de $\exp(x)$ que $\exp' = \exp$.

Remarque : pour une fonction f qui n'est pas analytique, la dérivée du développement limité de f n'est pas forcément égale au développement limité de f' . Toutes les autres opérations fonctionnent, cependant.

3.5 Exemples

Les fonctions usuelles (puissances, exp, ln, sin, cos, etc.) sont analytiques. Écrivons les séries entières de plusieurs d'entre elles.

Fonction inverse On considère la fonction $f : x \mapsto 1/(1+x)$. (Évidemment, $x \mapsto 1/x$ n'a pas de série entière en 0 puisqu'elle n'y est même pas définie.) On trouve les premières dérivées et la formule générale :

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{+2}{(1+x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}. \quad (3.20)$$

On a donc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k k!. \quad (3.21)$$

Dans les formules de Taylor, les factorielles se simplifient et on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \dots + (-1)^k x^k + x^k \epsilon(x). \quad (3.22)$$

On veut maintenant vérifier que la fonction est analytique, c'est-à-dire qu'elle est égale à sa **série de Taylor**. Ici, c'est facile, puisqu'on peut resommer les **polynômes de Taylor** pour $x \neq -1$:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \dots + (-1)^k x^k = \frac{1 - (-x)^{k+1}}{1+x}. \quad (3.23)$$

(Pour le voir, il faut multiplier le tout par $1+x$.) Le membre de droite est presque $f(x)$. On voit donc que la différence entre $f(x)$ et son polynôme de Taylor à l'ordre k est égale à $(-x)^{k+1}/(1+x)$. Cette quantité tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$ pour tout x de norme strictement inférieure à 1. On a donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \quad \text{si } |x| < 1. \quad (3.24)$$

Le **rayon de convergence de cette série** est donc $R = 1$.

Logarithme En intégrant l'expression précédente, on trouve

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k}(-x)^k \quad \text{si } |x| < 1. \quad (3.25)$$

Comme exercice, calculons $\ln \exp(x)$ pour x petit avec les séries. D'après (3.16), on a $\exp(x) = 1 +$ (quelque chose de petit), ce qui tombe bien puisque c'est ce que permet de calculer (3.25). En appliquant cette formule à « (quelque chose de petit) », on trouve

$$\ln \exp(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right)^3 + \dots \quad (3.26)$$

Une somme infinie dont chaque terme (les parenthèses) est la puissance d'une somme infinie! Comment faire? Le but est d'écrire une série pour x petit, on va juste écrire les premiers termes jusqu'à l'ordre x^3 . Regardons les équivalents de chacune des trois parenthèses qui apparaissent dans (3.26) : au voisinage de 0, la première est comme x , la deuxième comme $-x^2/2$, la troisième comme $x^3/3$. Toutes les parenthèses suivantes (non écrites) seront comme x^4 ou plus petites, elles ne nous intéressent donc pas. Dans les trois parenthèses écrites (celles qui nous intéressent), cherchons tous les termes d'ordre x . Il n'y en a qu'un, c'est le x de la première parenthèse. Cherchons tous les termes d'ordre x^2 : il y en a un dans la première parenthèse ($x^2/2$) et un dans la deuxième qui vient en élevant x au carré. Ces deux termes se compensent. Cherchons tous les termes d'ordre x^3 . Il y a le $x^3/6$ de la première parenthèse, le $(1/3)x^3$ de la troisième parenthèse et, dans

la deuxième parenthèse, il y en a un qui vient du double produit entre x et $x^2/2$ quand on élève au carré : $-1/2 \times 2 \times x \times (x^2/2) = -x^3/2$. Ces trois termes se simplifient et il reste

$$\ln \exp(x) = x + 0x^2 + 0x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (3.27)$$

On a donc montré que jusqu'à l'ordre 3, $\ln \exp(x) = x$. Le terme $\mathcal{O}(x^4)$ est là pour rappeler qu'on n'a pas vérifié le terme d'ordre 4. On aurait pu aussi écrire $o(x^3)$ ou $x^3\epsilon(x)$. Bien sûr, ce terme est également nul (exercice), ainsi que tous les suivants.

Formule du binôme On sait que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. De manière plus générale, la formule du binôme donne

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (3.28)$$

Rappel : le nombre $\binom{n}{k}$ s'appelle un coefficient binomial. Il se prononce « k parmi n » et correspond au nombre de manières de choisir sans les distinguer k objets parmi n . Les coefficients binomiaux se calculent avec la formule

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!} \quad (3.29)$$

ou en dessinant un triangle de Pascal. (Il y a aussi une expression avec trois factorielles, mais elle est moins utile.)

On en déduit, en prenant $b = 1$ et $a = x$,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots \quad (3.30)$$

On vérifie facilement (exercice) que cette écriture correspond au développement de Taylor de la fonction $x \mapsto (1+x)^n$. Comme la fonction est un polynôme de degré n , la somme ne va pas jusqu'à l'infini mais s'arrête au terme x^n de coefficient 1.

Formule du binôme généralisé La formule précédente a été obtenue pour n entier positif, mais elle est également valable pour un exposant α réel ou complexe quelconque :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots \quad (3.31)$$

On admet que le rayon de convergence est 1. Ainsi, par exemple, si on prend $\alpha = -1$, on retrouve bien la série de $1/(1+x)$. Remarquer que si $(1+x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ est bien un polynôme et a une série avec un nombre fini de terme, ce n'est pas le cas pour un α qui n'est pas un entier.

Si on prend $\alpha = 1/2$, on trouve

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \quad (3.32)$$

Pour se convaincre que l'expression donnée est bien la bonne, élevons la au carré.

$$(\sqrt{1+x})^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots\right) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots\right)^2. \quad (3.33)$$

La méthode de calcul est similaire à celle employée pour calculer $\ln \exp(x)$. Ici, allons jusqu'à l'ordre 4. Dans le membre de droite (3.33), il y a le terme constant 1. Le terme d'ordre x vient de la première parenthèse et vaut x . Il y a deux termes d'ordre x^2 , le $2 \times -\frac{1}{8}x^2$ de la première parenthèse, et le $(\frac{1}{2}x)^2$ de la deuxième. Ces deux termes se compensent. À l'ordre x^3 , il y a $2 \times \frac{1}{16}x^3$ dans la première parenthèse et le double produit $2 \times \frac{1}{2}x \times -\frac{1}{8}x^2$ dans la deuxième. Ces deux termes se compensent. À l'ordre x^4 , il y a $2 \times -\frac{5}{128}x^4$ dans la première parenthèse et **deux** termes dans la deuxième : un qui vient de $(-\frac{1}{8}x^2)^2$, et le double produit $2 \times \frac{1}{2}x \times \frac{1}{16}x^3$. Ces trois termes se compensent. On a donc vérifié que

$$(\sqrt{1+x})^2 = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \mathcal{O}(x^5), \quad (3.34)$$

comme attendu.

Trigonométrie Les cosinus et sinus sont particulièrement simples puisque $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. On trouve facilement (exercice)

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pour s'en souvenir, c'est comme la série de l'exponentielle, sauf que cosinus n'a que les termes de puissance paire et sinus que les termes de puissance impaire, et qu'il y a un signe moins un terme sur deux. On vérifie aisément les relations d'Euler en comparant les séries

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \operatorname{Re}[\exp(ix)] = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \operatorname{Im}[\exp(ix)] = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (3.36)$$

Exemples finaux Il faut utiliser le moins possible les formules de Taylor ; elles sont trop compliquées. Il est bien plus efficace d'apprendre les développements des fonctions usuelles et de les combiner. Par exemple, calculons le développement de la fonction $x \mapsto \exp(3x) + \sqrt{2+x}$ pour x petit. La première partie est facile : en remplaçant x par $3x$ dans (3.16), on a

$$\exp(3x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + x^3\epsilon(x) \quad (3.37)$$

Pour la deuxième partie, il faut faire attention : on pourrait être tenté d'écrire $2+x = 1+(1+x)$ et de remplacer x par $1+x$ dans (3.32), mais ce serait faux ! En effet, si x est petit, alors $1+x$ ne l'est pas alors que la série (3.32) ne fonctionne que sur des arguments petits. La bonne méthode consiste à écrire $\sqrt{2+x} = \sqrt{2(1+x/2)} = \sqrt{2}\sqrt{1+x/2}$ et donc en utilisant (3.32) avec $x/2$ comme argument,

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 + x^3\epsilon(x)\right]. \quad (3.38)$$

Pour avoir le développement de $\exp(3x) + \sqrt{2+x}$, il ne reste plus qu'à additionner terme à terme (3.37) et (3.38).

Pour faire un produit de développements, il ne faut pas tout développer et regrouper, mais écrire directement le résultat en cherchant dans l'ordre tous les termes qui apparaissent à une puissance donnée. Il faut de plus penser à s'arrêter au dernier terme que l'on peut calculer. Par exemple

$$\exp(3x)\sqrt{2+x} = \sqrt{2}\left[1 + \left(3 + \frac{1}{4}\right)x + \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{32}\right)x^2 + \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{8} - \frac{3}{32} + \frac{1}{128}\right)x^3 + x^3\epsilon(x) + \dots\right]. \quad (3.39)$$

Dans le développement (3.31) de $(1+x)^\alpha$, l'exposant α est supposé constant. Si α varie avec x (en particulier s'il diverge quand x tend vers zéro), on ne peut pas appliquer cette formule, et il faut passer par l'exponentielle. Par exemple

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \exp\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2\epsilon(x)\right] = e \times \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + x^2\epsilon(x)\right]. \quad (3.40)$$

Exercice : retrouver cette dernière expression. Calculer sans calculatrice combien rapporte 2% d'intérêt sur 100 ans.

3.6 Développements asymptotiques

Peut-on écrire un développement pour la fonction $\exp(\sqrt{x})$ au voisinage de 0 ? Cette fonction est définie pour $x \geq 0$, continue, mais n'est pas dérivable en 0, donc on ne peut pas faire de développement limité. Pourtant, formellement, en remplaçant x par \sqrt{x} dans (3.16) on est tenté d'écrire

$$\exp(\sqrt{x}) = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x^2}{24} + \dots \quad \text{au voisinage de zéro.} \quad (3.41)$$

Le membre de droite dans l'expression précédente n'est pas un développement limité parce qu'un développement limité s'écrit avec des puissances **entières** de x et ne concerne que les fonctions dérivables plusieurs fois. Il s'agit de ce qu'on appelle un **développement asymptotique de la fonction** $\exp(\sqrt{x})$ **au voisinage de zéro**. Les développements asymptotiques sont des généralisations des développements limités.

Un développement asymptotique est une somme où **chaque terme est plus petit que le précédent**. Dans ce contexte, on dit qu'une fonction f est plus petite qu'une fonction g (ou que f est négligeable devant g) au voisinage de zéro si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (3.42)$$

Avec cette définition, $10^{100}x^2$ est négligeable devant x . On vérifie facilement que chaque terme de (3.41) est bien négligeable devant les précédents. Sous-entendu, les points de suspension représentent un reste qui est négligeable devant le dernier terme écrit³.

Par définition, on écrit qu'une fonction est égale à un développement asymptotique, comme dans (3.41), si **chaque terme est un équivalent de la fonction moins tous les termes précédents** : dans le cas de présent, on a

$$\exp(\sqrt{x}) \sim 1, \quad \exp(\sqrt{x}) - 1 \sim \sqrt{x}, \quad \exp(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x} \sim \frac{x}{2}, \quad \exp(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x} - \frac{x}{2} \sim \frac{x^{3/2}}{6}, \quad \text{etc.} \quad (3.43)$$

N'importe quels termes peuvent apparaître dans un développement asymptotique à conditions qu'ils soient écrits dans l'ordre, du plus grand au plus petit. Dans beaucoup de cas simples, on peut les déterminer en appliquant les développements limités des séries usuelles. Par exemple

$$x^x = e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2} + \frac{(x \ln x)^3}{6} + \dots \quad \text{au voisinage de zéro.} \quad (3.44)$$

Parfois, il faut réfléchir un peu avant d'écrire les termes dans le bon ordre :

$$x^x + \exp(\sqrt{x}) = 1 + \sqrt{x} + x \ln x + \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{(x \ln x)^2}{2} + \frac{x^2}{24} + \dots \quad \text{au voisinage de zéro.} \quad (3.45)$$

Prenons un autre exemple et calculons un développement asymptotique de $\sqrt{x + 4x^2}$ au voisinage de zéro. Clairement, au premier ordre, le $4x^2$ est négligeable et cette fonction est équivalente à \sqrt{x} , qui est donc le premier terme du développement. Pour avoir les termes suivants, on met ce terme en facteur et on reconnaît le développement usuel (3.32) :

$$\sqrt{x + 4x^2} = \sqrt{x} \sqrt{1 + 4x} = \sqrt{x} \left[1 + \frac{1}{2}(4x) - \frac{1}{8}(4x)^2 + \dots \right] = \sqrt{x} + 2x^{3/2} - 2x^{5/2} + \dots \quad \text{au voisinage de zéro.}$$

On a jusqu'ici écrit des développements asymptotiques au voisinage de zéro. On peut bien sûr se placer au voisinage de n'importe quel point fini, mais aussi au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$). Les règles sont les mêmes : pour un développement asymptotique au voisinage de l'infini, on écrit d'abord un équivalent de la fonction au voisinage de l'infini, puis un équivalent de la fonction moins le premier terme, etc., de manière à ce que tous les termes soient écrits du plus grand vers le plus petit. Attention : au voisinage de zéro x est plus grand que x^2 , mais c'est le contraire au voisinage de l'infini.

Écrivons, pour prendre un exemple, un développement asymptotique de $\sqrt{x + 4x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Le x est négligeable devant $4x^2$ et la fonction choisie se comporte donc comme $\sqrt{4x^2} = 2x$. En mettant ce terme en facteur, on reconnaît encore le développement usuel (3.32) appliqué au terme petit $1/(4x)$:

$$\sqrt{x + 4x^2} = 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = 2x \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \frac{1}{(4x)^2} + \dots \right] = 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{64x} + \dots \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 4x^2} - 2x = \frac{1}{4}. \quad (3.46)$$

³En toute rigueur, plutôt que des points de suspension, on aurait dû écrire $x^2\epsilon(x)$ ou $o(x^2)$ ou $\mathcal{O}(x^{5/2})$.

Chapitre 4

Intégration, primitives

4.1 Définition

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que f est suffisamment **régulière** (continue par morceaux, par exemple) et est **bornée**. On définit l'**intégrale de f sur $[a, b]$** de la manière suivante :

- On découpe l'intervalle $[a, b]$ en pleins de tous petits intervalles,
- On fait la somme sur tous les intervalles de (la valeur de f au milieu de chaque intervalle) multipliée par (la taille de l'intervalle),
- On fait tendre la taille des intervalles vers zéro. La somme obtenue tend vers une limite, qui est l'intégrale de f entre a et b .

En formule :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\text{la taille des} \\ \text{intervalles} \\ \text{tend vers zéro}}} \sum_{\text{tous les} \\ \text{intervalles}} f(\text{au milieu de l'intervalle}) \times (\text{la taille de l'intervalle}). \quad (4.1)$$

La figure 4.1 donne une illustration de cette définition : on a pris des intervalles d'une taille δ constante. Le produit $f(\text{au milieu de l'intervalle}) \times \delta$ est représenté par l'aire du rectangle de base δ et de hauteur la valeur de f . La somme dans (4.1) est alors donnée par l'aire hachurée totale.

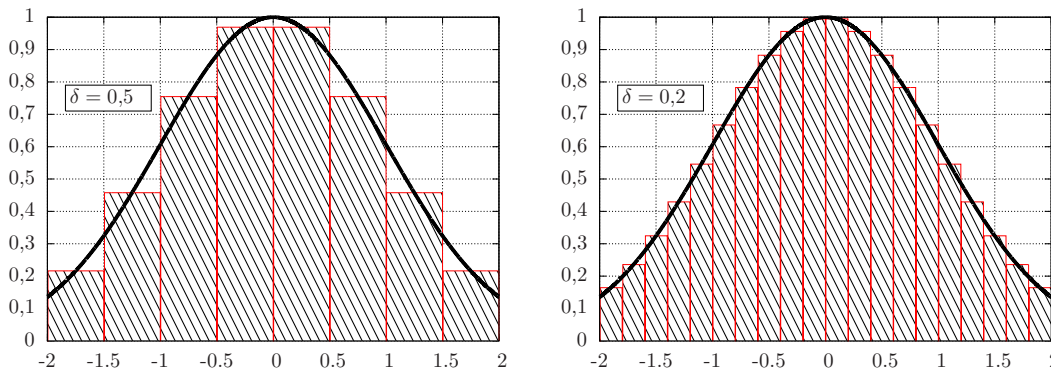


FIG. 4.1 – La somme (4.1) pour la fonction $x \mapsto \exp(-x^2/2)$ avec des intervalles de longueur $\delta = 0,5$ (gauche) et $\delta = 0,2$ (droite) qui découpent le domaine d'intégration $[-2, 2]$.

Quand la taille des intervalles tend vers zéro, le nombre de termes dans la somme augmente, et la zone hachurée tend vers la surface délimitée par $a = -2$ à gauche, $b = 2$ à droite, l'axe des abscisses en bas et le graphe de la courbe en haut, voir figure 4.2.

Pour une fonction **positive** (et bornée, et régulière), une autre manière de définir l'intégrale est donc

$$\int_a^b f(x) dx = (\text{aire de la surface sous la courbe entre } a \text{ et } b), \quad (4.2)$$

mais la première définition (4.1) est importante à comprendre car elle permet de généraliser l'intégration à des situations plus complexes (intégrales de surface, de volume, ...). La manière dont l'intégrale est notée rappelle d'ailleurs cette définition : La quantité x va de a à b , et chaque $f(x)$ est multiplié par dx , un accroissement infiniment petit de x qui représente la taille (infiniment petite) des intervalles notés δ dans la figure 4.1 ; $f(x) dx$ est donc la surface d'un des rectangles. Tous ces termes sont alors sommés, ce qui se note en écrivant un S romain un peu déformé (\int) plutôt qu'un S grec (Σ).

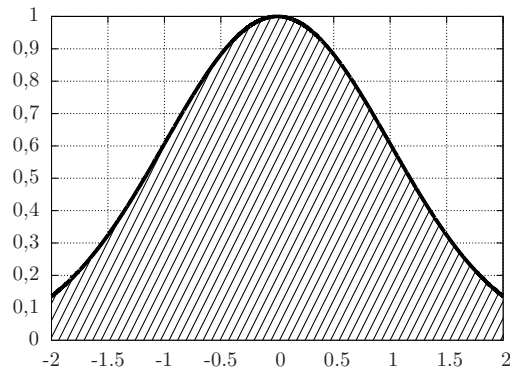


FIG. 4.2 – L'aire sous la courbe de $x \mapsto \exp(-x^2/2)$ entre -2 et 2 .

Remarque 1 : dans la définition (4.1) ou (4.2) de l'intégrale, x est une **variable muette** : la valeur de l'intégrale dépend de a , de b , de la fonction f mais pas de x . On aurait pu mettre y à la place (ou n'importe quelle autre variable) sans changer le résultat.

Remarque 2 : La définition (4.1) fonctionne pour toutes les fonctions, mais (4.2) ne fonctionne que pour les fonctions positives. Il est facile de voir que pour une fonction négative ou une fonction qui change de signe, il faut adapter en

$$\int_a^b f(x) dx = +(\text{aire des régions où } f > 0) - (\text{aire des régions où } f < 0), \quad (4.3)$$

comme dans la figure 4.3.

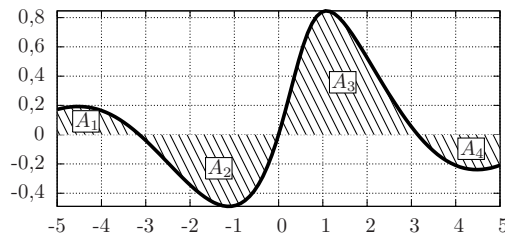


FIG. 4.3 – Pour intégrer une fonction qui change de signe, on compte l'aire positivement dans les régions où $f > 0$ et négativement dans les régions où $f < 0$. Ici, $\int_{-5}^5 f(x) dx = +A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

Remarque 3 : la fonction f que l'on intègre a besoin d'être « suffisamment » régulière, mais elle n'a pas besoin d'être continue. Par exemple, si on a deux fonctions f et g qui diffèrent sur un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ parce que les points de différence entre f et g n'auront aucun effet sur l'aire sous la courbe.

4.2 Premiers exemples et propriétés élémentaires

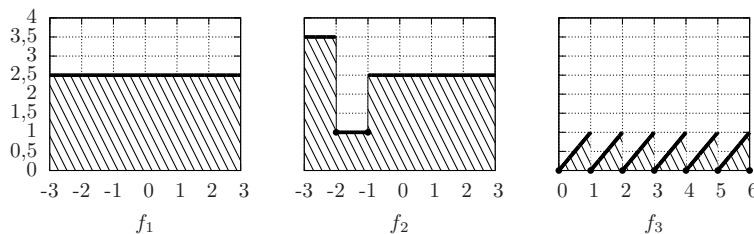


FIG. 4.4 – Premiers exemples

La figure 4.4 montre les graphes de trois fonctions faciles à intégrer.

- La fonction f_1 est **constante** égale à $2,5$. L'aire sous la courbe est l'aire du rectangle et on trouve donc $\int_a^b f_1(x) dx = 2,5 \times (b - a)$.
- La fonction f_2 est **constante par morceaux**. L'aire sous la courbe est la somme des aires de plusieurs rectangles. Par exemple, on lit sur la figure que $\int_{-3}^3 f_2(x) dx = 3,5 \times 1 + 1 \times 1 + 2,5 \times 4 = 14,5$. Remarquez sur le graphe qu'on a arbitrairement choisi $f_2(-1) = 1$. Si on avait pris $f_2(-1) = 2,5$ ou, en fait, n'importe quelle autre valeur, le calcul de l'intégrale n'aurait pas été modifié.

- La fonction f_3 est le **partie fractionnaire**, c'est-à-dire la fonction qui calcule les chiffres après la virgule : $f_3(5,42) = 0,42$. Alors $\int_0^4 f_3(x) dx = 4 \times \frac{1}{2} = 2$, puisqu'il y a quatre triangles ayant chacun une aire $\frac{1}{2}$. Plus compliqué, $\int_0^{4,4} f_3(x) dx = 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0,4)^2$ puisqu'il y a quatre triangles entiers plus un petit triangle rectangle de base 0,4. De manière générale, $\int_0^b f_3(x) dx = \frac{1}{2}(\text{partie entière de } b) + \frac{1}{2}(\text{partie fractionnaire de } b)^2$.

On a les propriétés

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad (\text{par homothétie de l'aire}) \quad (4.4)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{penser au découpage en rectangles}) \quad (4.5)$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (\text{pour } a < b < c; \text{ relation de Chasles}) \quad (4.6)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{l'aire est nulle!}) \quad (4.7)$$

Grâce à la relation de Chasles (4.6), on **étend la définition de l'intégrale** au cas où la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure en écrivant

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (4.8)$$

4.3 Relation entre intégrale et primitive

Prenons une fonction f intégrable sur $[a, b]$ et, pour $x \in [a, b]$ posons

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy. \quad (4.9)$$

on a changé le nom de la variable (muette) d'intégration pour éviter une confusion avec la borne. Ce n'est pas toujours fait et on peut voir des $\int_a^x f(x) dx$ qui pourraient prêter à confusion ; il faut s'y habituer !

Que vaut $F(x + \delta)$? C'est l'aire $F(x)$ plus le petit bout entre x et $x + \delta$ (Chasles). Clairement

$$F(x + \delta) = F(x) + \epsilon(\delta), \quad (4.10)$$

c'est-à-dire que F est **continue**.

En regardant un peu plus en détail, on voit que **si f est continue** alors l'aire du petit bout entre x et $x + \delta$ est approximativement égale à $\delta f(x)$ avec une correction dont on montre qu'elle est un $\delta \epsilon(\delta)$. On en déduit donc que **si f est continue en x , alors F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$** . On dit que F est **une primitive de f** .

Remarque : si f est continue par morceaux, alors F est dérivable par morceaux et dans chacun des morceaux on a encore $F'(x) = f(x)$.

La relation de Chasles donne alors, pour tout A et B dans l'intervalle $[a, b]$,

$$\int_A^B f(x) dx = F(B) - F(A). \quad (4.11)$$

La relation précédente a été obtenue pour la primitive de f que l'on a défini par (4.9), mais elle est vraie pour n'importe quelle primitive de f parce que deux primitives de f ne peuvent différer que d'une constante. Connaître une primitive de f permet donc de calculer une intégrale de f entre deux points A et B

4.4 Calculs de primitives

Utilisons la notation

$$\int f(x) dx \quad (4.12)$$

(sans bornes d'intégration) pour désigner **une** primitive de f . Cette notation est ambiguë puisqu'on sait que f a plusieurs primitives, mais tant pis.

4.4.1 Propriétés élémentaires

Les propriétés des primitives et les primitives usuelles se déduisent des propriétés des dérivées. Par exemple

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx. & \int \lambda f(x) dx &= \lambda \int f(x) dx \\ \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ pour } \alpha \neq -1, & \int x^{-1} dx &= \ln|x| \text{ attention à la valeur absolue,} \\ \int \exp(x) dx &= \exp(x), & \int \sin(x) dx &= -\cos x, & \int \cos(x) dx &= \sin x. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.4.2 Intégration par partie

Il n'y a pas de formule pour la primitive d'un produit mais, puisque $(fg)' = f'g + fg'$, on peut écrire

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx. \quad (4.14)$$

C'est l'intégration par partie.

Un exemple :

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - \int 2 \cos(x) dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x). \quad (4.15)$$

On a fait deux intégrations par parties successives, en intégrant à chaque fois la fonction trigonométrique et en dérivant le préfacteur polynomial.

4.4.3 Changement de variable

À partir de l'expression de la dérivée d'une fonction composée on trouve

$$\text{Si } F(x) = \int f(x) dx \text{ (i.e. si } F \text{ est une primitive de } f), \text{ alors } \int \phi'(x)f(\phi(x)) dx = F \circ \phi(x). \quad (4.16)$$

Cette formule permet de calculer de nombreuses primitives. Par exemple

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) \quad (4.17)$$

parce que $2x$ est la dérivée de x^2 . Le plus simple est souvent de faire le changement de variable explicite et de poser $\phi(x) = x^2$. Alors $\phi'(x) = 2x$ et, dans (4.17),

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \phi'(x) \cos[\phi(x)] dx. \quad (4.18)$$

On reconnaît alors la formule générale (4.16). On va même un cran plus loin en écrivant que, si $\phi = x^2$, alors $d\phi = \phi'(x)dx = 2x dx$ (c'est la notation « physicienne de la dérivée »), puis

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos(\phi) d\phi \quad (4.19)$$

ϕ est maintenant une variable d'intégration, et on cherche la primitive d'une fonction de ϕ . Cette primitive est bien sûr $\frac{1}{2} \sin(\phi)$, et il ne reste plus qu'à remplacer ϕ par sa valeur, à savoir x^2 .

Autre exemple :

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2\phi d\phi}{\phi^2 + \phi} = \int \frac{2 d\phi}{\phi + 1} = 2 \ln(\phi + 1) = 2 \ln(\sqrt{x} + 1) \quad \text{avec } \phi = \sqrt{x}. \quad (4.20)$$

En effet, si $\phi = \sqrt{x}$ alors $x = \phi^2$ et $dx = 2\phi d\phi$. On peut ainsi faire un changement de variable quand la nouvelle variable simplifie l'expression sans que le terme qui vient de la transformation du dx ne complique tout. Ainsi, par exemple, le changement de variable $\phi = x^2$ rend $x \cos(x^2)$ très facile à intégrer mais ne simplifie absolument pas l'intégration de $\cos(x^2)$:

$$\int \cos(x^2) dx = \int \frac{\cos(\phi)}{2\sqrt{\phi}} d\phi, \quad (4.21)$$

parce que si $\phi = x^2$ alors $x = \sqrt{\phi}$ et $dx = d\phi/(2\sqrt{\phi})$. On ne sait toujours pas intégrer.

Parfois, il faut un peu transformer l'expression pour faire apparaître le terme $\phi'(x)$ qui va rendre l'intégration simple. Par exemple :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx &= \int \left[1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right] dx = x - \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx \\ &= x - \frac{1}{2} \int \frac{d\phi}{\phi + 1} = x - \frac{1}{2} \ln(\phi + 1) = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) \quad \text{avec } \phi = e^{2x} \text{ et donc } d\phi = 2e^{2x} dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Faire le changement de variable $\phi = e^{2x}$ dans la première expression aurait été difficile puisque la dérivée $\phi' = 2e^{2x}$ n'apparaissait pas au numérateur. Une transformation astucieuse a permis de la faire apparaître.

Dernier exemple, quelle est une primitive de $\tan(x)$? On sait que $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ et $\sin(x)$ (au numérateur) est au signe près la dérivée de $\cos(x)$ (au dénominateur). Et donc

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d\phi}{\phi} = -\ln|\phi| = -\ln|\cos(x)| \quad \text{avec } \phi = \cos x \quad (4.23)$$

4.4.4 Vérifications

Trouver une primitive est souvent un travail compliqué, avec beaucoup de risques d'erreur. À la fin d'un calcul, il est **absolument indispensable** de vérifier qu'on ne s'est pas trompé en redérivant le résultat : on doit retrouver la fonction de départ !

4.5 Calculs d'intégrales

Toutes les règles précédentes sur les primitives deviennent des règles sur les intégrales. Par exemple, l'intégration par parties s'écrit :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad (4.24)$$

où le crochet signifie « la valeur en b » - « la valeur en a ». Attention, il peut arriver que le terme de gauche soit bien défini mais pas les deux termes de droite pris indépendamment. Par exemple, on ne peut pas écrire

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos x}{x^2} dx \quad \text{(Faux)} \quad (4.25)$$

La fonction $\sin(x)/x$ est bien définie, continue et bornée sur l'intervalle $[0, \pi]$. On a essayé d'intégrer le sinus et de dériver le $1/x$ mais le terme dans le crochet diverge en $x = 0$ et la fonction $\cos(x)/x^2$ n'est pas bornée. Si on veut faire ce changement de variable, il faut choisir une autre primitive de $\sin x$ et écrire

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos x - 1}{x^2} dx \quad \text{(Correct)} \quad (4.26)$$

mais ce n'est pas sûr que ça aide à calculer l'intégrale.

Quand on fait un changement de variable dans un calcul d'intégrale, il faut modifier les bornes. Par exemple, pour reprendre un exemple précédent, on écrirait

$$\int_1^2 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\phi^2 + \phi} 2\phi d\phi = \left[2 \ln(1 + \phi) \right]_1^{\sqrt{2}} = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) - 2 \ln 2. \quad (4.27)$$

En effet, si $x = \phi^2$, alors ϕ vaut 1 quand x vaut 1 et ϕ vaut $\sqrt{2}$ quand x vaut 2.

Remarque : le changement de variable $x = -y$ pour une intégrale quelconque donne

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_{-a}^{-b} f(-y) dy = \int_{-b}^{-a} f(-y) dy = \int_{-b}^{-a} f(-x) dx. \quad (4.28)$$

Si f est paire, alors on en déduit que $\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$. Si f est impaire, on trouve $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$.

4.6 Intégrales impropres

On a défini l'intégrale de f sur $[a, b]$ pour a et b réels et f borné sur l'intervalle. On peut définir par passage à la limite une intégrale qui ne vérifie pas ces règles ; on parle alors d'intégrale impropre.

Ainsi, on obtient une intégrale impropre quand une des bornes est infinie. Par exemple

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1. \quad (4.29)$$

Dans certains cas, la limite n'existe pas :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \text{Divergence!} \quad (4.30)$$

On dit alors que l'intégrale diverge.

Des fois, le domaine d'intégration est fini, mais la fonction à intégrer diverge au bord du domaine. Ainsi, dans l'exemple qui suit, la fonction qu'on intègre diverge en zéro, mais on peut définir l'intégrale (impropre) par une limite :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2. \quad (4.31)$$

Évidemment, il arrive que l'intégrale diverge. Par exemple

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} - 1\right) = \text{Divergence!} \quad (4.32)$$

Les deux exemples qui précèdent représentent les situations les plus communes d'intégrales impropres, mais il arrive aussi des cas plus compliqués où la fonction n'est pas bornée à l'intérieur du domaine, où les deux bornes sont infinies, etc. On verra un exemple plus tard.

Conditions de convergence

Intuitivement, en faisant un dessin :

- Pour pouvoir intégrer une fonction **jusqu'à l'infini**, il faut que la fonction tende vers zéro **assez vite**.
- Pour pouvoir intégrer une fonction qui **diverge sur une des bornes** du domaine d'intégration, il faut que la fonction diverge **assez lentement** sur cette borne.

L'exemple fondamental est celui des puissances ; on vérifie que

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \text{converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ (on tend vers zéro assez vite)}$	(4.33)
$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \text{converge si et seulement si } \alpha < 1 \text{ (on tend vers l'infini assez lentement)}$	

En particulier, $\int dx/x$ diverge en zéro et en l'infini.

On a de plus quelques théorèmes assez intuitifs ; dans ce qui suit les bornes a b peuvent être finies ou infinies :

- Si $f \leq g \leq h$ et $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b h(x) dx$ convergent, alors $\int_a^b g(x) dx$ converge aussi
- Si $f \sim g$ autour de la borne problématique et que f et g ne changent pas de signe, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x) dx$ converge
- Si g est négligeable devant f autour de la borne problématique¹ et que $\int_a^b f(x) dx$ converge, alors $\int_a^b g(x) dx$ converge aussi.

En particulier, toutes les fonctions qui tendent vers zéro exponentiellement vite (e^{-x} , $e^{-\sqrt{x}}$, etc.) ont une intégrale convergente à l'infini parce qu'elles sont négligeables devant $1/x^2$ qui a une intégrale convergente.

Prenons quelques exemples :

- Soit $f(x) = 1/(e^x - 1)$. Au voisinage de l'infini, $f(x) \sim e^{-x}$ et $\int^{\infty} e^{-x} dx$ converge, donc $\int^{\infty} f(x) dx$ converge. (On n'a pas mis la borne du bas. Ce peut-être n'importe quoi de positif, ça n'a pas d'importance pour discuter de la convergence en l'infini.)

Au voisinage de zéro, $f(x) \sim 1/x$ et $\int_0 dx/x$ diverge, donc $\int_0 f(x) dx$ diverge. (Idem, la borne du haut importe peu.)

- Soit $f(x) = 1/(e^{\sqrt{x}} - 1)$. Au voisinage de l'infini, $f(x) \sim e^{-\sqrt{x}}$ et $\int^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ converge, donc $\int^{\infty} f(x) dx$ converge. Au voisinage de zéro, $f(x) \sim 1/\sqrt{x}$ et $\int_0 dx/\sqrt{x}$ converge, donc $\int_0 f(x) dx$ converge.

Quand l'intégrale est impropre pour plusieurs raisons, il faut vérifier la convergence autour de chaque point problématique. Par exemple, on peut affirmer que $\int_0^{\infty} dx/(e^{\sqrt{x}} - 1)$ converge parce qu'on a vérifié qu'il y avait convergence en zéro et en l'infini.

Prenons un exemple horrible : soit

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + x^5)^{1/4}}. \quad (4.34)$$

est ce que $\int_{-1}^{\infty} f(x) dx$ converge ? Il y a une borne infini, et la fonction f diverge en -1 et en zéro. Au travail :

- Au voisinage de l'infini, on a $f(x) \sim 1/x^{5/4}$ et $\int^{\infty} dx/x^{5/4}$ converge, donc $\int^{\infty} f(x) dx$ converge.

¹C'est-à-dire si g/f tend vers zéro autour de la borne en question.

- Au voisinage de zéro, on a $f(x) \sim 1/(x^2)^{1/4} = 1/\sqrt{|x|}$ (attention, x peut-être négatif et la valeur absolue est importante) et donc $\int_0 f(x) dx$ et $\int^0 f(x) dx$ convergent².
- Au voisinage de -1 , posons $x = -1 + \delta$. Ainsi, on se remet dans le cas plus familier où la variable (maintenant δ) est proche de zéro. On a $x^2 = 1 - 2\delta + \delta^2$ et $x^5 = -1 + 5\delta + \delta \epsilon(\delta)$, donc $f(x) \sim 1/(3\delta)^{1/4}$. Or $\int_0 d\delta/(3\delta)^{1/4}$ converge, on en déduit que $\int_{-1} f(x) dx$ converge.

Les propriétés habituelles des intégrales fonctionnent à condition que tous les termes écrits convergent. Il faut en particulier se méfier pour la règle

$$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx, \quad (4.35)$$

parce qu'il peut arriver que le membre de gauche converge et que les deux termes du membre de droite divergent. Par exemple

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) dx \quad (4.36)$$

est une intégrale propre ! En effet, $1/\sin x - 1/x = (x - \sin x)/(x \sin x) \sim (x^3/6)/x^2 \sim x/6$ au voisinage de zéro. Mais $\int_0 dx/\sin x$ et $\int_0 dx/x$ sont deux intégrales impropres divergentes.

4.7 Techniques avancées

Les fonctions trigonométriques inverses permettent de calculer de nombreuses primitives :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(x) \quad (\text{ou } -\arccos(x)) & x \in [-1, 1] \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{argsinh}(x) & x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{argcosh}(x) & x \geq 1 \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan(x) & x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{argtanh}(x) & x \in]-1, 1[\\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{argcotanh}(x) & x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

(On rappelle que $\arcsin(x) = \pi/2 - \arccos(x)$.) Pour se souvenir de toutes ces règles, c'est facile : quand on intègre un $1/\sqrt{\pm 1 \pm x^2}$ (avec une racine carré), on se souvient qu'il faut choisir parmi \arcsin , $\operatorname{argsinh}$, $\operatorname{argcosh}$ la fonction qui est définie sur le bon intervalle. Idem pour intégrer $1/(1 \pm x^2)$ (sans racine carré) : on se souvient qu'il faut choisir parmi \arctan , $\operatorname{argtanh}$ ou $\operatorname{argcotanh}$ la fonction qui a le bon intervalle de définition.

Quand on intègre l'inverse d'un polynôme de degré 2, on se ramène aux cas précédents. Par exemple :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 11} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right). \quad (4.38)$$

Quand le polynôme de degré 2 a des racines réelles, on peut faire plus simple. Par exemple :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (4.39)$$

Selon l'intervalle, le membre de droite vaut $\operatorname{argtanh}(x)$ ou $\operatorname{argcotanh}(x)$.

Pour les fractions rationnelles (les rapports de deux polynômes), on simplifie le numérateur par **division de polynômes** pour se ramener au cas où le numérateur a un degré inférieur au dénominateur, puis on **décompose en éléments simples**. Voyons cette technique compliquée sur juste un exemple :

$$I = \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx. \quad (4.40)$$

D'abord, on fait la **division de polynômes** pour simplifier l'expression. Il s'agit de trouver deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + R(x), \quad \text{où le degré de } R \text{ est le plus petit possible} \quad (4.41)$$

²Quand le point problématique est au milieu du domaine d'intégration, comme ici, il faut vérifier que ça converge des deux côtés...

Cette division se fait terme par terme en regardant d'abord les termes de plus haut degré : pour former le x^4 à gauche, il faut que $Q(x)$ commence par x^2 et on trouve

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 3x + 2)x^2 + (3x^3 - x^2 + 1). \quad (4.42)$$

C'est de la forme demandé, mais on peut faire mieux en écrivant que

$$3x^3 - x^2 + 1 = (x^2 - 3x + 2)3x + (8x^2 - 6x + 1) \quad (4.43)$$

(le $3x$ a été choisi pour supprimer le terme de plus haut degré $3x^3$) et donc

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x) + (8x^2 - 6x + 1). \quad (4.44)$$

On recommence encore une fois et on trouve

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 8) + (18x - 15), \quad (4.45)$$

et donc

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 8x + \int \frac{18x - 15}{x^2 - 3x + 2} dx. \quad (4.46)$$

Il reste à intégrer une fraction rationnelle plus simple où le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. On peut maintenant faire la **décomposition en éléments simples**. On factorise le dénominateur, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, puis on cherche A et B tels que

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{18x - 15}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (4.47)$$

On peut soit ramener au même dénominateur et résoudre, soit remarquer que le membre de droite se comporte comme $(18 \times 2 - 15)/(x - 2)$ au voisinage de 2 et donc que $B = 21$. De même, au voisinage de 1, la fonction se comporte comme $(18 - 15)/[-(x - 1)]$ et donc $A = -3$. Finalement on intègre

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 8x - 3 \ln |x - 1| + 21 \ln |x - 2|. \quad (4.48)$$

C'est la **méthode de décomposition en éléments simples**.

Dernière technique (hors programme), la méthode de la **tangente de l'angle moitié** :

Quand on intègre une fraction rationnelle de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, on peut toujours intégrer en faisant le changement de variable

$$t = \tan(x/2). \quad (4.49)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2t \cos^2 \frac{x}{2} \\ \cos(x) &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = (1 - t^2) \cos^2 \frac{x}{2} \\ 1 &= \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = (1 + t^2) \cos^2 \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

d'où

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}. \quad (4.51)$$

De plus,

$$dt = \frac{1}{2}(1 + t^2)dx \quad (4.52)$$

En faisant toutes ces transformations, on se réduit à une fraction rationnelle en t qu'on intègre par la décomposition en éléments simples. Par exemple :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin(x)} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2+2t} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+t} = \frac{-2}{1 + \tan \frac{x}{2}}. \quad (4.53)$$

Chapitre 5

Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées. Le but est de déterminer toutes les fonctions qui vérifient l'équation différentielle. Par exemple : quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f'(x) = x^2 \sqrt{1 + f(x)^2} ? \quad (5.1)$$

Cet exemple est dit « de premier ordre » parce qu'il ne fait intervenir que f et f' . Une équation différentielle faisant intervenir f , f' et f'' est dite du deuxième ordre, etc.

5.1 Équations différentielles linéaires

Une catégorie très importante d'équations différentielles sont les équations différentielles linéaires de la forme

$$a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f''(x) + \dots + a_n(x)f^{(n)}(x) = b(x) \quad (5.2)$$

où n est l'ordre de l'équation et $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x)$ sont des fonctions de x . Par exemple :

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \quad (5.3)$$

$$f'(x) - xf(x) = 0 \quad (5.4)$$

$$f'(x) - xf(x) = 4x \quad (5.5)$$

Les fonctions $a_k(x)$ sont les coefficients ; le premier exemple (5.3) est à **coefficients constants** (les a_k ne dépendent pas de x), les deux derniers (5.4) et (5.5) sont à **coefficients variables** (a_0 dépend de x). Les deux premiers exemples (5.3) et (5.4) sont **homogènes** ou **sans second membre** parce que $b(x) = 0$. Le dernier exemple (5.5) est **avec second membre** parce que $b(x) = 4x$.

Les équations différentielles linéaires sans second membre ont une propriété importante :

Si une **équation différentielle linéaire sans second membre** a deux solutions f_1 et f_2 , alors toute combinaison linéaire $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ (avec λ_1 et λ_2 réels ou complexes) est aussi solution.

En particulier, la fonction nulle est solution. De plus, on peut démontrer que

Dans une région où le coefficient $a_n(x)$ ne s'annule pas, toute solution d'une **équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre n** peut s'écrire de la forme $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$, où les f_1, f_2, \dots, f_n sont des solutions **indépendantes** de l'équation différentielle.

L'indépendance des f_k signifie qu'aucun des f_k ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres, ou, de manière équivalente, que la seule manière d'avoir $0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ est de prendre tous les λ_k égaux à zéro¹. Si le coefficient $a_n(x)$ s'annule en x_0 , on commence par résoudre pour $x < x_0$ et pour $x > x_0$, puis on recolle les morceaux en x_0 , voir le TD pour quelques exemples.

Pour prendre un exemple, on peut vérifier que $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont deux solutions de (5.3). La première propriété nous dit que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$ sont aussi solutions de (5.3) et, puisque l'équation différentielle est d'ordre 2, ce sont les seules solutions d'après la seconde propriété.

Pour des équations différentielles linéaires avec second membre, la situation n'est pas beaucoup plus compliquée. Une solution évidente de (5.5) est $f_{s.p.} = -4$. Une fois qu'on a cette **solution particulière**, toutes les autres solutions sont de la forme $f = f_{s.p.} + f_{s.s.m.}$ où $f_{s.s.m.}$ est solution de l'**équation sans second membre associée**, c'est-à-dire ici (5.4).

On retiendra donc que pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre n , il faut

¹Techniquement, l'ensemble des solutions à une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n et les $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sont une base de cet espace vectoriel.

- trouver n solutions indépendantes $f_{1,s.s.m.}, \dots, f_{n,s.s.m.}$ à l'équation différentielle sans second membre
- trouver *une* solution particulière $f_{s.p.}$ à l'équation complète avec second membre.

L'ensemble des solutions est alors donné par

$$f_{s.p.} + \lambda_1 f_{1,s.s.m.} + \dots + \lambda_n f_{n,s.s.m.} \quad (5.6)$$

pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels (ou complexes) quelconques.

5.2 Techniques pour résoudre les équations différentielles linéaires

Comme on sait à combien de solutions on doit s'attendre, il est valide d'essayer de deviner une ou plusieurs solutions et de vérifier qu'elles fonctionnent. Dans tous les cas, quelle que soit la méthode retenue, il **faudrait** vérifier la solution trouvée en la mettant dans l'équation de départ.

5.2.1 Coefficients constants sans second membre

Pour des équations différentielles linéaires sans second membre à coefficients constants, on peut chercher des solutions de la forme e^{rx} . On trouve que cette solution fonctionne si r est solution d'un certain polynôme qu'on appelle le **polynôme caractéristique**. Par exemple, $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (5.3) si et seulement si

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad (5.7)$$

d'où les deux solutions $r = 1$ et $r = 2$ évoquées plus haut.

Pour une équation différentielle d'ordre n , le degré du polynôme caractéristique est aussi n . En général, ce polynôme a n racines différentes, et on a donc directement une les n solutions indépendantes recherchées. Il arrive cependant que le polynôme a une racine double r . On peut alors vérifier que e^{rx} et xe^{rx} sont deux solutions indépendantes². Par exemple :

$$f'''(x) - 4f''(x) + 5f'(x) - 2f(x) = 0. \quad (5.8)$$

Le polynôme caractéristique est $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r - 1)^2(r - 2)$; la racine 1 est double et la racine 2 est simple. Les fonction e^x , xe^x et e^{2x} sont donc trois solutions indépendantes de (5.8). (Le vérifier!)

Parfois, les racines du polynôme caractéristique sont complexes. Par exemple

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0 \quad (5.9)$$

a pour polynôme caractéristique $r^2 - 2r + 2$ dont les racines sont $1 \pm i$. Les fonctions $f_+(x) = e^{(1+i)x}$ et $f_-(x) = e^{(1-i)x}$ forment donc une base de solutions, mais ce n'est pas très pratique si on cherche des solutions réelles à l'équation différentielle de départ qui est à coefficients réels. On remarque que les deux solutions sont complexes conjuguées l'une de l'autre et donc les parties réelles et imaginaires de f_+ et f_- sont des combinaisons linéaires de ces deux fonctions, c'est-à-dire des solutions; on trouve : $e^x \cos x = \Re(f_+) = (f_+ + f_-)/2$ et $e^x \sin x = \Im(f_+) = (f_+ - f_-)/(2i)$.

5.2.2 Coefficients variable sans second membre

Pour les équations différentielles linéaires de premier ordre sans second membre du type

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0, \quad (5.10)$$

où $a(x)$ est une fonction quelconque, on connaît la solution générale :

$$f(x) = \exp[-A(x)] \quad \text{où } A(x) \text{ est une primitive de } a(x). \quad (5.11)$$

Ainsi, une solution de (5.4) est $\exp(x^2/2)$. Pour une équation du type $a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = 0$, il suffit de diviser par $a_1(x)$ pour se ramener au cas précédent, au moins partout où $a_1(x)$ est non nul...

Pour des équation différentielles linéaires à coefficients non constants d'ordre plus élevé, il n'y a pas de technique générale pour trouver une solution.

5.2.3 Variation de la constante pour trouver une deuxième solution

Si on connaît déjà **une** solution à une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur ou égal à deux, il est parfois possible de trouver une autre solution en **faisant varier la constante**. Voyons le sur un exemple :

$$x^2 f''(x) - x(2+x)f'(x) + (2+x)f(x) = 0 \quad (5.12)$$

²Et si r est une racine triple du polynôme caractéristique, alors e^{rx} , xe^{rx} et x^2e^{rx} sont solutions, etc.

On peut voir en regardant bien que $f(x) = x$ est une solution « évidente ». Donc, par linéarité, toutes les fonctions de la forme λx sont solutions si λ est une constante. La méthode de variation de la constante consiste à chercher des solutions de la forme $f(x) = \lambda(x)x$, où x est notre première solution et où λ est maintenant une fonction. Dans (5.12), on obtient, après simplification,

$$x^3[\lambda''(x) - \lambda'(x)] = 0 \quad (5.13)$$

L'équation obtenue fait intervenir λ' et λ'' . C'est donc une équation du premier ordre en λ' qui se résout en $\lambda'(x) = Ke^x$ ou, après intégration

$$\lambda(x) = Ke^x + K' \quad (5.14)$$

où K et K' sont deux constantes. Les solutions de (5.12) sont donc de la forme

$$f(x) = Kxe^x + K'x. \quad (5.15)$$

5.2.4 Équations différentielles linéaires avec second membre

Il s'agit de trouver une solution particulière pour se ramener au cas précédent.

Parfois, si le membre de droite est simple et que les coefficients sont constants ou varient de manière simple, on peut deviner une solution ou la forme générale d'une solution. Par exemple, si le membre de droite est une constante

$$xf''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 42, \quad (5.16)$$

il y a une solution particulière constante $f(x) = 21$.

Pour un second membre polynomial et des coefficients constants ou polynomiaux,

$$xf''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = x^3, \quad (5.17)$$

il est assez naturel de chercher une solution particulière polynomiale

$$f_{s.p.}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3. \quad (5.18)$$

En reportant dans l'équation, le membre de gauche et le membre de droite sont des polynômes de degré trois et il n'y a plus qu'à trouver les coefficients pour que ça marche.

Pour un second membre exponentiel et des coefficients constants,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^{kx} \quad (5.19)$$

on cherche une solution de la forme αe^{kx} . Le membre de gauche sera un nombre fois e^{kx} et il suffit de choisir la bonne valeur de α pour avoir l'égalité. Si le membre de droite est un polynôme par une exponentielle, on cherchera de même la solution comme un polynôme fois la même exponentielle. Notez que pour (5.19), cette méthode fonctionne pour tous les k (même complexes), sauf pour $k = 1$ et $k = 2$. (Vérifiez le et demandez-vous pourquoi!) Pour ces deux valeurs de k , on peut chercher la solution de la forme $\alpha x e^{kx}$.

Une situation très importante pour l'étude des phénomènes de résonance est le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants avec un second membre trigonométrique :

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \cos(\omega x) \quad (5.20)$$

La manière la plus simple de procéder est de trouver les fonctions \tilde{f} qui sont solutions de l'équation complexe

$$\tilde{f}''(x) - 3\tilde{f}'(x) + 2\tilde{f}(x) = e^{i\omega x} \quad (5.21)$$

(c'est un cas particulier de (5.19)) et de remarquer, en prenant la partie réelle de cette équation, que $f = \Re(\tilde{f})$ est solution de (5.20).

Quand on n'arrive pas à deviner une solution particulière, on peut essayer de faire varier la constante. Voyons le avec l'équation

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = b(x) \quad (5.22)$$

pour un $b(x)$ quelconque. On sait que les solutions de l'équation sans second membre sont e^x et e^{2x} . On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$f_{s.p.}(x) = \lambda(x)e^x. \quad (5.23)$$

En reportant, on trouve

$$\lambda''(x) - \lambda'(x) = b(x)e^{-x} \quad (5.24)$$

On s'est donc ramené à une équation en λ' de degré inférieur, donc plus simple. On recommence : la solution de l'équation sans second membre est $\lambda'(x) = e^x$, cherchons une solution de la forme $\lambda'(x) = \mu(x)e^x$. On trouve

$$\mu'(x) = b(x)e^{-2x} \quad (5.25)$$

Et donc on obtient une solution particulière en calculant $\mu(x) = \text{Primitive}[b(x)e^{-2x}]$ puis en primitivant une seconde fois avec $\lambda(x) = \text{Primitive}[\mu(x)e^x]$, puis en utilisant (5.23).

La méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière conduit toujours à de gros calculs ; il ne faut l'employer qu'en désespoir de cause.

5.3 Équations différentielles non linéaires

Quand l'équation différentielle n'est pas linéaire, aucune des techniques précédentes ne marche : une combinaison linéaire de solutions n'est pas solution, la décomposition « solution particulière » + « solution sans second membre » ne marche plus, la variation de la constante ne marche plus. En bref, il n'y a aucune technique générale pour résoudre une équation différentielle non linéaire. Examinons quelques cas particuliers

5.3.1 Théorème de Cauchy

Pour une équation différentielle d'ordre n que l'on peut écrire de la forme

$$f^{(n)}(x) = \Phi[x, f(x), f'(x), \dots, f^{n-1}(x)] \quad (5.26)$$

où Φ est une fonction de $n + 1$ variables, le Théorème de Cauchy affirme que si l'on fixe les « conditions initiales » $f(0), f'(0), \dots, f^{n-1}(0)$, alors l'équation n'a qu'une seule solution. Ce théorème est très important pour la mécanique, où l'on cherche une trajectoire $x(t)$ étant donnée l'accélération donnée par le principe de Newton :

$$m\ddot{x} = (\text{somme des forces extérieures}) = F[x, \dot{x}] \quad (5.27)$$

(attention, la fonction s'appelle maintenant x de paramètre t , et un point signifie une dérivée par rapport au temps.) Le Théorème de Cauchy nous dit que toute la trajectoire future et passée est connue si on se donne la position $x(0)$ et la vitesse $\dot{x}(0)$ à l'instant $t = 0$ initial.

5.3.2 Intégrer une fois

Pour une équation de la forme

$$f''(x) = \Phi[f(x)], \quad (5.28)$$

on peut se ramener à une équation du premier ordre en multipliant par $f'(x)$ et en intégrant une fois. On trouve

$$\frac{1}{2}f'(x)^2 = \text{Primitive}(\Phi)[f(x)] + \text{Cste} \quad (5.29)$$

où la constante est à déterminer. Cette méthode appliquée à la mécanique du point donne la conservation de l'énergie.

5.3.3 Séparation des variables

Pour certaines équations différentielles non linéaires d'ordre 1, on peut séparer les variables, c'est-à-dire réorganiser l'équation en mettant dans le membre de gauche $f'(x)$ multiplié par une fonction de f (sans que x n'apparaisse explicitement) et en mettant dans le membre de droite une fonction de x (sans que f n'apparaisse explicitement.) Il suffit alors d'intégrer.

Par exemple, on peut réécrire l'équation (5.1) sous la forme

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}} = x^2. \quad (5.30)$$

On intègre des deux côtés :

$$\operatorname{argsinh} f(x) = \frac{x^3}{3} + \text{Cste} \quad (5.31)$$

Et donc la solution générale est

$$f(x) = \sinh \left[\frac{x^3}{3} + \text{Cste} \right]. \quad (5.32)$$

Autre exemple, considérons l'équation

$$e^x f'(x) + x e^{-f(x)} = 0. \quad (5.33)$$

Après réorganisation, on écrit

$$e^{f(x)} f'(x) = -x e^{-x} \quad (5.34)$$

On intègre des deux côtés

$$e^{f(x)} = (x+1)e^{-x} + \text{Cste} \quad (5.35)$$

Finalement

$$f(x) = \ln [(x+1)e^{-x} + \text{Cste}]. \quad (5.36)$$

(Notez que si x tend vers $-\infty$, l'argument du logarithme devient négatif et $f(x)$ n'est pas défini. Il n'existe pas de solution définie sur tout \mathbb{R} , seulement des solutions définies pour x assez grand.)

Chapitre 6

Fonctions de plusieurs variables, différentielles

On considère dans ce chapitre des fonctions de n variables réelles à valeur réelle :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

On notera parfois les n variables prises ensemble comme le « vecteur » $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La plupart des exemples seront donnés pour $n = 2$ ou $n = 3$. Dans ce cas on appellera souvent les variables x , y et z plutôt que x_1 , x_2 et x_3 .

6.1 Limites, continuité

La notion de limite fonctionnelle dans \mathbb{R}^n comme dans \mathbb{R} :

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} f(\vec{y}) = l \quad (6.2)$$

signifie que lorsque \vec{y} s'approche de \vec{x} , c'est-à-dire lorsque chacun des y_k s'approche de x_k , alors la valeur de $f(\vec{y})$ s'approche de l , et ce **quelle que soit la façon dont \vec{y} s'approche de \vec{x}** !¹

La définition effective de la limite est : f a la limite l en x si pour tout $\delta > 0$ (petit), on peut trouver une région de \mathbb{R}^n entourant x (on dit : un voisinage de x) telle que pour tout y dans cette région, la différence entre $f(y)$ et l est inférieure à δ en valeur absolue.

Comme pour les fonctions de \mathbb{R} , une fonction f est continue en un point si elle est égale à sa limite en ce point. On écrira encore

$$f \text{ est continue en } \vec{x} \text{ signifie } f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \epsilon(\vec{h}), \quad (6.3)$$

où $\epsilon(\vec{h})$ est une fonction quelconque qui tend vers 0 quand \vec{h} tend vers $\vec{0}$. Une fonction est continue dans une région quand elle est continue en chaque point de cette région, elle est continue (tout court) quand elle est continue partout où elle est définie.

Il n'y a pas de mauvaise surprise : les fonctions usuelles sont continues, les sommes, produits, compositions de fonctions continues sont continues, et les rapports de fonctions continues sont continues là où le dénominateur ne s'annule pas.

Quand le dénominateur s'annule, il faut réfléchir. Par exemple, considérons

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (6.4)$$

f et g sont manifestement continues en tout point différent de l'origine $(0, 0)$. À l'origine, il faut réfléchir. Commençons par f .

On vérifie facilement que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$: si on s'approche de l'origine en suivant l'un des axes principaux, f est identiquement nulle et a donc une limite nulle à l'origine. C'est un bon départ, mais ce n'est pas suffisant ! Regardons maintenant la valeur de f sur une diagonale : $f(x, x) = \frac{1}{2}$ si $x \neq 0$. On voit que la limite de f à l'origine en arrivant par une diagonale est différente de la limite en arrivant par un axe et donc, **f n'est pas continue à l'origine.**

¹Déjà, pour les fonctions à une variable, il y a deux manières de s'approcher de x : par la droite ou par la gauche. Pour des fonctions de n variables, il y a beaucoup plus de manières.

Étudions maintenant g : On a $g(x, 0) = g(0, y) = 0$, tout va bien selon les axes principaux. Sur la diagonale, $g(x, x) = x/2$ qui tend aussi vers zéro à l'origine. C'est bien, mais ce n'est pas suffisant pour démontrer que g est continue à l'origine. Voici une manière de faire : on sait que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, donc en développant et en réorganisant $|xy|/(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2}$, et donc $|g(x, y)| \leq |x|/2$. Quelle que soit la manière choisie pour s'approcher de zéro, x doit tendre vers zéro et donc g aussi. On en déduit que g est continue à l'origine.

6.2 Dérivées partielles, fonctions différentiables

Dérivées partielles On considère une fonction de trois variables (x, y, z) . On s'intéresse à l'une d'entre elles, par exemple y . En fixant la valeur des deux autres variables x et z , on obtient une fonction de y . Si cette fonction est dérivable, on note sa dérivée $\partial f/\partial y$, qu'on appelle dérivée partielle de f . On écrira donc, par exemple

$$f(x, y + h, z) = f(x, y, z) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + h \epsilon(h), \quad (6.5)$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h, z) - f(x, y, z)}{h}. \quad (6.6)$$

Remarquez que dans les expressions ci-dessus, on dérive par rapport à y en gardant x et z constants.

Par exemple,

$$f(x, y) = x^2 e^y \quad \implies \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^y. \quad (6.7)$$

Une fonction de n variables aura donc n dérivées partielles, et chacune de ces dérivées partielles est une nouvelle fonction de n variables.

Fonctions différentiables On considère une fonction de deux variables² dérivable selon chacune de ses variables. Fixons x et y , comment varie $f(x + h_1, y + h_2)$ pour h_1 et h_2 petits ? On développe

$$\begin{aligned} f(x + h_1, y + h_2) &= f(x + h_1, y) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x + h_1, y) + h_2 \epsilon(h_2), \\ &= f(x, y) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x + h_1, y) + h_1 \epsilon(h_1) + h_2 \epsilon(h_2). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pour la première ligne, on a utilisé la dérivabilité par rapport à y . Pour la seconde ligne, on a utilisé la dérivée par rapport à x . Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ est une fonction continue au point considéré (x, y) , alors on obtient

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + h_2 \epsilon(h_2) + h_1 \epsilon(h_1) + h_2 \epsilon(h_2) \quad (6.9)$$

Les trois termes $h_a \epsilon(h_b)$ tendent *rapidement* vers zéro quand $\vec{h} = (h_1, h_2)$ tend vers zéro : même si on les divise par $\|\vec{h}\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ (la norme de \vec{h}), ce qui reste tend encore vers zéro. On écrit donc ces trois termes collectivement comme $\|\vec{h}\| \epsilon(\vec{h})$.

On retiendra donc que

Théorème. On considère une fonction f de n variables qui a n dérivées **continues**³ en un point (x_1, x_2, \dots) . Alors

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n + \|\vec{h}\| \epsilon(\vec{h}). \quad (6.10)$$

On dit alors que la fonction est différentiable en (x_1, x_2, \dots) et on note

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (6.11)$$

la différentielle de f en ce point. Cette différentielle df représente donc l'accroissement infinitésimal de la valeur de f quand l'argument x_1 augmente de la quantité infinitésimale dx_1 et que x_2 augmente de la quantité infinitésimale dx_2 , etc.

²Tout se généralise à n variables.

³Cette condition est importante. Par exemple, la fonction g dans (6.4) n'est pas différentiable en $(0, 0)$ même si les dérivées partielles $\partial g/\partial x(0, 0) = \partial g/\partial y(0, 0) = 0$ sont bien définies. En effet, $g(h, h) = h/2$ ce qui est différent de (6.10).

Remarque : toutes les dérivées sont prises au point (x_1, x_2, \dots) . On devrait le noter, mais c'est rarement fait. La différentielle df dépend donc, en un sens, de $2n$ variables : x_1, x_2, \dots, x_n et dx_1, dx_2, \dots, dx_n .

Géométriquement, pour une fonction de deux variables, la différentielle df vue comme une « fonction » de (dx, dy) représente l'équation du plan tangent en (x, y) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Encore une fois, il n'y a pas de surprise : la somme, le produit, le rapport de fonctions différentiables est différentiable, et on établit facilement les formules :

$$\begin{aligned} d(\text{Cste}) &= 0, & d(f + g) &= df + dg, & d(\lambda f) &= \lambda df, \\ d(fg) &= f dg + g df, & d(f/g) &= (df)/g - (f/g^2) dg. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Pour les fonctions composées, ce n'est pas beaucoup plus compliqué. Si $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ est une fonction de trois variables et ϕ une fonction de une variable, alors $(x, y, z) \mapsto \phi[f(x, y, z)]$ est une fonction de trois variables dont la différentielle est

$$d(\phi[f(x, y, z)]) = \phi'[f(x, y, z)] df. \tag{6.13}$$

Par exemple : $d(f^2) = 2f df$, $d(1/f) = -(1/f^2) df$, etc.

On peut composer les fonctions dans l'autre sens : si $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est une fonction de deux variables et que $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont deux fonctions de une variable, alors $t \mapsto f[x(t), y(t)]$ est une fonction de une variable. On vérifie que sa dérivée est

$$\frac{d}{dt} f[x(t), y(t)] = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t). \tag{6.14}$$

C'est comme si on écrivait la différentielle et qu'on « divisait » par dt .

6.3 Dérivées secondes et théorème de Schwartz

Une fonction $f(x, y)$ de deux variables a deux dérivées partielles. Chacune de ces dérivées partielles est une nouvelle fonction de deux variables qui a également deux dérivées partielles. La fonction f a donc quatre dérivées seconde :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{6.15}$$

Le **Théorème de Schwartz** dit que si ces dérivées secondes sont des fonctions continues, alors $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$. De manière générale :

Théorème (Théorème de Schwartz). *Si toutes les dérivées d'ordre p d'une fonction de n variables sont continues en un point \vec{x} , alors le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a effectué les p dérivations.*

Pour prendre un exemple, on considère la fonction $f(x, y) = (x^2 + y)^2$. On a

$$df = 4x(x^2 + y)dx + 2(x^2 + y)dy, \tag{6.16}$$

ce qui est, finalement, une manière compacte d'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y). \tag{6.17}$$

La dérivée seconde croisée peut se calculer de deux manières différentes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} 4x(x^2 + y) = \frac{\partial}{\partial x} 2(x^2 + y) = 4x. \tag{6.18}$$

6.4 Formes différentielles

On aimerait savoir s'il une fonction $g(x, y)$ telle que dg soit égal à

$$2(x^2 + y)dx + 4x(x^2 + y)dy. \tag{6.19}$$

(Comparer avec (6.16) : on a inversé les termes.) Le théorème de Schwartz nous dit que non : si une telle fonction g existait on devrait avoir

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} 2(x^2 + y) = \frac{\partial}{\partial x} 4x(x^2 + y), \tag{6.20}$$

ce qui est manifestement faux.

On dit que l'expression (6.19) est une **forme différentielle**, mais cette forme différentielle n'est pas une différentielle. De manière générale, si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ quelconques, alors

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{6.21}$$

est une forme différentielle. La notation ω pour les formes différentielles est habituelle chez les mathématiciens, mais elle est un peu problématique pour un physicien : ω est infiniment petit, mais il n'y a rien pour l'indiquer dans la notation.

Si la **forme différentielle** ω est une **différentielle** (c'est-à-dire s'il existe f telle que $\omega = df$), on dit que ω est **exacte** et la fonction f s'appelle une **primitive** de ω .

Si la forme différentielle est telle que ses dérivées croisées sont égales, on dit qu'elle est **fermée**. (ω est donc fermée si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Une forme différentielle de trois variables $P dx + Q dy + R dz$ est fermée si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ et $\partial P/\partial z = \partial R/\partial x$ et $\partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$.)

Le théorème de Schwartz implique que si ω est exacte, alors ω est fermée. En effet, si $\omega = df$, alors $P = \partial f/\partial x$ et $Q = \partial f/\partial y$, et $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

Le **Théorème de Poincaré** donne la réciproque :

Théorème. *Dans un domaine sans trou, toute forme différentielle fermée est exacte.*

(Voir la section 6.6 pour un exemple de domaine avec trou où le théorème ne s'applique pas.)

Exemples :

- $\omega_1 = x dx + x dy$: la forme n'est pas exacte

- $\omega_2 = x dx + y dy$: la forme est exacte et on vérifie que $f = (x^2 + y^2)/2 + \text{Cste}$.

- $\omega_3 = (2xe^y + e^x) dx + (x^2e^y + e^z) dy + (ye^z + 1) dz$: la forme est exacte et $f = x^2e^y + ye^z + e^x + z + \text{Cste}$.

Pour intégrer (par exemple ω_3) on regarde le premier terme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xe^y + e^x \tag{6.22}$$

ce qui implique que

$$f(x, y, z) = x^2e^y + e^x + g(y, z) \tag{6.23}$$

Le terme $g(y, z)$ est la constante d'intégration : elle a une dérivée nulle quand on dérive par rapport à x . g peut cependant dépendre de y et z ! La deuxième équation donne alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2e^y + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = x^2e^y + e^z, \tag{6.24}$$

et donc

$$g(y, z) = ye^z + h(z) \tag{6.25}$$

$h(z)$ est encore une constante d'intégration qui ne peut dépendre ni de y (car la dérivée de h par rapport à y est nulle), ni de x (car g ne dépend pas de x). h peut néanmoins encore dépendre de z . Enfin

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial z}(y, z) = ye^z + h'(z) = ye^z + 1 \tag{6.26}$$

d'où $h(z) = z + \text{Cste}$ et le résultat final.

6.5 Intégration d'une forme différentielle le long d'un chemin

Imaginons une particule se déplaçant dans le plan (x, y) . On suppose que cette particule est soumise à une force $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{e}_x + Q(x, y)\vec{e}_y$. Pendant un déplacement infinitésimal $d\vec{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$, la force \vec{F} fournit le travail $\delta W = \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{M} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Ce travail infinitésimal δW est une forme différentielle ! Le travail total W est l'intégrale de δW sur la trajectoire suivie par la particule :

$$W = \int_C \delta W. \tag{6.27}$$

Le résultat de cette intégrale (le travail de la force) dépend a priori des composantes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ de la force, mais aussi de toute la trajectoire \mathcal{C} suivie par la particule !

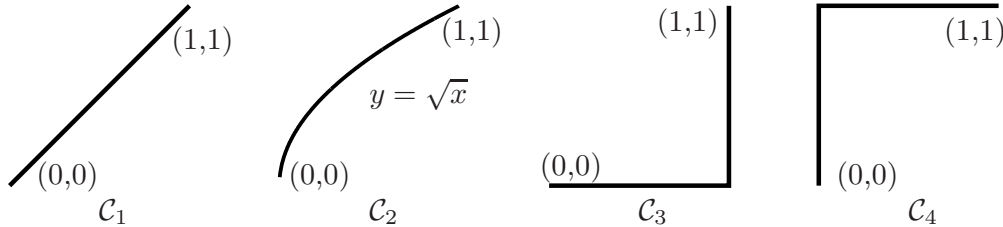
Ceci n'est qu'un exemple parmi d'autres où, en physique, on a besoin d'intégrer une forme différentielle sur un chemin (ou une trajectoire). La signification de l'intégrale est toujours la même : on découpe le chemin en beaucoup de petits morceaux. Chaque petit morceau est localisé à une position (x, y) et est caractérisé par un accroissement (dx, dy) infinitésimal. On peut donc calculer la valeur de la forme différentielle ω sur ce morceau (dans l'exemple ci-dessus, on calcule δW), et la somme de toutes les valeurs sur tous les morceaux converge vers l'intégrale de ω (ou δW) sur ce chemin quand la taille des morceaux tend vers zéro.

En pratique, il s'agit de se ramener à une intégrale simple en **paramétrisant** le chemin : si la trajectoire peut être décrite par une fonction $y = f(x)$, alors au point $(x, y = f(x))$ l'accroissement infinitésimal sera de la forme $(dx, dy = f'(x)dx)$ et la quantité ω (ou δW) sera simplement une fonction de x fois dx , que l'on sait facilement intégrer. Parfois, il est plus pratique de choisir une paramétrisation $x = g(y)$, parfois le mieux est de choisir $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Le résultat final ne peut pas dépendre de la paramétrisation !

Voyons comment tout ceci fonctionne sur deux exemples, les formes différentielles

$$\omega_1 = x dx + x dy \quad \text{et} \quad \omega_2 = x dx + y dy, \quad (6.28)$$

intégrées sur quatre chemins allant de $A = (0, 0)$ à $B = (1, 1)$:



Par exemple, sur le chemin C_1 , on a $y = x$, et donc $dy = dx$ et

$$\int_{C_1} \omega_1 = \int_0^1 (x dx + x dx) = 1, \quad \int_{C_1} \omega_2 = \int_0^1 (x dx + x dx) = 1. \quad (6.29)$$

(Voyez comme l'intégrale sur le chemin s'est transformée en intégrale sur x .)

Sur le chemin C_2 , on a $y = \sqrt{x}$ et $dy = dx/(2\sqrt{x})$, et donc

$$\int_{C_2} \omega_1 = \int_0^1 (x dx + x dx/(2\sqrt{x})) = 4/3, \quad \int_{C_2} \omega_2 = \int_0^1 (x dx + \sqrt{x} dx/(2\sqrt{x})) = 1. \quad (6.30)$$

Encore une fois : une simple intégrale sur x .

Sur les chemins C_3 et C_4 , on n'a ni y fonction de x , ni x fonction de y . On coupe le chemin en deux parties, une horizontale paramétrée par x et une verticale paramétrée par y . Sur la partie horizontale, $dy = 0$ et sur la partie verticale $dx = 0$. On trouve :

$$\int_{C_3} \omega_1 = \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dy = 3/2, \quad \int_{C_3} \omega_2 = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy = 1 \quad (6.31)$$

et

$$\int_{C_4} \omega_1 = \int_0^1 0 dy + \int_0^1 x dx = 1/2, \quad \int_{C_4} \omega_2 = \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx = 1 \quad (6.32)$$

Les quatre chemins vont du même point de départ au même point d'arrivée, mais l'intégrale de la forme différentielle ω_1 dépend du chemin choisi. Par contre, on constate que l'intégrale de ω_2 ne dépend pas du chemin choisi (elle dépend cependant du point de départ et du point d'arrivée du chemin). La raison est que ω_2 est une forme exacte (faire les dérivées croisées) et que donc il existe une fonction f telle que $\omega_2 = df$. On a alors

$$\int_C \omega_2 = \int_C df = f(\text{point d'arrivée}) - f(\text{point de départ}). \quad (6.33)$$

Ici, $\omega_2 = df$ pour $f = (x^2 + y^2)/2 + \text{Cste}$ et la formule ci-dessus donne bien 1, indépendamment de la constante choisie.

On retiendra donc

- L'intégrale de la différentielle d'une fonction f sur un chemin ne dépend pas du chemin choisi, mais seulement du point de départ et du point d'arrivée.
- L'intégrale d'une forme différentielle qui n'est pas une différentielle dépend du chemin choisi.

En mécanique, c'est la différence entre les forces conservatives, pour lesquelles il y a une énergie potentielle E_p telle que $\delta W = -dE_p$ (attention au signe !), et les forces non-conservatives pour lesquelles le travail dépend de toute la trajectoire.

6.6 Pour aller plus loin, un exemple de forme fermée non exacte

Dans certains domaines du plan, les fonctions $\arctan(y/x)$ ou $\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$ ou $\arcsin(y/\sqrt{x^2 + y^2})$ donnent l'angle θ entre l'axe (Ox) et le point $M = (x, y)$. Aucune de ces fonctions n'est valable sur tout le plan privé de $(0, 0)$. Cependant, elles ont toute la même différentielle $\omega = (x dy - y dx)/\sqrt{x^2 + y^2}$. Cette

différentielle est exacte sur chacun des domaines de définition de ces fonctions, elle est fermée sur tout le plan privé de $(0, 0)$, mais elle n'est pas exacte sur tout le plan privé de $(0, 0)$ parce qu'on ne peut pas définir une fonction $\theta(x, y)$ valable partout. En tout point ω représente l'augmentation locale de l'angle θ quand x et y sont respectivement bougés de dx et dy .

Si on intègre cette forme différentielle sur un chemin fermée entourant l'origine, on trouve 2π fois le nombre de tours alors que si la forme était exacte on devrait trouver zéro.

6.7 L'exemple de la thermodynamique ; fonctions réciproques

Exercice : La thermodynamique nous enseigne qu'il existe une fonction $S(U, V, n)$ appelée entropie telle que

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} - \frac{\mu dn}{T}, \quad (6.34)$$

où T, P, μ sont trois fonctions de U, V, n vérifiant $U = \frac{3}{2}nRT$ et $PV = nRT$. Que peut-on dire de la fonction μ ?

En thermodynamique, un système peut être caractérisé par plein de paramètres comme U, n, V, S, P, T , etc. Pour un corps pur sous une seule phase, si on connaît trois paramètres, on connaît les autres. Cela signifie qu'il existe des fonctions telles que, par exemple,

$$U = U(S, V, n) \quad U = U(T, V, n) \quad S = S(U, V, n) \quad P = P(T, V, n) \quad \dots \quad (6.35)$$

Attention, risque de confusion ! Dans le premier cas le symbole U désigne une fonction de S, V, n , dans le deuxième cas c'est le nom d'une **autre** fonction, cette fois de T, V, n , et dans le troisième cas c'est le nom d'un des trois arguments de la fonction S . Idem pour tous les autres symboles : par exemple, S dénote parfois une fonction, parfois le nom d'un argument.

Que signifie alors $\frac{\partial U}{\partial V}$? C'est ambigu. Est-ce la dérivée partielle de la fonction $U(S, V, n)$ ou de la fonction $U(T, V, n)$? Pour lever l'ambiguïté, on notera

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,n} & \text{ la dérivée partielle de } U(S, V, n), \\ \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{T,n} & \text{ la dérivée partielle de } U(T, V, n), \end{aligned} \quad (6.36)$$

et, donc, les différentielles des deux fonctions U que l'on a définies sont :

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V,n} dS + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,n} dV + \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{S,V} dn, \quad dU = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,n} dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{T,n} dV + \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{T,V} dn. \quad (6.37)$$

On donne des noms à certaines de ces dérivées ; par exemple $C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,n}$ ou $-P = \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,n}$ et on écrit

$$dU = T dS - P dV + \mu dn, \quad dU = C_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{T,n} dV + \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{T,V} dn. \quad (6.38)$$

(On nomme rarement les deux dérivées qu'on a laissées, mais insistons sur le fait que $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{T,n}$ n'est pas $-P$.)

Dans la première cas de cet exemple, $T, -P$ et μ sont les trois dérivées de $U(S, V, n)$, ce sont donc, implicitement, également des fonctions de S, V et n . Les dérivées de ces trois fonctions sont les dérivées secondes de $U(S, V, n)$ et, comme toutes les fonctions thermodynamiques sont gentilles, le théorème de Schwartz donne, par exemple,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_{S,n} = - \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_{V,n}. \quad (6.39)$$

La fonction $S(U, V, n)$ est l'une des trois fonctions réciproques de $U(S, V, n)$, ce qui signifie que

$$S(U(S, V, n), V, n) = S. \quad (6.40)$$

(Attention, dans cette expression certains S sont des fonctions, d'autres des nombres...) Si on dérive par rapport à S , on trouve

$$\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_{V,n} \times \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V,n} = 1 \quad (6.41)$$

Autrement dit, la dérivée de U par rapport à S est l'inverse de la dérivée de S par rapport à U .

Si on dérive par rapport à V , on trouve

$$\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_{V,n} \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,n} + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{U,n} = 0, \quad (6.42)$$

ou, avec la propriété précédente

$$\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_{V,n} \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,n} \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{U,n} = -1, \quad (6.43)$$

ce qui n'est pas intuitif.

Attention, on n'inverse pas les dérivées secondes : $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}$ n'est pas l'inverse de $\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$ (ce n'est même pas homogène.)

Les propriétés (6.41) et (6.43), qu'on vient de voir sur un exemple de thermodynamique, sont bien sûr complètement générales. Juste pour prendre un exemple explicite, calculer à partir de $PV = nRT$, les quantités $\partial P/\partial V|_T$, $\partial V/\partial T|_P$ et $\partial T/\partial P|_V$.

Chapitre 7

Champs, gradients, intégrales le long d'un chemin

7.1 Introduction

Définition. *Un champ scalaire est une fonction f qui à tout point M de l'espace (ou du plan) associe un nombre $f(M)$. Un champ vectoriel est une fonction \vec{A} qui à tout point M de l'espace (ou du plan) associe un vecteur $\vec{A}(M)$.*

Par exemple, la fonction qui à tout point de l'espace associe la température en ce point est un champ scalaire appelé « champ de température ». On a de la même manière un champ de pression, de densité, etc. Le champ d'altitude est la fonction qui à tout point d'un territoire associe l'altitude de ce point (par rapport au niveau de la mer, par exemple).

Le champ électrique et le champ magnétique sont deux champs vectoriels : ce sont des fonctions qui associent à chaque point de l'espace les vecteurs \vec{E} et \vec{B} . Dans un liquide en écoulement, le champ de vitesse est la fonction qui à chaque point dans le fluide associe la vitesse moyenne des molécules de fluides autour de ce point.

Si on se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on peut écrire un champ scalaire comme une fonction de trois variables et un champ vectoriel à l'aide de trois fonctions de trois variables :

$$f(M) = f(x, y, z), \quad \vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z, \quad (7.1)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point M .

Par exemple, on choisit un point A et on pose $f(M) = (\text{distance } AM)$. Dans le repère cartésien on aurait $f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$. Remarquez comme on a écrit avec le même symbole f le champ (qui à un point M de l'espace associe le nombre OM) et la fonction de trois variables qui permet de calculer $f(M)$ dans le repère choisi. Remarquez aussi que la fonction $f(x, y, z)$ dépend du repère choisi, alors que la fonction $f(M)$ est intrinsèque.

En physique, on aime bien écrire des équations intrinsèques qui ne dépendent pas du système de coordonnées choisi. On vient de voir dans le chapitre précédent comment définir une fonction de (x, y, z) , comment la différencier et comment l'intégrer sur un chemin, mais on aimerait faire les mêmes types d'opérations sur les champs directement, sans avoir à choisir un système de coordonnées. C'est le but de ce chapitre.

7.2 Déplacement infinitésimal et gradient

7.2.1 Définitions

On considère un champ scalaire $M \mapsto f(M)$. On part d'un point M donné, où le champ vaut donc $f(M)$, et on fait un **déplacement infinitésimal** dans une certaine direction sur une certaine distance infinitésimale. Ce déplacement est noté par un **vecteur déplacement infinitésimal** \overrightarrow{dM} . Le point d'arrivée, infiniment proche du point de départ M est noté $M + \overrightarrow{dM}$. En ce point, le champ a la valeur $f(M + \overrightarrow{dM})$.

Si le champ f est continu, alors $f(M + \overrightarrow{dM}) \approx f(M)$. On note df la différence :

$$df = f(M + \overrightarrow{dM}) - f(M). \quad (7.2)$$

Cette différence, pour un champ continu, est infiniment petite.

Si le champ f est différentiable, on montre qu'il existe un **champ de vecteur** noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$ tel que, pour un déplacement infinitésimal,

$$\boxed{df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM}} \quad (7.3)$$

(Bien sûr, df dépend de M et de \overrightarrow{dM} . Par contre, $\overrightarrow{\text{grad}} f$ ne dépend que de M .)

Cette notion de champ différentiable est la même que la notion de fonction différentiable; réécrivons le raisonnement (7.3) dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: on part d'un point $M = (x, y, z)$ donné où le champ vaut $f(x, y, z)$, et on fait un déplacement infinitésimal

$$\overrightarrow{dM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (\text{en cartésien}). \quad (7.4)$$

Le point d'arrivée, infiniment proche du point de départ, a pour coordonnées $(x + dx, y + dy, z + dz)$ et le champ vaut $f(x + dx, y + dy, z + dz)$ en ce point.

Si la fonction f est continue, alors la différence $df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$ est petite. Cette différence dépend de x, y, z, dx, dy, dz . Si la fonction f est différentiable, alors (voir chapitre précédent)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (7.5)$$

On voit bien que, **en cartésien**, (7.5) avec (7.4) peut se réécrire comme (7.3) à condition de prendre

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{en cartésien}). \quad (7.6)$$

Attention, l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ dans un système de coordonnées donné (par exemple cartésien dans (7.6)) dépend du système de coordonnées choisies, mais **le champ de vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est intrinsèque et ne dépend pas du système de coordonnées : il ne dépend que de la fonction f** . L'expression (7.6) n'est qu'une formule pour effectuer un calcul, la bonne définition du gradient, la définition intrinsèque, est (7.3).

7.2.2 Interprétation du gradient

Supposons que, partant d'un point M , on fasse un pas de longueur infinitésimale ds dans une direction \vec{u} (\vec{u} étant un vecteur de norme 1). On a alors $\overrightarrow{dM} = ds \vec{u}$ et

$$df = (\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot \vec{u}) ds = \|\overrightarrow{\text{grad}} f(M)\| \cos \theta ds, \quad (7.7)$$

où θ est l'angle entre \vec{u} et $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$. On voit donc que si l'on veut maximiser df pour une valeur de ds fixée, il faut prendre $\cos \theta = 1$, c'est-à-dire $\theta = 0$. On voit donc que

Le gradient de f pointe dans la direction où f augmente le plus rapidement

De plus, si on se déplace dans la même direction et dans le même sens que le gradient de f , le taux d'augmentation de f par unité de longueur df/ds est égal à la norme $\|\overrightarrow{\text{grad}} f(M)\|$ du gradient. Ça se comprend facilement rien qu'en regardant la dimension du gradient : si f est le champ de température, en °C, alors le gradient est en °C/m. Si le gradient vaut 3°C/m, cela veut bien dire que la température f augmente de 3°C pour chaque mètre qu'on parcourt dans la direction du gradient.

Si maintenant on prend $\theta = \pi/2$ dans (7.7), on voit que

La variation de f est nulle quand on se déplace perpendiculairement au gradient

Partant d'un point donné, on peut suivre une trajectoire qui est toujours perpendiculaire au gradient. Sur cette trajectoire $df = 0$ et f est constante. En 2D ces courbes s'appellent des **courbes de niveau**. En 3D, on peut définir des surfaces qui sont partout perpendiculaires au gradient; ce sont des **équipotentielles** (cf l'électrostatique). Ainsi, sur une carte de randonnée, la direction dans laquelle ça grimpe le plus est perpendiculaire aux courbes de niveau, et la vitesse à laquelle ça grimpe (la norme du gradient) est proportionnelle à la densité de courbes de niveau.

7.2.3 Exemples et propriétés générales

- Soit $f(M) = OM =$ (distance OM). Partant d'un point M donné, la fonction f augmente le plus rapidement si on s'éloigne en ligne droite de l'origine. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$ est donc dirigé selon le vecteur radial de norme unitaire $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/OM$. Si on se déplace de ds dans cette direction, la fonction f augmente de ds et on a donc $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{e}_r$.
- Soit $f(M) = (OM)^2$. Encore une fois, il est clair que la fonction est dirigée selon \vec{e}_r . Partant d'un point M donné à une distance r de l'origine, la fonction vaut r^2 . Si on se déplace de ds dans la direction \vec{e}_r , la nouvelle valeur de la fonction est $(r + ds)^2 = r^2 + 2r ds$, elle a augmenté de $2r ds$ et donc $\overrightarrow{\text{grad}} f = 2r \vec{e}_r$.
- Soit $f(M) = \phi(OM)$. En généralisant, on trouve $\overrightarrow{\text{grad}} f = \phi'(r) \vec{e}_r$. Remarque : si la fonction ϕ est croissante, le gradient a le même sens que \vec{e}_r . Si la fonction est décroissante, il a le sens opposé.

- La température sur le mur de gauche est 20°C , sur le mur de droite est de 30°C , et la distance entre les deux murs est 5 m. À l'équilibre, selon la loi de Fourier, le gradient de la température est un vecteur uniforme, orienté de gauche à droite de norme 2°C/m .
- Dans un repère Cartésien donné, on considère la fonction définie par $f(M) = \sqrt{x^2 + y^2}$. En utilisant (7.6), on trouve $\overrightarrow{\text{grad}} f = (xe_x + ye_y)/\sqrt{x^2 + y^2} = \overrightarrow{OM}/OM = \overrightarrow{e_r}$ ce qui est normal puisque, en fait, $f(M) = OM$.

Les propriétés des gradients se déduisent des propriétés des différentielles. Soit f et g deux champs scalaires :

- le gradient est une opération linéaire : $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f + \mu \overrightarrow{\text{grad}} g$.
- le gradient est un opérateur de dérivation : $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$
- si ϕ est une fonction réelle ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) et f un champ scalaire, alors $\phi \circ f$ est un autre champ et on trouve $\overrightarrow{\text{grad}}(\phi \circ f) = \phi' \circ f \overrightarrow{\text{grad}} f$.

7.3 Intégration le long d'un chemin

De par sa définition (7.3), on a la relation fondamentale suivante :

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{M} = \int_{\mathcal{C}} df = f(\text{point d'arrivée}) - f(\text{point de départ})} \quad (7.8)$$

pour tout chemin \mathcal{C} .

Pour un champ de vecteurs \overrightarrow{A} quelconque, on peut définir et calculer $\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{M}$ mais le résultat, dépend en général de tout le chemin suivi et pas seulement des points de départ et d'arrivée. Ce n'est que si \overrightarrow{A} **dérive d'un gradient**, c'est-à-dire s'il existe un champ scalaire f tel que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, que le calcul est simple, comme dans l'équation au dessus.

Pour faire le lien avec le chapitre précédent, $\overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{M}$ est une forme différentielle. Ce n'est que si cette forme est exacte (c'est-à-dire si \overrightarrow{A} dérive d'un gradient) que l'intégrale ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

Attention, en physique, on dit souvent « \overrightarrow{A} dérive d'un potentiel ϕ » si $\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$, avec un signe moins. Par exemple, le champ électrique \overrightarrow{E} dérive du potentiel électrostatique V et on a : $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

Chapitre 8

Intégrales de volume et de surface

Pour intégrer une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , on découpe cet intervalle en petits morceaux de taille infinitésimale dx et on somme sur tous ces morceaux $f(x) dx$ avec x pris dans le morceau. Cette définition s'étend à d'autres types d'intégrales :

- Considérons un chemin \mathcal{C} et un champ scalaire $M \mapsto f(M)$. On peut intégrer f sur le chemin en coupant le chemin en petits morceaux de taille infinitésimale dM et en sommant les $f(M) dM$.
- Considérons une surface \mathcal{S} et un champ scalaire f . On définit l'intégrale de f sur la surface en découpant la surface en petits morceaux de surface infinitésimale dS et en sommant les $f(M) dS$ sur tous les morceaux.
- Idem pour les volumes.
- On peut aussi intégrer des champs vectoriels. Au lieu de sommer des nombres, on somme, de la même manière, des vecteurs.

Plutôt que de traiter l'intégration en toute généralité, voyons ici quelques exemples

8.1 Intégration sur un carré

On veut intégrer le champ scalaire $M \mapsto f(M)$ sur un certain carré du plan de côté R .

$$I = \iint_{\text{carré}} f(M) dS \quad (8.1)$$

Première remarque : quand on intègre sur une surface, on met deux signes \int . Quand on intègre sur un volume, on en met trois. Il n'est plus question de mettre des bornes : on intègre sur un domaine (ici, le carré) que l'on indique en indice de l'intégrale.

On doit découper ce carré en petits morceaux de surface infiniment petite dS et sommer sur tous ces morceaux $f(M) dS$. Une manière simple de faire et de choisir un repère en coordonnées cartésiennes (x, y) tel que les angles du carré soient $(0, 0)$, $(0, R)$, $(R, 0)$, (R, R) . Dans ce repère, le point M est repéré par ses coordonnées (x, y) et le champ $f(M)$ s'écrit comme une fonction de deux variables $f(x, y)$. On découpe alors la surface en éléments carrés de longueur dx et de hauteur dy ; l'intégrale I est la somme sur tous les carrés de $f(x, y)$ fois $dS = dx \times dy$.

Pour que l'intégrale (8.1) soit bien définie, il faut que cette somme sur tous les petits carrés ne dépende pas de l'ordre dans laquelle la somme est faite, ce qui n'est pas évident ! Supposons que ce soit le cas. On choisit alors de faire cette somme en considérant d'abord tous les petits carrés d'une ligne horizontale à la hauteur y . La somme sur les carrés de cette ligne fait

$$\left(\text{somme des carrés d'une ligne à la hauteur } y\right) = \int_0^R f(x, y) dx \times dy \quad (8.2)$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur tous les y , ce qui donne

$$I = \int_0^R \left[\int_0^R f(x, y) dx \right] dy. \quad (8.3)$$

On voit donc que l'intégrale de surface sur le carré est la même chose que de faire deux intégrales simples successives sur les deux variables x et y .

On aurait pu commencer par sommer sur les y (c'est-à-dire sur les lignes verticales) ce qui aurait conduit à inverser l'ordre d'intégration. On écrit donc :

$$\iint_{\text{carré}} f(M) dS = \int_0^R \left[\int_0^R f(x, y) dy \right] dx = \int_0^R \left[\int_0^R f(x, y) dx \right] dy \quad (8.4)$$

Remarque : pour une fonction $f(x, y)$ quelconque, il peut arriver que $\int[\int f dx]dy \neq \int[\int f dy]dx$! L'intégrale sur le carré n'est alors pas bien définie... Le théorème de Fubini affirme que si $\int[\int |f| dx]dy$ converge (avec une valeur absolue), alors tout se passe bien, on peut inverser l'ordre d'intégration et écrire (8.4). Si $\int[\int |f| dx]dy = \infty$, l'intégrale de f sur le carré est mal définie et le résultat peut dépendre de l'ordre d'intégration.

8.2 Intégration sur un disque en cartésien

On considère le disque de centre O et de rayon R . On veut calculer sur ce disque :

$$I = \iint_{\text{disque}} f(M) dS \quad (8.5)$$

Comme pour l'intégration sur le carré, on découpe la surface en petits carrés, on somme sur ces carrés, et on fait l'hypothèse que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait la somme.

On commence par découper en coordonnées cartésiennes, et on somme sur tous les carrés à une hauteur y . Comme avant, la somme sur tous ces carrés est une intégrale sur x , mais maintenant **les bornes de cette intégrale dépendent de y !** On trouve aisément :

$$(\text{somme de la ligne } y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx \times dy \quad (8.6)$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur tous les y , ce qui donne

$$\iint_{\text{disque}} f(M) dM = \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx \right] dy = \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy \right] dx. \quad (8.7)$$

Exemple de calcul : $f(M) = 1$. C'est, par définition, la surface πR^2 du disque, et c'est ce que donne le calcul.

En généralisant, on retiendra que **pour intégrer sur une surface quelconque, on peut écrire l'intégrale double comme deux intégrales simples, mais avec des bornes d'intégration plus ou moins compliquées qui dépendent de la surface considérée**. L'ordre dans lequel on intègre n'a pas d'importance si l'intégrale de $|f|$ converge (théorème de Fubini). Si l'intégrale de $|f|$ ne converge pas, le résultat peut dépendre de l'ordre d'intégration.

8.3 Intégration sur un disque d'une fonction du rayon

Le moment d'inertie d'un disque uniforme de centre O et de rayon R est défini comme

$$I = \iint_{\text{disque}} OM^2 dS. \quad (8.8)$$

on peut essayer d'évaluer ce résultat avec (8.7) en prenant la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, mais c'est un peu compliqué. De manière générale, on est souvent amené en physique à calculer des intégrales du type

$$I = \iint_{\text{disque}} \phi(OM) dS, \quad (8.9)$$

pour une fonction $\phi(r)$ quelconque.

Calculer ce genre d'intégrales en cartésien est horrible ; il vaut mieux revenir à la définition et à découper la surface en petites cases mieux adaptées au problème. Ici, on va découper la surface en considérant des anneaux concentriques de petite épaisseur dr découpées en petites cases d'angle $d\theta$ Sur un anneau infinitésimal entre r et $r + dr$, la fonction à intégrer est constante égale à $\phi(r)$. La contribution de l'anneau est donc $2\pi r dr \times \phi(r)$, où $2\pi r dr$ est bien entendu la surface de l'anneau, et il ne reste plus qu'à faire une intégrale sur r :

$$I = \iint_{\text{disque}} \phi(OM) dS = \int_0^R 2\pi r \phi(r) dr. \quad (8.10)$$

On vérifie que si $\phi(r) = 1$ on retrouve bien la surface du disque. Calculer le moment d'inertie est maintenant facile : en prenant $\phi(r) = r^2$, on trouve $2\pi R^4/4$.

8.4 Intégrale gaussienne

On peut calculer l'intégrale gaussienne

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (8.11)$$

en l'écrivant comme une intégrale de surface. En effet, calculons

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} dS = I^2 = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-r^2} dr = \pi. \quad (8.12)$$

La première forme vient d'une décomposition cartésienne en x , y , et la deuxième est une décomposition radiale. D'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (8.13)$$

8.5 Intégrales de volume

Pour les intégrales de volumes, tout fonctionne de la même manière. Si on découpe en cartésien, on écrira

$$\iiint_{\text{région}} f(M) dV = \int dx \int dy \int dz f(x, y, z), \quad (8.14)$$

où l'ordre dans lequel on intègre n'a habituellement pas d'importance (Fubini) et où les bornes sur x , y , z sont plus ou moins compliquées selon la forme de la région.

Si la fonction $f(M)$ est radiale, c'est-à-dire si $f(M) = \phi(OM)$, et qu'on intègre sur une sphère, un raisonnement semblable au cas à deux dimensions donne

$$\iiint_{\text{sphère de rayon } R} \phi(OM) dV = \int_0^R 4\pi r^2 \phi(r) dr \quad (8.15)$$

Chapitre 9

Systèmes de coordonnées

Pour repérer un point M dans l'espace on a besoin de trois nombres appelées coordonnées de ce point. Pour repérer un point dans le plan, il faut deux coordonnées. Il y a plusieurs manières de choisir ces nombres, et donc plusieurs systèmes de coordonnées, mais le nombre de coordonnées ne varie pas.

Dans un système, à chaque coordonnée est associé un vecteur (à x on associe le vecteur \vec{e}_x , à ϕ on associe le vecteur \vec{e}_ϕ , etc.) Ce vecteur est unitaire (sa norme vaut un) et est dirigé *dans la direction dans laquelle se déplace le point M quand on augmente de manière infinitésimale la coordonnée en question.* Comme on va le voir sur les exemples qui suivent, cela signifie que, sauf en cartésien, les vecteurs de base du système de coordonnées dépendent du point courant.

En deux dimensions (dans le plan), on utilise la plupart du temps les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires.

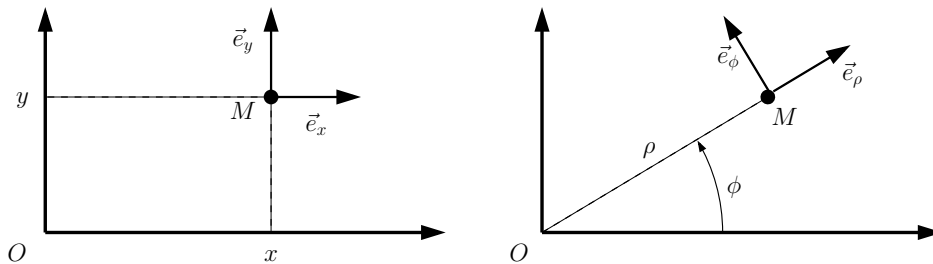


FIG. 9.1 – À gauche : les coordonnées cartésiennes (x, y) . À droite, les coordonnées polaires (ρ, ϕ) .

En trois dimensions, on a les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

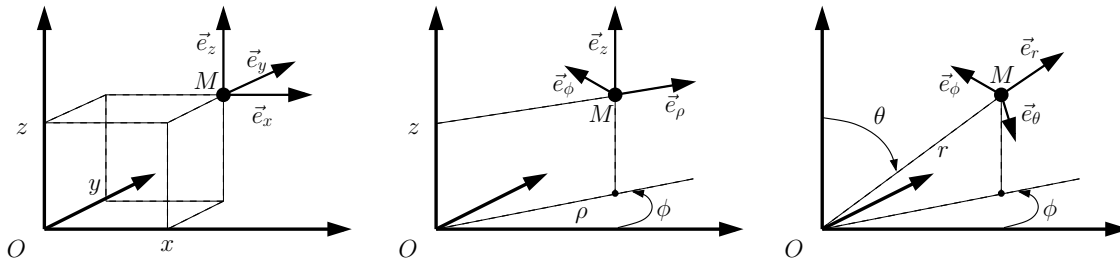


FIG. 9.2 – À gauche : les coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Au milieu : les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) . À droite, les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

Tous ces systèmes de coordonnées ont une propriété importante : les deux ou trois vecteurs de base sont orthonormés directs (de norme 1, perpendiculaires les uns aux autres, et tels que si le pouce de la main droite est selon \vec{e}_1 , que l'index est selon \vec{e}_2 , alors le majeur est selon \vec{e}_3 .)

9.1 Coordonnées cartésiennes

C'est le système le plus simple. On se donne deux ou trois axes perpendiculaires, et les coordonnées x , y (et z) sont les distances algébriques entre l'origine et les projections du point M sur ces axes. Ces coordonnées s'appellent respectivement l'abscisse, l'ordonnée (et la cote).

Les vecteurs de base \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z ne dépendent pas du point choisi. On a

$$\boxed{\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z\vec{e}_z) \quad (\text{cartésiennes})} \quad (9.1)$$

Le déplacement infinitésimal est également extrêmement simple : si x augmente de dx , que y augmente de dy , etc., alors le point M bouge de la quantité

$$\boxed{d\vec{M} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y (+dz \vec{e}_z), \quad (\text{cartésiennes})} \quad (9.2)$$

Une manière de comprendre cette expression est de remarquer que puisque les vecteurs de base sont constants, alors $d\vec{e}_x = d\vec{e}_y (= d\vec{e}_z) = 0$, et on déduit alors (9.2) de (9.1) avec les règles habituelles de la différentiation.

9.2 Coordonnées polaires et cylindriques

En coordonnées polaires (en deux dimensions), le point M est repéré par sa distance à l'origine ρ et par l'angle (orienté) ϕ entre l'axe (Ox) et OM . La distance ρ est positive et, si on veut parcourir tout le plan, il faut faire varier ϕ entre 0 et 2π .

En coordonnées cylindriques (en trois dimensions), on projette le point M sur le plan (Oxy) . Les coordonnées de M sont alors (ρ, ϕ, z) , où ρ et ϕ sont les coordonnées polaires du projeté, et où z est la cote du point M , comme en cartésien.

L'expression du vecteur \vec{OM} ne dépend pas de \vec{e}_ϕ :

$$\boxed{\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho (+z \vec{e}_z) \quad (\text{polaires ou cylindriques})} \quad (9.3)$$

Par contre, on voit aisément que le déplacement infinitésimal en dépend :

$$\boxed{d\vec{M} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi (+dz \vec{e}_z) \quad (\text{polaires ou cylindriques})} \quad (9.4)$$

Là encore, (9.4) se déduit de (9.3) si l'on connaît les différentielles des vecteurs de base :

$$d\vec{e}_\rho = d\phi \vec{e}_\phi \quad d\vec{e}_\phi = -d\phi \vec{e}_\rho. \quad (9.5)$$

(et $d\vec{e}_z = 0$ comme en cartésien, bien sûr.)

Passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes est facile : on lit sur la figure

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi. \quad (9.6)$$

Comme exercice, imaginons que le point M ait une certaine trajectoire dans le plan caractérisée par deux fonctions $\rho(t)$ et $\phi(t)$. Les vecteurs \vec{e}_ρ et \vec{e}_ϕ dépendent aussi du temps et, d'après (9.5),

$$\partial_t \vec{e}_\rho = \dot{\phi} \vec{e}_\phi, \quad \partial_t \vec{e}_\phi = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho. \quad (9.7)$$

On peut alors facilement calculer la vitesse et l'accélération de M :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \rho \vec{e}_\rho, \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi, \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Cette expression est le point de départ de l'étude du mouvement d'une planète autour du soleil, par exemple.

9.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques (en trois dimensions), le point M est repéré par sa distance à l'origine $OM = r$, par l'angle θ (compris entre 0 et π) entre l'axe (Oz) et (OM) , et par l'angle ϕ qui est le même qu'en cylindrique : c'est l'angle entre l'axe (Ox) et (OH) , où H est le projeté de M sur le plan (Oxy) .

L'expression de \vec{OM} ne dépend que de \vec{e}_r :

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{e}_r \quad (\text{sphériques})} \quad (9.9)$$

Par contre, le déplacement infinitésimal dépend des trois vecteurs :

$$\boxed{d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi} \quad (\text{sphérique}) \quad (9.10)$$

Le terme en \vec{e}_ϕ se comprend aisément par les formules de passage entre les coordonnées sphériques et cylindriques :

$$z = r \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta; \quad (9.11)$$

quand ϕ augmente de $d\phi$, le point M bouge de $\rho d\phi \vec{e}_\phi$, comme en cylindrique.

On peut écrire les différentielles des trois vecteurs, mais ça devient compliqué :

$$d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi, \quad d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r + \cos\theta d\phi \vec{e}_\phi, \quad d\vec{e}_\phi = -d\phi(\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta). \quad (9.12)$$

On appelle r le rayon et, en référence avec la géographie, θ la colatitude et ϕ la longitude. En effet, à la surface du globe terrestre, la latitude est l'angle entre l'équateur et le point M , ce qui est égal à $\pi/2 - \theta$; l'angle ϕ est bien le même que la longitude. (Bien sûr, en géographie, on exprime toujours latitude et longitude en degrés plutôt qu'en radians.)

9.4 Coordonnées et gradients

Connaissant le déplacement infinitésimal dans un système de coordonnées, on retrouve immédiatement l'expression du gradient dans ce système. Prenons l'exemple des coordonnées cylindriques : on considère un champ $f(M) = f(\rho, \phi, z)$. On a

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{M} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z). \quad (9.13)$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{cylindrique}). \quad (9.14)$$

Attention à ne pas oublier le $1/\rho$! En polaire, le terme en \vec{e}_z est absent.

De même, en sphérique, en regardant (9.10) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (\text{sphérique}). \quad (9.15)$$

9.5 Coordonnées et intégration de volume

On a vu que pour intégrer un champ $f(M)$ sur un domaine donné, on avait le choix de comment on découpait le domaine d'intégration en petits éléments infinitésimaux. En fait, ce découpage se fait naturellement dans chaque système de coordonnées en considérant la **surface élémentaire** dS (en deux dimensions) ou le **volume élémentaire** dV (en trois dimensions) qui est la surface ou le volume infiniment petit couvert quand chaque coordonnée augmente de sa différentielle. Cette surface (ce volume) est au premier ordre un rectangle (un parallélépipède) dont les côtés sont encore donnés par le déplacement élémentaire dM . On a donc

$$\begin{aligned} dS &= dx dy && (\text{cartésienne deux dimensions}), \\ dS &= \rho d\rho d\phi && (\text{polaire}), \\ dV &= dx dy dz && (\text{cartésienne trois dimensions}), \\ dV &= \rho d\rho d\phi dz && (\text{cylindrique}), \\ dV &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi && (\text{sphérique}). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Ceci permet de calculer les intégrales de surface ou de volume dans chaque système de coordonnées ; pour les surfaces :

$$\iint f(M) dS = \iint f(x, y) dx dy, = \iint f(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi, \quad (9.17)$$

et pour les volumes :

$$\iiint f(M) dV = \iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint f(\rho, \phi, z) \rho d\rho d\phi dz = \iiint f(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi. \quad (9.18)$$

Les intégrales peuvent se calculer dans n'importe quel ordre sans que le résultat change (Fubini) à condition que l'intégrale de $|f|$ converge. (Si ce n'est pas le cas, l'expression $\iiint f(M) dV$ n'a pas de sens...)

Les bornes d'intégration dépendent de la région sur laquelle on intègre, du système de coordonnées et (parfois) de l'ordre dans lequel on intègre.

Terminons par quelques exemples.

– On considère un cylindre de rayon R et de hauteur H et de masse volumique constante σ et on veut calculer son moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie. En cylindrique, la distance à l'axe est ρ et on a simplement

$$I = \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \times \sigma \rho^2 = \sigma \frac{\pi}{2} R^4 H = \frac{m R^2}{2}, \quad (9.19)$$

où $m = \sigma \pi R^2 H$ est la masse totale du cylindre. Le premier ρ dans l'intégrale vient de l'expression de dV en cylindrique, et le ρ^2 est la quantité qu'on intègre.

- On veut maintenant le moment d’inertie par rapport à un axe perpendiculaire à l’axe de symétrie et passant par le centre du cylindre. La distance à l’axe est $\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi + z^2}$ et donc

$$I' = \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \times \sigma(\rho^2 \sin^2 \phi + z^2) = \sigma \left(\pi \frac{R^4}{4} H + \pi R^2 \frac{H^3}{12} \right) = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right). \quad (9.20)$$

- Si on intègre dans le plan sur un disque de rayon R un champ qui ne dépend de la surface ρ au centre du disque, on trouve, en polaire

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \times f(\rho) = \int_0^R 2\pi\rho d\rho f(\rho); \quad (9.21)$$

dans ce cas particulier important, on a pu intégrer sur l’angle ϕ et il ne reste que l’intégrale sur le rayon ρ , avec un préfacteur $2\pi\rho$. C’est la formule du chapitre précédent, qu’on avait interprétée en disant que $2\pi\rho d\rho$ est la surface entre les rayons ρ et $\rho + d\rho$.

- De même, si on intègre sur une sphère (en trois dimensions) une fonction qui ne dépend que de la distance au centre, on obtient

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r^2 \sin \theta f(r) = \int_0^R 4\pi r^2 dr f(r). \quad (9.22)$$

Encore une fois, on a pu intégrer sur les angles pour ne plus avoir qu’une intégrale sur le rayon. La quantité $4\pi r^2 dr$ est le volume compris entre les rayon r et $r + dr$.