

CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY-432

Mardi 23 avril 2002

Durée : 2 heures

Documents autorisés : cours et recueil de problèmes, notes personnelles

Les horloges atomiques

On s'intéresse au niveau d'énergie fondamental de l'électron externe d'un atome alcalin (rubidium, césium,...). Le noyau atomique a un spin s_N ($s_N = 3/2$ pour ^{87}Rb , $s_N = 7/2$ pour ^{133}Cs), auquel est associé un moment magnétique $\vec{\mu}_N$. Comme pour l'atome d'hydrogène, ce niveau fondamental est clivé par l'interaction entre le moment magnétique de l'électron externe $\vec{\mu}_e$ et le moment magnétique du noyau $\vec{\mu}_N$.

Ce clivage du niveau fondamental permet de réaliser des horloges atomiques de grande précision dont les applications sont multiples : système G.P.S., mesure de constantes physiques,...

Les trois parties sont indépendantes.

Dans tout le problème, les effets liés aux électrons de cœur seront négligés.

1 Le clivage hyperfin du niveau fondamental

1. Donner la dégénérescence du niveau fondamental si on néglige l'effet de l'interaction magnétique entre le noyau et l'électron de valence. On notera

$$|m_e; m_N\rangle = |\text{électron} : s_e = 1/2, m_e\rangle \otimes |\text{noyau} : s_N, m_N\rangle$$

une base de l'espace du spin total (électron externe + noyau).

2. On prend maintenant en compte l'interaction entre le moment magnétique de l'électron $\vec{\mu}_e$ et le moment magnétique du noyau $\vec{\mu}_N$. Comme pour l'atome d'hydrogène, on peut écrire l'hamiltonien correspondant (restreint au niveau fondamental) :

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar^2} \hat{S}_e \cdot \hat{S}_N ,$$

où A a la dimension d'une énergie, et où \hat{S}_e et \hat{S}_N désignent respectivement les opérateurs spin de l'électron et du noyau. On va chercher les énergies propres de cet hamiltonien.

- (a) On introduit les opérateurs $\hat{S}_{e,\pm} = \hat{S}_{e,x} \pm i\hat{S}_{e,y}$ et $\hat{S}_{N,\pm} = \hat{S}_{N,x} \pm i\hat{S}_{N,y}$. Montrer que

$$\hat{H} = \frac{A}{2\hbar^2} \left(\hat{S}_{e,+} \hat{S}_{N,-} + \hat{S}_{e,-} \hat{S}_{N,+} + 2\hat{S}_{e,z} \hat{S}_{N,z} \right) .$$

- (b) Montrer que les deux états $|m_e = 1/2; m_N = s_N\rangle$ et $|m_e = -1/2; m_N = -s_N\rangle$ sont états propres de \hat{H} , avec une valeur propre que l'on précisera.

- (c) Déterminer l'action de \hat{H} sur l'état de spin $|m_e = 1/2; m_n\rangle$ avec $m_n \neq s_n$.
 Déterminer l'action de \hat{H} sur l'état de spin $|m_e = -1/2; m_n\rangle$ avec $m_n \neq -s_n$.
- (d) En déduire que la recherche des énergies propres de \hat{H} se ramène à la diagonalisation de matrices 2×2 du type :

$$\frac{A}{2} \begin{pmatrix} m_n & \sqrt{s_n(s_n + 1) - m_n(m_n + 1)} \\ \sqrt{s_n(s_n + 1) - m_n(m_n + 1)} & -(m_n + 1) \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que \hat{H} clive le niveau fondamental en deux sous-niveaux d'énergies $E_1 = E_0 + A s_n/2$ et $E_2 = E_0 - A(1 + s_n)/2$. Retrouver le cas particulier de l'atome d'hydrogène.
4. Quelles sont les dégénérescences des deux sous-niveaux E_1 et E_2 ?
5. Montrer que les états d'énergie E_1 et E_2 sont des états propres du carré du spin total $\hat{S}^2 = (\hat{S}_e + \hat{S}_n)^2$. Indiquer le spin s correspondant.

2 La fontaine atomique

Les atomes sont préparés dans le niveau d'énergie E_1 , puis lancés vers le haut (figure 1a). A la montée et à la descente, ils traversent une cavité dans laquelle on injecte une onde électromagnétique de pulsation ω , proche de $\omega_0 = (E_1 - E_2)/\hbar$. On détecte à la fin de la descente le nombre d'atomes ayant basculé du niveau E_1 vers le niveau E_2 . Dans toute la suite, le mouvement des atomes dans l'espace (chute libre) est traité classiquement. Seule l'évolution de leur état interne est traitée quantiquement.

Pour simplifier, on ne considère qu'un seul état dans le sous-niveau d'énergie E_1 . Cet état (noté $|1\rangle$) est couplé par l'onde électromagnétique à un seul état (noté $|2\rangle$) du sous-niveau E_2 . On fixe par convention l'origine des énergies en $(E_1 + E_2)/2$, soit $E_1 = \hbar\omega_0/2$, $E_2 = -\hbar\omega_0/2$. On suppose que la durée ϵ de la traversée de la cavité est très brève et que cette traversée fait évoluer le vecteur d'état de l'atome de la manière suivante :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle \longrightarrow |\psi(t + \epsilon)\rangle = \alpha'|1\rangle + \beta'|2\rangle$$

avec :
$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\omega t} \\ -ie^{i\omega t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

1. L'état initial de l'atome est $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. On considère un aller-et-retour de durée T , comportant la traversée de la cavité entre l'instant $t = 0$ et $t = \epsilon$, un temps d'évolution libre de durée $T - 2\epsilon$, et une deuxième traversée de la cavité entre les instants $T - \epsilon$ et T . En prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$, montrer que l'état de l'atome après cet aller-et-retour est donné par :

$$|\psi(T)\rangle = ie^{-i\omega T/2} \sin((\omega - \omega_0)T/2) |1\rangle - ie^{i\omega T/2} \cos((\omega - \omega_0)T/2) |2\rangle \quad (1)$$

2. Donner la probabilité $P(\omega)$ pour trouver un atome dans l'état $|2\rangle$ à l'instant T . Déterminer la demi-largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ de $P(\omega)$ autour de la résonance $\omega = \omega_0$. Que vaut $\Delta\omega$ pour une fontaine de 1 mètre de haut ? On rappelle l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.
3. On envoie un paquet de N atomes ($N \gg 1$). Après l'aller-et-retour du paquet, chaque atome est dans l'état donné en eq. (1). On mesure séparément les nombres d'atomes dans les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, que l'on note N_1 et N_2 (avec $N_1 + N_2 = N$). Quelle est la distribution statistique des variables aléatoires N_1 et N_2 ? Donner leur moyenne $\langle N_i \rangle$ et leur écart-type ΔN_i . On posera $\phi = (\omega - \omega_0)T/2$ et on exprimera les résultats en fonction de $\cos \phi$, $\sin \phi$ et N .
4. On déduit l'écart à résonance $|\omega - \omega_0|$ à l'aide de $\cos((\omega - \omega_0)T) = \langle N_2 - N_1 \rangle / N$. Justifier cette formule. Évaluer l'incertitude $\Delta|\omega - \omega_0|$ introduite par le caractère aléatoire de la variable $N_2 - N_1$. Montrer que cette incertitude dépend de N , mais pas de ϕ .

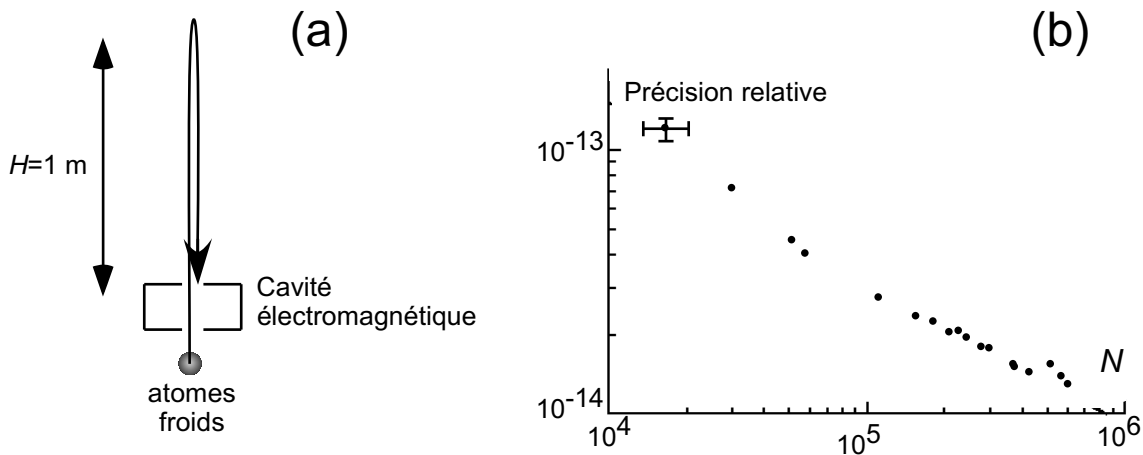


FIG. 1 – (a) Schéma de principe d'une horloge à fontaine atomique, utilisant des atomes refroidis par laser. (b) Précision relative $\Delta\omega/\omega$ d'une horloge à fontaine atomique, en fonction du nombre d'atomes N envoyés dans chaque paquet.

5. On a représenté sur la figure 1b la précision d'une fontaine atomique en fonction du nombre N d'atomes par paquet. Cette variation avec N est-elle en accord avec les résultats précédents ?

3 Applications des horloges atomiques

- Le système GPS.** Ce système utilise 24 satellites en orbite terrestre à 20 000 km d'altitude, contenant chacun une horloge atomique. Chaque satellite émet à intervalles réguliers un signal électromagnétique composé d'un « top » d'horloge et de l'indication de sa position. Un récepteur terrestre (qui ne dispose pas d'une horloge atomique) détecte les signaux émis par plusieurs satellites et compare les instants d'arrivée des différents « tops » d'horloge.
 - Quel nombre minimal de satellites doit-on voir à un instant donné pour se localiser en latitude, en longitude, et en altitude à la surface du globe terrestre ?
 - On suppose que la précision relative de chaque horloge est $\Delta\omega/\omega = 10^{-13}$ et que ces horloges sont synchronisées toutes les 24 heures. Quel est l'ordre de grandeur de la précision de la localisation juste avant une nouvelle synchronisation des horloges ?
- La dérive des constantes fondamentales.** Il existe des modèles cosmologistes qui prédisent une très faible variation dans le temps de la constante de structure fine $\alpha = e^2/(\hbar c) \sim 1/137$. Pour tester cette hypothèse, on peut comparer deux horloges atomiques, l'une utilisant des atomes de rubidium ($Z = 37$), l'autre des atomes de césium ($Z = 55$). En effet, on montre que le clivage hyperfin d'un atome alcalin varie approximativement comme :

$$E_1 - E_2 = \hbar\omega_0 \propto \alpha^2 \left(1 + \frac{11}{6}(\alpha Z)^2 \right) \quad \text{pour} \quad (\alpha Z)^2 \ll 1$$

En comparant pendant un an une horloge à rubidium et une autre à césium, on n'a détecté aucune variation significative du rapport $R = \omega_0^{(\text{Cs})}/\omega_0^{(\text{Rb})}$. Plus précisément, la variation relative $|\delta R|/R$ est inférieure à l'incertitude de mesure, estimée à 3×10^{-15} . Quelle borne supérieure peut-on mettre sur le taux de variation relatif $|\dot{\alpha}/\alpha|$?

Corrigé

1 Le clivage hyperfin du niveau fondamental

1. L'espace de Hilbert correspondant au niveau fondamental est le produit tensoriel de l'espace associé au spin de l'électron et de l'espace associé au spin du noyau. Sa dimension d est donc le produit des dimension : $d = 2 \times (2s_n + 1)$.

2. (a) En utilisant

$$\hat{S}_{e,x} = \frac{1}{2} (\hat{S}_{e,+} + \hat{S}_{e,-}) \quad \hat{S}_{e,y} = \frac{i}{2} (\hat{S}_{e,-} - \hat{S}_{e,+})$$

et une relation similaire pour $\hat{S}_{n,x}$ et $\hat{S}_{n,y}$, on arrive au résultat annoncé.

(b) L'action de $\hat{S}_{e,+}\hat{S}_{n,-}$ et de $\hat{S}_{e,-}\hat{S}_{n,+}$ sur $|m_e = 1/2; m_n = s_n\rangle$ donne le vecteur nul. Il en va de même sur $|m_e = -1/2; m_n = -s_n\rangle$. Seul contribue donc le terme $\hat{S}_{e,z}\hat{S}_{n,z}$ et on trouve :

$$\begin{aligned} \hat{H} |m_e = 1/2; m_n = s_n\rangle &= \frac{As_n}{2} |m_e = 1/2; m_n = s_n\rangle \\ \hat{H} |m_e = -1/2; m_n = -s_n\rangle &= \frac{As_n}{2} |m_e = -1/2; m_n = -s_n\rangle \end{aligned}$$

(c) On trouve :

$$\begin{aligned} \hat{H} |1/2; m_n\rangle &= \frac{Am_n}{2} |1/2; m_n\rangle + \frac{A}{2} \sqrt{s_n(s_n + 1) - m_n(m_n + 1)} |-1/2; m_n + 1\rangle \\ \hat{H} |-1/2; m_n\rangle &= -\frac{Am_n}{2} |-1/2; m_n\rangle + \frac{A}{2} \sqrt{s_n(s_n + 1) - m_n(m_n - 1)} |1/2; m_n - 1\rangle \end{aligned}$$

(d) On déduit de la question précédente que le sous-espace \mathcal{E}_{m_n} de dimension 2 engendré par $|1/2; m_n\rangle$ et $|-1/2; m_n + 1\rangle$ est globalement stable sous l'action de \hat{H} . La recherche des états propres de \hat{H} consiste donc à diagonaliser la série de matrices 2×2 correspondant à son action à l'intérieur de ces sous-espaces. La matrice de la restriction de \hat{H} au sous-espace \mathcal{E}_{m_n} est bien celle donnée dans l'énoncé.

3. Les valeurs propres des matrices données dans l'énoncé sont en fait indépendantes de m_n et valent $As_n/2$ et $-A(1 + s_n)/2$. Dans le cas particulier $s_n = 1/2$ (atome d'hydrogène), ces deux valeurs propres sont $A/4$ et $-3A/4$.

4. Il y a $2s_n$ matrices 2×2 à diagonaliser, donnant chacune un vecteur propre associé à $As_n/2$ et un vecteur propre associé à $-A(1 + s_n)/2$. Par ailleurs, on a trouvé deux vecteurs propres indépendants, $|1/2, s_n\rangle$ et $|-1/2, -s_n\rangle$, associés à la valeur propre $As_n/2$. On a donc finalement :

$$\begin{aligned} As_n/2 &\quad \text{dégénérée } 2s_n + 2 \text{ fois} \\ -A(1 + s_n/2) &\quad \text{dégénérée } 2s_n \text{ fois} \end{aligned}$$

On retrouve bien la dimension totale du sous-espace associé au niveau fondamental, $2(2s_n + 1)$.

5. Le carré du spin total s'écrit :

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_e^2 + \hat{S}_n^2 + 2\hat{S}_e \cdot \hat{S}_n = \hat{S}_e^2 + \hat{S}_n^2 + \frac{2\hbar^2}{A} \hat{H}$$

Les opérateurs \hat{S}_e^2 et \hat{S}_n^2 sont proportionnels à l'identité et valent respectivement :

$$\hat{S}_e^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \quad \hat{S}_n^2 = \hbar^2 s_n(s_n + 1) .$$

Un état propre de \hat{H} est donc état propre de \hat{S}^2 . Plus précisément, un état associé pour \hat{H} à la valeur propre $As_{\mathbf{n}}/2$ est état propre de \hat{S}^2 avec la valeur propre $\hbar^2(s_{\mathbf{n}}+1/2)(s_{\mathbf{n}}+3/2)$, soit un spin total $s = s_{\mathbf{n}} + 1/2$. Un état associé pour \hat{H} à la valeur propre $-A(1+s_{\mathbf{n}})/2$ est état propre de \hat{S}^2 avec la valeur propre $\hbar^2(s_{\mathbf{n}}-1/2)(s_{\mathbf{n}}+1/2)$, soit un spin total $s = s_{\mathbf{n}} - 1/2$.

2 La fontaine atomique

1. Dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, le vecteur d'état final de l'atome s'obtient par simple produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\omega T} \\ -ie^{i\omega T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 T/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 T/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la traversée de la cavité à l'instant 0, à une évolution libre entre 0 et T , puis une seconde traversée de la cavité à l'instant T . On trouve ainsi le vecteur d'état indiqué dans l'énoncé.

2. On trouve $P(\omega) = |\beta'|^2 = \cos^2((\omega - \omega_0)T/2)$. Cette probabilité vaut 1 si on est strictement à résonance ($\omega = \omega_0$). Elle vaut 1/2 si $\omega = \omega_0 \pm \pi/(2T)$. Pour un mouvement de chute libre montant à une hauteur $H = 1$ m, puis revenant à son point de départ, on a $T = 2\sqrt{2H/g}$, soit $T = 0,9$ s, ou encore $\Delta\omega = 1,7$ s⁻¹.
3. La détection de chaque atome donne le résultat E_1 avec une probabilité $\sin^2 \phi$ et E_2 avec une probabilité $\cos^2 \phi$. Comme les atomes sont indépendants, la distribution des variables aléatoires N_1 et N_2 est binomiale. On a donc :

$$\langle N_1 \rangle = N \sin^2 \phi \quad \langle N_2 \rangle = N \cos^2 \phi \quad \Delta N_1 = \Delta N_2 = \sqrt{N} |\cos \phi \sin \phi|$$

4. On a effectivement $\langle N_2 - N_1 \rangle / N = \cos 2\phi = \cos((\omega - \omega_0)T)$. Les fluctuations sur la variable $N_2 - N_1$ induisent une fluctuation sur la détermination de $\omega - \omega_0$, les deux fluctuations étant reliées par :

$$\frac{\Delta(N_2 - N_1)}{N} = 2 |\sin(2\phi)| \Delta\phi$$

Puisque $\Delta(N_2 - N_1) = 2 \Delta N_2 = \sqrt{N} |\sin 2\phi|$, on déduit $\Delta\phi = 1/(2\sqrt{N})$, ou encore :

$$\Delta|\omega - \omega_0| = \frac{1}{2T\sqrt{N}}$$

La précision est d'autant meilleure que T est long et que N est grand.

5. On constate bien sur la figure 1b que la précision de l'horloge est meilleure quand N croît, avec une variation en $N^{-1/2}$. Pour $N = 10^6$ et $T = 0,9$ s, la formule ci-dessus donne $\Delta\omega = 5,6 \times 10^{-4}$ s. La fréquence hyperfine du césium est $\omega_0 = 2\pi \times 9,2$ GHz, ce qui correspond bien à $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-14}$. Ces données expérimentales sont extraites de l'article : G. Santarelli *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4619 (1999).

3 Applications des horloges atomiques

1. Le système GPS.

- (a) Il faut voir au moins quatre satellites. Avec deux satellites, la différence des instants de réception t_1 et t_2 des signaux émis par les deux satellites localisent l'observateur sur une surface (par exemple, le plan médiateur du segment joignant les deux satellites si $t_1 = t_2$); trois satellites localisent l'observateur sur une ligne, et le quatrième satellite permet de lever toute ambiguïté (on exclut que l'observateur puisse être à l'intérieur du globe terrestre ou en orbite lointaine).

- (b) Un satellite émet un signal à un instant t_0 . Ce signal est reçu par un observateur situé à une distance D à l'instant $t_1 = t_0 + D/c$. Si l'horloge du satellite n'est pas à l'heure, le signal n'est pas émis à l'instant t_0 , mais à un instant légèrement différent t'_0 . L'observateur, qui dispose d'une référence de temps correcte via un autre satellite, interprète le temps $t_1 - t'_0$ comme une distance $D' = c(t_1 - t'_0)$, et il fait donc une erreur $c(t'_0 - t_0)$ sur sa position. Pour une horloge de précision relative 10^{-13} , le retard ou l'avance typique au bout de 24 heures (=86 000 secondes) est 86000×10^{-13} s, soit une erreur de positionnement de 2,5 mètres.

Notons que les horloges atomiques embarquées dans les satellites GPS sont notablement moins performantes que les fontaines à atomes froids des laboratoires au sol.

2. **La dérive des constantes fondamentales.** En utilisant l'expression de l'énoncé pour la dépendance en α des fréquences ω_{Cs} et ω_{Rb} , on trouve que la variation éventuelle du rapport R est reliée à la variation de α par :

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \left[\frac{11\alpha^2}{3} \frac{Z_{\text{Cs}}^2 - Z_{\text{Rb}}^2}{(1 + 11(\alpha Z_{\text{Rb}})^2/6) (1 + 11(\alpha Z_{\text{Cs}})^2/6)} \right]$$

La quantité [...] vaut 0,22, ce qui conduit à une majoration de $\dot{\alpha}/\alpha$ de $1,4 \times 10^{-14}/\text{an}$, soit $4,3 \times 10^{-22}/\text{seconde}$.

Remarque : une détermination plus précise de la dépendance en α de ω_{Cs} , pour lequel l'approximation $Z\alpha \ll 1$ n'est pas très bonne, conduit à [...] = 0,45 (voir J. D. Prestage, R. L. Tjoelker, and L. Maleki, Phys. Rev. Lett. **74**, 3511 (1995)).