ÉCOLE POLYTECHNIQUE **Promotion 2004**

1er CONTRÔLE CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY432

Mardi 25 avril 2006, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des transparents, notes personnelles.
Le problème et l'exercice sont indépendants. **Ils seront rédigés sur des copies séparées.**

Exercice : moment cinétique relatif de particules identiques (7 points sur 20)

On considère un système formé de deux particules identiques de spin s=0 et de masse m, numérotées 1 et 2. On s'intéresse ici aux vecteurs d'état du système tels que

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}) \ , \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ .$$

Ce choix particulier de $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ revient à se placer dans le référentiel du centre de masse des deux particules. On utilisera la décomposition usuelle de $\vec{r}$ en coordonnées sphériques : r désigne la distance au centre, θ la colatitude, et φ l'angle azimuthal.

1. Quelle est la contrainte imposée par le principe de Pauli sur la fonction $\psi(\vec{r})$?

2. On décompose la fonction $\psi(\vec{r})$ sur la base des harmoniques sphériques :

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell,m}(r)\, Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) \ . \tag{1}$$

On rappelle les valeurs des $Y_{\ell,m}$ pour $\ell = 0$ et 1 :

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \qquad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \ , \qquad Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi} \ .$$

En prenant en compte la contrainte trouvée en question 1, répondre aux questions suivantes :

(a) Peut-on avoir $C_{0,0}(r)$ non nul et tous les autres $C_{\ell,m}(r) = 0$?

(b) Peut-on avoir $C_{1,1}(r)$, $C_{1,0}(r)$, $C_{1,-1}(r)$ non nuls et tous les autres $C_{\ell,m}(r) = 0$?

3. Les harmoniques sphériques s'écrivent $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = F_{\ell,m}(\theta)\ e^{im\varphi}$, où la fonction $F_{\ell,m}(\theta)$ vérifie la propriété

$$F_{\ell,m}(\pi - \theta) = (-1)^{\ell+m}\, F_{\ell,m}(\theta) \ .$$

En déduire les valeurs de ℓ et m pouvant conduire à un coefficient $C_{\ell,m}(r)$ non nul dans le développement (1), compte tenu de la contrainte trouvée en question 1.

4. On suppose que les deux particules interagissent entre elles par le potentiel $V(r) = -g/r$, $g > 0$. L'hamiltonien du système s'écrit dans le référentiel du centre de masse

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{g}{r} \ ,$$

où $\mu = m/2$ est la masse réduite et Δ l'opérateur laplacien.

(a) Donner sans calcul les énergies des niveaux liés de H, et leur dégénérescence.

(b) Le spectre en énergie et la dégénérescence des niveaux seraient-ils différents si les particules étaient discernables (tout en gardant la même masse m) ?

5. Indiquer brièvement comment les résultats précédents sont modifiés si les particules ont un spin $s = 1/2$ et qu'on les prépare toutes les deux dans l'état $|+\rangle_z$ (spins polarisés).

Problème : la transformation des neutrinos dans le Soleil (13 points sur 20)

L'énergie solaire est produite par des réactions nucléaires au cours desquelles des neutrinos sont émis. Ces particules neutres, très légères, traversent ensuite le Soleil pour parvenir jusqu'à la Terre. Des expériences récentes ont montré que les interactions des neutrinos leur permettent de se "transformer" au cours de leur passage dans le Soleil. C'est cette transformation, prédite par Mikheyev, Smirnov et Wolfenstein (MSW), que nous allons étudier ici.

On utilise le système d'unités usuel de la physique des particules : énergies en électron-Volt (1eV=1,6$\times 10^{-19}$ J), impulsions en eV/c, et masses en eV/c^2, où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Quelques données numériques utiles sont rassemblées dans le tableau suivant :

$m_2^2 - m_1^2 = 8 \times 10^{-5}$ (eV/c^2)^2	Distance Terre-Soleil : $d = 1{,}5 \times 10^{11}$ m
$\sin^2\theta = 0{,}3$	Rayon du Soleil : $R = 7 \times 10^8$ m
$G = 9{,}0 \times 10^{-44}$ eV·m^3.	Masse du proton : $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
$\hbar = 1{,}054 \times 10^{-34}$ J s	$c = 3{,}0 \times 10^8$ m s^{-1}

1 Oscillations des neutrinos dans le vide

La vitesse des neutrinos produits dans le Soleil est pratiquement égale à la vitesse de la lumière c. Leur énergie E et leur impulsion $\vec{p}$ sont reliées par $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, où m est la masse du neutrino. On suppose dans ce problème qu'il existe seulement deux espèces de neutrinos, de masses respectives m_1 et m_2 avec $m_1 < m_2$.

Soit un neutrino d'impulsion p arrivant sur Terre, vérifiant la condition $p \gg m_2c$. On note E_1 ou E_2 son énergie, suivant qu'il se trouve dans l'état de masse m_1 ou m_2.

1.1. Montrer que la différence d'énergie $\Delta = E_2 - E_1$ vaut à l'ordre dominant en m_1 et m_2 $\Delta \simeq (m_2^2 - m_1^2)c^3/(2p)$.

1.2. Calculer Δ en eV pour

(a) un neutrino d'impulsion $p = 2 \times 10^5$ eV/c,

(b) un neutrino d'impulsion $p = 8 \times 10^6$ eV/c.

Ces valeurs correspondent à deux types de réactions nucléaires se produisant dans le soleil.

1.3. On note $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ les kets correspondant aux deux états de masse m_1 et m_2, pour une impulsion $\vec{p}$ donnée. On les suppose orthonormés. Les neutrinos produits par les réactions nucléaires sont des « neutrinos électroniques ». L'état correspondant, noté $|\nu_e\rangle$, est une combinaison linéaire bien précise de $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$, fixée par les lois de la physique des particules.
Expliquer pourquoi on peut définir $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ de telle façon que cette combinaison linéaire s'écrive sous la forme $|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle$, où θ est compris entre 0 et $\pi/2$.

1.4. Un neutrino est produit à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\nu_e\rangle$ avec l'impulsion $\vec{p}$.

(a) Calculer l'état du système pour $t > 0$. Note : si l'état initial $|\psi(0)\rangle$ est un état propre $|\psi_E\rangle$ de l'hamiltonien d'énergie E, la formule habituelle donnant l'évolution de cet état, $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\psi_E\rangle$, reste vraie dans le cas relativiste étudié ici.

(b) Quelle est la probabilité de détecter le neutrino dans l'état $|\nu_e\rangle$ à un instant t donné ?

1.5. Tous les neutrinos émis par le soleil sont produits initialement dans l'état $|\nu_e\rangle$.

(a) Calculer le nombre de périodes d'oscillation d'un neutrino d'impulsion $p = 2 \times 10^5$ eV/c pendant son trajet entre le Soleil et la Terre. On supposera que les neutrinos se déplacent à la vitesse de la lumière.

(b) La distribution en impulsion des neutrinos solaires est une courbe régulière, essentiellement piquée entre 10^5 et 4×10^5 eV/c. Quelle fraction de ces neutrinos sont détectés sur Terre sous forme de neutrinos électroniques ? On donnera le résultat littéral en fonction de θ, puis sa valeur numérique.

2 Interaction des neutrinos avec la matière

Les neutrinos électroniques traversant la matière interagissent avec les électrons. Il en résulte une énergie potentielle V qui s'ajoute à l'énergie $E_j = \sqrt{p^2c^2 + m_j^2c^4}$, $j = 1, 2$. Dans un milieu homogène, l'opérateur correspondant se met sous la forme

$$\hat{V} = V|\nu_e\rangle\langle\nu_e|$$

où $V = GN_e$, où G étant une constante positive et N_e le nombre d'électrons par unité de volume.

2.1. Que représente l'opérateur $|\nu_e\rangle\langle\nu_e|$? Donner son expression matricielle dans la base $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

2.2. On suppose pour simplifier que le Soleil est constitué de protons et d'électrons en nombres égaux. La masse volumique au cœur du Soleil vaut $\rho = 1{,}5 \times 10^5$ kg·m^{-3}. Calculer la valeur de V en électron-Volt, et comparer aux deux valeurs de Δ calculées à la question 1.2. On vérifiera que $V \ll \Delta$ pour une catégorie de neutrinos, et $V > \Delta$ pour l'autre.

2.3. En utilisant la théorie des perturbations, calculer au premier ordre en V les déplacements $\tilde{E}_1 - E_1$ et $\tilde{E}_2 - E_2$ des énergies propres de l'hamiltonien, pour une impulsion p donnée. On exprimera les résultats en fonction de E_1, E_2, V et θ.

2.4. Nous allons maintenant diagonaliser exactement l'hamiltonien.

(a) Écrire l'hamiltonien sans interaction $\hat{H}_0$ et le potentiel d'interaction $\hat{V}$ dans la base $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$. En déduire que $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ peut se mettre sous la forme :

$$\hat{H} = \frac{E_1 + E_2 + V}{2}\hat{1} - \frac{\sqrt{\Delta^2 + V^2 - 2V\Delta\cos 2\theta}}{2}\begin{pmatrix} \cos 2\tilde{\theta} & \sin 2\tilde{\theta} \\ \sin 2\tilde{\theta} & -\cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

où $\hat{1}$ représente la matrice identité et où $\Delta = E_2 - E_1$. On précisera les valeurs de $\cos 2\tilde{\theta}$ et $\sin 2\tilde{\theta}$ en fonction de θ, V et Δ.

(b) Montrer qu'une base propre de $\hat{H}$ est donnée par

$$|\tilde{\nu}_1\rangle = \cos\tilde{\theta}|\nu_1\rangle + \sin\tilde{\theta}|\nu_2\rangle \qquad |\tilde{\nu}_2\rangle = -\sin\tilde{\theta}|\nu_1\rangle + \cos\tilde{\theta}|\nu_2\rangle$$

et calculer les valeurs propres $\tilde{E}_1$ et $\tilde{E}_2$ associées à ces deux vecteurs.

(c) Dans la limite $V \ll \Delta$, retrouver les énergies obtenues par la théorie des perturbations.

(d) Déterminer $\tilde{\theta}$ (éventuellement en fonction de θ) dans les deux cas limites $V \ll \Delta$ et $V \gg \Delta$.

(e) Tracer la variation de $\tilde{E}_1$ et $\tilde{E}_2$ en fonction de V.

(f) Pour quelle valeur de V la différence $\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1$ est-elle minimale ? Quelle est alors sa valeur ?

2.5. L'effet MSW. Un neutrino est produit au cœur du Soleil dans l'état $|\nu_e\rangle$, puis s'échappe. Au fur et à mesure qu'il quitte le Soleil, il voit la densité électronique N_e décroître. L'hamiltonien $\hat{H}$ dans le référentiel du neutrino dépend donc du temps. On admettra le résultat suivant (approximation adiabatique) : si le temps caractéristique T de variation de l'hamiltonien, c'est-à-dire le temps mis par le neutrino pour sortir du Soleil, est beaucoup plus grand que $\hbar/(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)$, alors la probabilité de rester dans un état propre donné de $\hat{H}$ est pratiquement constante au cours du temps.

(a) Vérifier que la condition $T \gg \hbar/(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)$ est vérifiée pour des neutrinos d'impulsion $p = 8 \times 10^6$ eV/c.

(b) Montrer qu'un neutrino produit au cœur du Soleil dans l'état $|\nu_e\rangle$ parvient sur Terre dans l'état

$$|\psi\rangle = e^{i\phi_1}\cos(\theta - \tilde{\theta})|\nu_1\rangle + e^{i\phi_2}\sin(\theta - \tilde{\theta})|\nu_2\rangle,$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des phases qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement.

(c) Quelle est la probabilité que le neutrino soit détecté sur terre dans l'état $|\nu_e\rangle$?

(d) Expliquer pourquoi on peut moyenner cette probabilité sur ϕ_1 et ϕ_2 et donner cette valeur moyenne dans la limite $V \gg \Delta$ (on utilisera la relation entre $\tilde{\theta}$ et θ trouvée en 2.4d).

(e) Comment cette probabilité se compare-t-elle à celle obtenue dans la première partie ?

(f) Sachant que les flux de neutrinos électroniques sont détectés sur terre avec une précision de 10%, est-il nécessaire de prendre en compte la correction MSW dans la comparaison théorie–expérience pour les neutrinos d'impulsion $p = 8 \times 10^6$ eV/c ?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **Promotion 2004**

1st EXAM OF THE PHYSICS COURSE PHY432

Tuesday April 25, 2006, duration: 2 hours

Authorized documents: course, problem set, copies of the slides, personal notes.
The problem and the exercise are independent. **Please solve them on separate sheets.**

Exercise : relative angular momentum of identical particles (7/20)

Consider a system formed by two identical particles of spin $s=0$ and of mass m. The particles are labeled 1 and 2. We are interested here in state vectors such that

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}) \ , \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ .$$

The particular choice of $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ amounts to work in the center-of-mass frame of the two particles. We shall use the usual expression of $\vec{r}$ in spherical coordinates: r is the distance to the center, θ the colatitude, and φ the azimuthal angle.

1. What is the constraint imposed by the Pauli principle on the function $\psi(\vec{r})$?

2. We expand $\psi(\vec{r})$ in spherical harmonics:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell,m}(r)\, Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \ . \tag{1}$$

We recall the values of $Y_{\ell,m}$ for $\ell = 0$ and 1:

$$Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \qquad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \ , \qquad Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{\pm i\varphi} \ .$$

Taking into account the constraint found in question 1, answer the following questions:

(a) Can one have $C_{0,0}(r)$ non zero and all the other coefficients $C_{\ell,m}(r) = 0$?

(b) Can one have $C_{1,1}(r)$, $C_{1,0}(r)$, $C_{1,-1}(r)$ non zero and all the other coefficients $C_{\ell,m}(r) = 0$?

3. The spherical harmonics can be written $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = F_{\ell,m}(\theta)\ e^{im\varphi}$, where the function $F_{\ell,m}(\theta)$ is such that

$$F_{\ell,m}(\pi - \theta) = (-1)^{\ell+m}\, F_{\ell,m}(\theta) \ .$$

What are the values of ℓ and m that allow for a non-zero coefficient $C_{\ell,m}(r)$ in the expansion (1), taking into account the constraint found in question 1?

4. Suppose that the two particles interact through the potential $V(r) = -g/r$, $g > 0$. The Hamiltonian of the system in the center-of-mass frame is

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{g}{r} \ ,$$

where $\mu = m/2$ is the reduced mass and Δ the Laplacian operator.

(a) Give the values of the energies of the bound levels of $\hat{H}$ and their degeneracies (no calculation is required).

(b) Would the energy spectrum and the level degeneracies be different if the particles were discernible (but still of the same mass m)?

5. Indicate briefly how the above results are modified if the particles have a spin $s = 1/2$, and are both prepared in the state $|+\rangle_z$ (polarized spins).

Problem: the transformation of neutrinos in the Sun (13/20)

Solar energy is produced by nuclear reactions during which neutrinos are emitted. These neutral particles are very light and cross the Sun to reach the Earth. Recent experiments have shown that the interaction of neutrinos with matter allows them to "transform" as they travel through the Sun. This transformation, predicted by Mikheyev, Smirnov and Wolfenstein (MSW), is the subject of the present problem.

We shall use the unit system of particle physics: energies in electron-Volt (1eV=1.6×10^{-19} J), linear momentum in eV/c, and masses in eV/c^2, where c is the speed of light in vacuum. Relevant numerical data are given in the following table:

$m_2^2 - m_1^2 = 8\times10^{-5}$ $(\mathrm{eV}/c^2)^2$	Earth-Sun distance : $d = 1.5\times10^{11}$ m
$\sin^2\theta = 0.3$	Sun radius: $R = 7\times10^8$ m
$G = 9.0\times10^{-44}$ eV·m^3.	Proton mass: $m_p = 1.67\times10^{-27}$ kg
$\hbar = 1.054\times10^{-34}$ J s	$c = 3.0\times10^8$ m s^{-1}

1 Neutrino oscillation in vacuum

The velocity of neutrinos produced in the Sun is close to the speed of light. Their energy E and momentum $\vec{p}$ are related by $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, where m is the neutrino mass. We shall suppose in this problem that there exist only two neutrino species. Their masses are denoted m_1 and m_2, respectively, with $m_1 < m_2$.

Consider a neutrino arriving on Earth, with momentum p such that $p \gg m_2c$. We denote by E_1 or E_2 its energy, depending on whether it is a neutrino of mass m_1 or m_2.

1.1. Show that the energy difference $\Delta = E_2 - E_1$ is $\Delta \simeq (m_2^2 - m_1^2)c^3/(2p)$, at leading order in m_1 and m_2.

1.2. Calculate Δ in eV for

(a) a neutrino of momentum $p = 2\times10^5$ eV/c,

(b) a neutrino of momentum $p = 8\times10^6$ eV/c.

These values correspond to two distinct types of nuclear reactions occurring in the Sun.

1.3. We denote by $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ the kets corresponding to the two states of masses m_1 and m_2, respectively, for a given momentum $\vec{p}$. These kets are orthogonal and normalized. Neutrinos produced in solar nuclear reactions are "electronic neutrinos", denoted $|\nu_e\rangle$. The state $|\nu_e\rangle$ is a precise linear combination of $|\nu_1\rangle$ and $|\nu_2\rangle$, fixed by the laws of particle physics.
Explain why one can define $|\nu_1\rangle$ and $|\nu_2\rangle$ such that $|\nu_e\rangle$ can be written $|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle$, where θ is an angle between 0 and $\pi/2$.

1.4. A neutrino is produced at time $t = 0$ in the state $|\nu_e\rangle$ with momentum $\vec{p}$.

(a) Calculate the state of the neutrino at time $t > 0$. Note: if the initial state $|\psi(0)\rangle$ is an eigenstate $|\psi_E\rangle$ of the Hamiltonian of energy E, the usual expression $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\psi_E\rangle$ giving the time evolution of the state vector is still valid in the relativistic case of interest here.

(b) What is the probability to detect the neutrino in the state $|\nu_e\rangle$ at time t?

1.5. All neutrinos emitted by the Sun are initially produced in the state $|\nu_e\rangle$.

(a) Calculate the number of oscillations of a neutrino of momentum $p = 2\times10^5$ eV/c as it travels from the Sun to the Earth (take the neutrino velocity equal to the speed of light).

(b) The momentum distribution of solar neutrinos is a smooth curve essentially concentrated between 10^5 and 4×10^5 eV/c. Which fraction of neutrinos are detected on Earth as electronic neutrinos? First give the result as a function of θ, and then calculate its numerical value.

2 Interaction of neutrinos with matter

When electronic neutrinos travel through matter, they interact with electrons. The corresponding interaction energy V adds to the mass+kinetic energy $E_j = \sqrt{p^2c^2 + m_j^2c^4}$, $j = 1, 2$. In an homogeneous medium the corresponding operator can be written

$$\hat{V} = V|\nu_e\rangle\langle\nu_e|$$

with $V = GN_e$, where G is a positive constant and N_e the number of electrons per unit volume.

2.1. What does the operator $|\nu_e\rangle\langle\nu_e|$ represent? Give its expression as a matrix in the basis set $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$, as a function of $\cos(2\theta)$ and $\sin(2\theta)$.

2.2. Suppose for simplicity that the Sun is composed only of protons and electrons, in equal number per unit volume. The mass density at the center of the Sun is $\rho = 1.5 \times 10^5$ kg·m^{-3}. Calculate the value of V in electron-Volt, and compare it to the two values of Δ calculated in question 1.2. Check that $V \ll \Delta$ for one category of neutrinos, and $V > \Delta$ for the other one.

2.3. Using perturbation theory calculate at first order in V the shifts $\tilde{E}_1 - E_1$ and $\tilde{E}_2 - E_2$ of the eigenenergies of the Hamiltonian, for a given momentum p. Express the results in terms of E_1, E_2, V and θ.

2.4. We now want to diagonalize the Hamiltonian exactly.

(a) Write the Hamiltonian $\hat{H}_0$ in absence of interaction and the interaction potential $\hat{V}$, in the basis set $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$. Show that the total Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ can be written as:

$$\hat{H} = \frac{E_1 + E_2 + V}{2}\hat{1} - \frac{\sqrt{\Delta^2 + V^2 - 2V\Delta\cos 2\theta}}{2}\begin{pmatrix} \cos 2\tilde{\theta} & \sin 2\tilde{\theta} \\ \sin 2\tilde{\theta} & -\cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

where $\hat{1}$ is the identity matrix and $\Delta = E_2 - E_1$. Give the expression of $\cos 2\tilde{\theta}$ and $\sin 2\tilde{\theta}$ in terms of θ, V and Δ.

(b) Show that an eigenbasis of $\hat{H}$ is given by

$$|\tilde{\nu}_1\rangle = \cos\tilde{\theta}|\nu_1\rangle + \sin\tilde{\theta}|\nu_2\rangle \qquad\qquad |\tilde{\nu}_2\rangle = -\sin\tilde{\theta}|\nu_1\rangle + \cos\tilde{\theta}|\nu_2\rangle$$

and calculate the eigenvalues $\tilde{E}_1$ and $\tilde{E}_2$ associated to these two vectors.

(c) In the limit $V \ll \Delta$, recover the expressions obtained for $\tilde{E}_1$ and $\tilde{E}_2$ using perturbation theory.

(d) Give an approximate value of $\tilde{\theta}$ (possibly as a function of θ) in the two limiting cases $V \ll \Delta$ and $V \gg \Delta$.

(e) Plot $\tilde{E}_1$ and $\tilde{E}_2$ as a function of V.

(f) Give the value of V for which the difference $\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1$ is minimal. What is then the minimal value of $\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1$?

2.5. The MSW effect. Consider a neutrino produced in the center of the Sun in the state $|\nu_e\rangle$. As it travels to the boundary of the Sun, the neutrino sees a decreasing electronic density N_e. Therefore the Hamiltonian $\hat{H}$ in the frame of the neutrino depends on time. We shall admit the following result (adiabatic approximation): if the characteristic time T over which the Hamiltonian varies, i.e. the time needed for the neutrino to get out of the Sun, is much larger than $\hbar/(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)$, then the probability to remain in a given eigenstate of $\hat{H}$ is practically constant as a function of time.

(a) Check that the condition $T \gg \hbar/(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)$ is indeed satisfied for neutrinos with momentum $p = 8 \times 10^6$ eV/c.

(b) Show that a neutrino produced in the center of the Sun in the state $|\nu_e\rangle$ arrives on Earth in the state

$$|\psi\rangle = e^{i\phi_1}\cos(\theta - \tilde{\theta})|\nu_1\rangle + e^{i\phi_2}\sin(\theta - \tilde{\theta})|\nu_2\rangle,$$

where ϕ_1 and ϕ_2 are phases that we shall not determine explicitly.

(c) What is the probability that the neutrino is detected on Earth in the state $|\nu_e\rangle$?

(d) Explain why it is legitimate to average this probability over ϕ_1 and ϕ_2. Give this average value in the limit $V \gg \Delta$ (use the relation found in 2.4d between $\tilde{\theta}$ and θ).

(e) Compare this probability to the one found in the first section of the problem.

(f) The neutrinos fluxes are detected on Earth with a precision of 10%. Is it then necessary to take into account the MSW effect, when comparing theory and experiment for neutrinos of momentum $p = 8 \times 10^6$ eV/c?

Corrigé

Exercice : moment cinétique relatif de particules identiques

1. Les particules sont des bosons et Ψ doit être symétrique par échange de 1 et 2. On doit donc avoir $\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$: ψ doit être paire.

2. (a) Si le coefficient $C_{0,0}(r)$ est le seul non nul, alors $\psi(\vec{r})$ ne dépend que du module r : c'est bien une fonction paire, qui satisfait à la contrainte imposée par le principe de Pauli. Il est donc possible d'avoir comme seul coefficient non nul $C_{0,0}$.

(b) Si les seuls coefficients non nuls sont les $C_{1,m}(r)$, alors

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\sqrt{2} \cos\theta \, C_{1,0}(r) + \sin\theta \left(e^{-i\varphi} C_{1,-1}(r) - e^{i\varphi} C_{1,1}(r) \right) \right) \ .$$

Cette fonction peut-elle être paire ? Non ! En effet, dans le changement $\vec{r} \to -\vec{r}$, r est inchangé, θ est changé en $\pi - \theta$, et φ est changé en $\varphi + \pi$. La fonction $\psi(\vec{r})$ est donc impaire, quels que soient les coefficients $C_{1,m}(r)$.

3. Dans le changement $\vec{r} \to -\vec{r}$, l'harmonique sphérique $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ est changée en

$$Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = F_{\ell,m}(\pi - \theta) \; e^{im(\varphi+\pi)} = (-1)^{\ell+m} F_{\ell,m}(\theta) \; e^{im\varphi} \; (-1)^m = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \ .$$

Le développement de $\psi(-\vec{r})$ est donc :

$$\psi(-\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell,m}(r) \; Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \ .$$

Comme les harmoniques sphériques constituent une base des fonctions de θ, φ, le principe de symétrisation qui impose $\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$ sera satisfait si et seulement si :

$$C_{\ell,m}(r) = 0 \quad \text{si} \quad \ell \text{ impair} \ .$$

Le moment cinétique relatif de deux bosons de spin nul est donc toujours pair : $\ell = 0, 2, \ldots$.

4. (a) Il s'agit du problème de Coulomb : les énergies des états liés sont de la forme $-E_I/n^2$ avec $E_I = \mu g^2/(2\hbar^2)$ et n entier strictement positif. On trouve ce spectre pour la série des états de $\ell = 0$, et on le retrouve ensuite pour toutes les autres valeurs du moment cinétique ℓ.

(b) Si les particules étaient discernables, le spectre serait identique. En effet, pour le potentiel en $1/r$, les valeurs impaires de ℓ conduiront à des énergies propres déjà obtenues pour $\ell = 0$. La dégénérescence d'un niveau repéré par l'entier n serait en revanche modifiée ; pour des particules discernables, on a vu dans le cours que cette dégénérescence vaut $g_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Pour des bosons de spin nul, on trouvera une dégénérescence de 1 pour les niveaux $n = 1$ et 2, de $1 + 5 = 6$ pour les niveaux $n = 3$ et 4, etc., soit $g_n = 2k^2 + 3k + 1$ si $n = 2k + 1$ ou $n = 2k + 2$.

5. Si les particules sont des fermions polarisés, la fonction d'onde spatiale doit être antisymétrique par échange de deux particules. Il faut donc garder uniquement les valeurs impaires de ℓ dans le développement de $\psi(\vec{r})$: le moment cinétique relatif de deux fermions polarisé est toujours impair ($\ell = 1, 3, \ldots$). Pour le problème de Kepler, on retrouvera un spectre en $-E_I/n^2$ avec $E_I = \mu g^2/(2\hbar^2)$, et $n \geq 2$. Il manquera donc le niveau d'énergie $-E_I$ qui apparaîtrait (pour $\ell = 0$) si les particules étaient discernables. La dégénérescence d'un niveau n sera là aussi changée par rapport au cas des particules discernables. Les niveaux $n = 2$ et 3 sont dégénérés 3 fois, les niveaux $n = 4$ et 5 sont dégénérés $3 + 7 = 10$ fois, etc., soit $g_n = 2k^2 + k$ si $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$.

Problème : la transformation des neutrinos dans le Soleil

1 Oscillations des neutrinos dans le vide

1.1. $E \simeq pc + m^2c^3/(2p)$ donc $\Delta \simeq (m_2^2 - m_1^2)c^3/(2p)$.

1.2. Pour $p = 2 \times 10^5$ eV/c, $\Delta \simeq 2 \times 10^{-10}$ eV ; pour $p = 8 \times 10^6$ eV/c, $\Delta \simeq 5 \times 10^{-12}$ eV.

1.3. Les vecteurs de base $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ sont définis à une phase près, qu'on peut choisir de telle sorte que les coefficients du développement de $|\nu_e\rangle$ sur cette base soient réels et positifs. La condition de normalisation $\langle\nu_e|\nu_e\rangle = 1$ donne alors le résultat.

1.4. (a) L'état pour $t > 0$ est $|\psi(t)\rangle = e^{-iE_1t/\hbar}\cos\theta|\nu_1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}\sin\theta|\nu_2\rangle$.

(b) La probabilité $P(t)$ de détecter le neutrino avec la saveur électronique est donnée par

$$P(t) = |\langle\nu_e|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos(\Delta t/\hbar).$$

1.5. (a) Les neutrinos voyagent presque à la vitesse de la lumière et mettent un temps $t = d/c = 500$ s pour venir du Soleil. Avec la valeur de Δ obtenue à la question 1.2 pour $p = 2 \times 10^5$ eV/c, on trouve $t\Delta/\hbar \simeq 1{,}5 \times 10^8$, soit $2{,}4 \times 10^7$ périodes d'oscillation.

(b) Quand on fait varier p dans l'intervalle allant de 10^5 à 4×10^5 eV/c, le terme $\cos(\Delta t/\hbar)$ dans le résultat obtenu en 1.4b se moyenne à zéro et on obtient

$$P = \cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 0.58\ .$$

58% des neutrinos solaires qui nous parviennent devraient être détectés sous forme de neutrinos électroniques.

2 Interaction des neutrinos avec la matière

2.1. L'opérateur $|\nu_e\rangle\langle\nu_e|$ est le projecteur orthogonal sur l'état $|\nu_e\rangle$. Dans la base $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$, son expression s'écrit

$$|\nu_e\rangle\langle\nu_e| = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} (\cos\theta,\ \sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\ \sin\theta \\ \cos\theta\ \sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1-\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

La forme de $\hat{V}$ est donc choisie de telle sorte qu'il n'agisse que sur $|\nu_e\rangle$, et pas sur la variété de neutrino orthogonale à $|\nu_e\rangle$.

Note : En pratique, toutes les variétés de neutrinos interagissent avec la matière par les courants neutres avec la même intensité, et cette interaction ne donne pas de différence d'énergie. En revanche, seuls les neutrinos électroniques interagissent avec les électrons par l'intermédiaire des courants chargés.

2.2. En négligeant la masse de l'électron devant celle du proton, $N_e \simeq \rho/m_p$, donc $V = G\rho/m_p = 8{,}1 \times 10^{-12}$ eV. V est donc beaucoup plus petit que Δ pour des neutrinos d'impulsion 2×10^5 eV/c, mais supérieur à Δ pour des neutrinos d'impulsion 8×10^6 eV/c.

2.3. Au premier ordre de la théorie des perturbations, $\tilde{E}_1 - E_1 = \langle\nu_1|\hat{V}|\nu_1\rangle = V\cos^2\theta$. De même, $\tilde{E}_2 - E_2 = V\sin^2\theta$.

2.4. (a) Dans la base $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$, l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \frac{V}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1-\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{E_1 + E_2 + V}{2} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta - V\cos 2\theta & -V\sin 2\theta \\ -V\sin 2\theta & -\Delta + V\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $\tilde{\theta}$ tel que

$$\cos 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta - V\cos 2\theta}{\sqrt{\Delta^2 + V^2 - 2V\Delta\cos 2\theta}} \qquad \sin 2\tilde{\theta} = \frac{-V\sin 2\theta}{\sqrt{\Delta^2 + V^2 - 2V\Delta\cos 2\theta}}$$

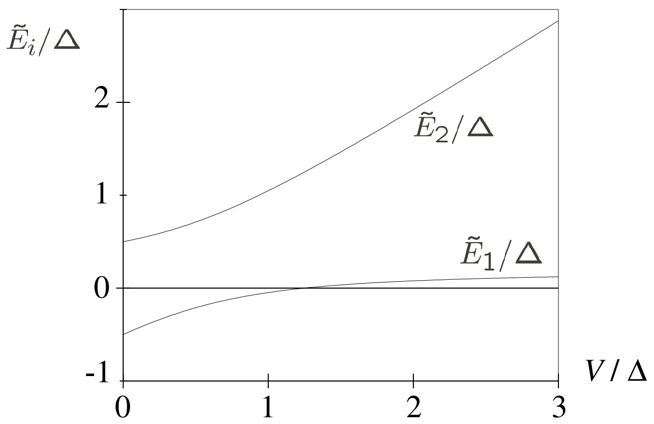

FIG. 1 – Tracé des énergies $\tilde{E}_i$ en fonction de V. On a soustrait l'énergie constante $(E_1+E_2)/2$.

pour retrouver le résultat demandé.

(b) Il est immédiat de vérifier que les vecteurs $|\tilde{\nu}_i\rangle$, $i=1,2$ sont bien états propres de $\hat{H}$. Les énergies propres sont

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= \frac{1}{2}\left(E_1+E_2+V-\sqrt{\Delta^2+V^2-2V\Delta\cos 2\theta}\right)\\ \tilde{E}_2 &= \frac{1}{2}\left(E_1+E_2+V+\sqrt{\Delta^2+V^2-2V\Delta\cos 2\theta}\right)\end{aligned}$$

(c) En développant au premier ordre en V, on retrouve le résultat de la théorie de perturbations :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &\simeq \frac{1}{2}\left(E_1+E_2+V-\Delta\left(1-\frac{V}{\Delta}\cos 2\theta\right)\right)=E_1+\frac{V}{2}(1+\cos 2\theta)\\ \tilde{E}_2 &\simeq \frac{1}{2}\left(E_1+E_2+V+\Delta\left(1-\frac{V}{\Delta}\cos 2\theta\right)\right)=E_2+\frac{V}{2}(1-\cos 2\theta)\end{aligned}$$

(d) Si $V\ll\Delta$, on trouve $\cos 2\tilde{\theta}\simeq 1$ et $\sin 2\tilde{\theta}\simeq -V/\Delta\ll 1$, soit $\tilde{\theta}\simeq 0$.
Si $V\gg\Delta$, on trouve $\cos 2\tilde{\theta}\simeq-\cos 2\theta$ et $\sin 2\tilde{\theta}\simeq-\sin 2\theta$, soit $2\tilde{\theta}\simeq 2\theta\pm\pi$ ou encore $\tilde{\theta}\simeq\theta\pm(\pi/2)$.

(e) La variation de $\tilde{E}_1$ et $\tilde{E}_2$ en fonction de V est donnée en figure 1.

(f) La différence d'énergie entre les niveaux est $\sqrt{\Delta^2+V^2-2V\Delta\cos 2\theta}$. Elle est minimale pour $V=\Delta\cos 2\theta$. Pour cette valeur de V, la différence d'énergie vaut $\tilde{E}_2-\tilde{E}_1=\Delta\sin 2\theta$.

2.5. (a) La valeur minimale de $\tilde{E}_2-\tilde{E}_1$ est $\Delta\sin 2\theta\sim 4\times 10^{-12}$ eV. On obtient donc $\hbar/(\tilde{E}_2-\tilde{E}_1)<2\times 10^{-4}$ s, bien inférieur au temps de traversée du Soleil, environ 2 s.

(b) Lors de sa production au cœur du soleil, le neutrino est dans l'état neutrino électronique $|\nu_e\rangle$, qu'on peut décomposer sur la base propre de l'hamiltonien en ce point $\{|\tilde{\nu}_i\rangle\}$, $i=1,2$:

$$|\nu_e\rangle=\langle\tilde{\nu}_1|\nu_e\rangle|\tilde{\nu}_1\rangle+\langle\tilde{\nu}_2|\nu_e\rangle|\tilde{\nu}_2\rangle=\cos(\theta-\tilde{\theta})|\tilde{\nu}_1\rangle+\sin(\theta-\tilde{\theta})|\tilde{\nu}_2\rangle\ .$$

L'énoncé précise que l'approximation adiabatique est valable. La base propre de l'hamiltonien va passer progressivement de $\{|\tilde{\nu}_i\rangle\}$ à $\{|\nu_i\rangle\}$ lors de la sortie du neutrino du soleil. D'après l'approximation adiabatique, les modules des coefficients du développement de $|\psi\rangle$ sur cette base ne vont pas changer et on aura donc pour le neutrino sorti du soleil :

$$|\psi\rangle=e^{i\phi_1}\cos(\theta-\tilde{\theta})|\nu_1\rangle+e^{i\phi_2}\sin(\theta-\tilde{\theta})|\nu_2\rangle,$$

où les phases ϕ_1 et ϕ_2 sont *a priori* inconnues.

(c) La probabilité de détecter le neutrino sur Terre dans l'état $|\nu_e\rangle$ vaut

$$P = |\langle \nu_e|\psi\rangle|^2 = \left| e^{i\phi_1} \cos\theta \cos(\theta - \tilde{\theta}) + e^{i\phi_2} \sin\theta \sin(\theta - \tilde{\theta}) \right|^2$$

soit en développant

$$P = \cos^2\theta \cos^2(\theta - \tilde{\theta}) + \sin^2\theta \sin^2(\theta - \tilde{\theta}) + 2\cos(\phi_1 - \phi_2)\cos\theta\cos(\theta - \tilde{\theta})\sin\theta\sin(\theta - \tilde{\theta}) \ .$$

(d) On a vu dans la première partie que les phases ϕ_1 et ϕ_2 sont très grandes et varient vite avec l'impulsion du neutrino. Ceci permet de moyenner sur ϕ_1 et ϕ_2. Il vient

$$P = \cos^2(\theta - \tilde{\theta})\cos^2\theta + \sin^2(\theta - \tilde{\theta})\sin^2\theta \ .$$

Dans la limite $V \gg \Delta$, on a vu que $\tilde{\theta} = \theta \pm \pi/2$. La probabilité vaut dans cette limite $\sin^2\theta$.

(e) La probabilité de détecter le neutrino sous forme électronique est réduite à $\sin^2\theta = 0.3$ par l'effet MSW, alors qu'on avait trouvé dans la première partie la probabilité $\cos^4\theta + \sin^4\theta \simeq 0.58$ en absence d'effet MSW. Il s'agit d'une modification importante.

(f) Avec une précision de l'ordre de 10% sur la mesure des flux de neutrinos, on peut sans aucun doute distinguer entre les deux prédictions avec et sans effet MSW.

Les données expérimentales confirment l'existence de cet effet pour les neutrinos énergétiques $p \sim 8 \times 10^6 \text{eV}/c$. En revanche l'effet est négligeable pour les neutrinos moins énergétiques $p \sim 2 \times 10^5 \text{eV}/c$; en effet, on a dans ce cas $V \ll \Delta$, soit $\tilde{\theta} \sim 0$. La probabilité de détecter ce type de neutrino sur Terre sous forme électronique n'est pratiquement pas modifée par l'effet MSW.

Pour en savoir plus :

– Pour les résultats expérimentaux les plus récents : SNO Collaboration, Phys. Rev. C **72**, 055502 (2005) [nucl-ex/0502021].
– Pour un exposé théorique très clair du sujet : H. A. Bethe, Phys. Rev. Lett. **56**, 1305 (1986).
– Pour approfondir : M. Fukugita, T. Yanagida, *Physics of Neutrinos*, Springer, 2003.