

Le couplage de deux spins 1/2

La raie à 21 cm de l'atome d'hydrogène

Les corrélations Einstein-Podolsky-Rosen

Chapitre 13, paragraphes 1 et 3
Chapitre 14, paragraphe 1

1.

L'addition de deux spins 1/2

Système composé :

électron + proton \longrightarrow atome d'hydrogène
neutron + proton \longrightarrow noyau de deutérium

On va s'intéresser ici à $E_{\text{spin}} = E_{\text{spin}}^{(a)} \otimes E_{\text{spin}}^{(b)}$: espace de dimension 4

$\{ |a : \pm\rangle \}$ $\{ |b : \pm\rangle \}$

L'opérateur spin total

$$\vec{\hat{S}} = \vec{\hat{S}}_a + \vec{\hat{S}}_b = \vec{\hat{S}}_a \otimes \hat{1}_b + \hat{1}_a \otimes \vec{\hat{S}}_b$$

\longrightarrow observable de moment cinétique : $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$

Montrons que les résultats possibles lors d'une mesure de S^2 et S_z sont

$$\hat{S}^2 : \hbar^2 s(s+1) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} s = 1 & \hat{S}_z : -\hbar, 0, +\hbar \\ & m = -1, 0, +1 \\ s = 0 & \hat{S}_z : 0 \quad m = 0 \end{array} \right.$$

2.

La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

(niveau fondamental)

$\vec{\mu}_e$ $\vec{\mu}_p$

r

$$\vec{\mu}_e = \frac{-q}{m_e} \vec{S}_e \qquad \vec{\mu}_p = 2.79 \frac{q}{m_p} \vec{S}_p$$

Le niveau fondamental de l'atome d'hydrogène

Espace des états pour l'électron : $E_{\text{externe}}^{(e)} \otimes E_{\text{spin}}^{(e)}$
 pour le proton : $E_{\text{externe}}^{(p)} \otimes E_{\text{spin}}^{(p)}$

De l'espace des états total, on ne garde que le niveau fondamental :

$$\underline{E_{\text{externe}}^{(e)}} \otimes E_{\text{spin}}^{(e)} \otimes \underline{E_{\text{externe}}^{(p)}} \otimes E_{\text{spin}}^{(p)}$$

état lié fondamental (1s)

$$\Psi_{1s}(\vec{r}_e, \vec{r}_p) \propto \exp(-r/a_1)$$

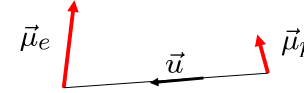
$$r = |\vec{r}_e - \vec{r}_p|$$

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} \simeq 0.053 \text{ nm}$$

Dégénérescence 4 pour le niveau fondamental

L'interaction magnétique électron - proton

Rappel de magnéto-statique :



$$W = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p - 3(\vec{\mu}_e \cdot \vec{u})(\vec{\mu}_p \cdot \vec{u})) - \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p \delta(\vec{r})$$

Ordres de grandeur : $r \simeq a_1 = 0.053 \text{ nm}$

$$\langle W \rangle \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_e \mu_p}{a_1^3} \simeq 10^{-5} \text{ eV} \ll 10 \text{ eV}$$

écart typique entre
niveaux d'énergie 1s - 2s

interaction magnétique \ll interaction coulombienne

Action de \hat{W} sur le niveau fondamental

On doit trouver les états propres de la matrice 4×4

$$\langle 1s | \otimes \langle e : \sigma_e | \otimes \langle p : \sigma_p | \hat{W} | 1s \rangle \otimes | e : \sigma'_e \rangle \otimes | p : \sigma'_p \rangle$$

Les valeurs propres correspondantes donneront les déplacements des sous-niveaux d'énergie issus du niveau fondamental

Après calcul de la partie orbitale, on se ramène à la diagonalisation de l'opérateur de spin :

$$\langle e : \sigma_e | \otimes \langle p : \sigma_p | \hat{H}_1 | e : \sigma'_e \rangle \otimes | p : \sigma'_p \rangle$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{2}{3} \frac{\mu_0}{\pi a_1^3} \hat{\mu}_e \cdot \hat{\mu}_p$$

L'hamiltonien de structure hyperfine $\hat{H}_1 = \frac{A}{\hbar^2} \hat{S}_e \cdot \hat{S}_p$

$$A = 5.87 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

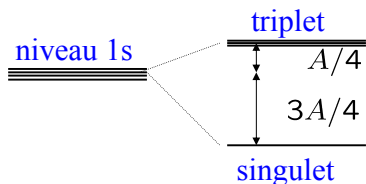
Diagonalisation de $\hat{S}_e \cdot \hat{S}_p$

$$\hat{S}_e \cdot \hat{S}_p = \frac{1}{2} \left((\hat{S}_e + \hat{S}_p)^2 - \hat{S}_e^2 - \hat{S}_p^2 \right) = \frac{\hat{S}^2}{2} - \frac{3\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow \hat{H}_1 |s = 1, m_s\rangle = \frac{A}{\hbar^2} \left(\hbar^2 - \frac{3\hbar^2}{4} \right) |s = 1, m_s\rangle = \frac{A}{4} |s = 1, m_s\rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{H}_1 |s = 0, m_s = 0\rangle &= \frac{A}{\hbar^2} \left(0 - \frac{3\hbar^2}{4} \right) |s = 0, m_s = 0\rangle \\ &= -\frac{3A}{4} |s = 0, m_s = 0\rangle \end{aligned}$$

Observation de la raie hyperfine



$$A = 5.87 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

Durée de vie du niveau triplet
10⁷ ans

Expériences de résonance entre niveaux triplet et singlet

maser à hydrogène : $\nu = A/h = 1\,420\,405\,751,768\,4 (17) \text{ Hz}$

$$\lambda = c/\nu \simeq 21 \text{ cm}$$

A partir des sources astrophysiques :

observation des photons émis par émission spontanée à $\lambda = 21 \text{ cm}$

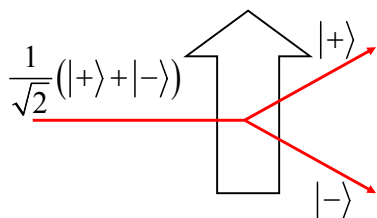
3.

Les corrélations Einstein – Podolsky – Rosen et l'inégalité de Bell

Les propriétés étonnantes des états intriqués

comme l'état singulet : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a:+\rangle \otimes |b:-\rangle - |a:-\rangle \otimes |b:+\rangle)$

L'indéterminisme de la mécanique quantique



Indéterminisme équivalent à celui d'un tirage à pile ou face ?

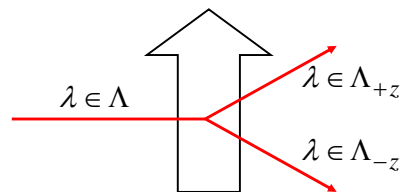
*Réponse quantique : Non.
Cet indéterminisme est intrinsèque et ne résulte pas d'une mauvaise connaissance des conditions initiales ou du mouvement ultérieur*

Mais est-on sûr que la mécanique quantique soit la théorie ultime ?

Einstein : "Dieu ne joue pas aux dés"

Une théorie déterministe donnant les mêmes résultats que la mécanique quantique peut-elle exister ?

Que serait une théorie déterministe reproduisant les résultats quantiques ?



L'état de chaque atome incident serait caractérisé par un paramètre λ (variable cachée) inaccessible au « physicien quantique »

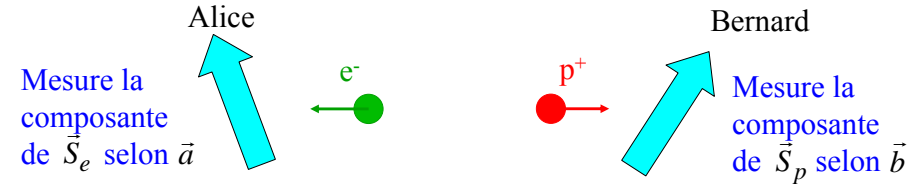
La connaissance de λ permettrait de déterminer avec certitude le résultat de la mesure de S_z par l'intermédiaire d'une fonction $A_z(\lambda)$

$$\Lambda = \Lambda_{+z} \cup \Lambda_{-z} \quad \begin{cases} \lambda \in \Lambda_{+z} & A_z(\lambda) = +\hbar/2 \\ \lambda \in \Lambda_{-z} & A_z(\lambda) = -\hbar/2 \end{cases}$$

Une théorie déterministe équivalente à la M.Q. peut elle exister ?

- Pour des expériences comportant une seule mesure (S_z) sur une particule unique (spin 1/2), on ne peut pas conclure.
- Pour des expériences consistant à mesurer des corrélations entre observables, la réponse est **NON** : théorème de Bell.

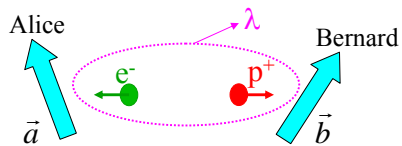
Mesures en corrélation en Alice et Bernard



produit des deux résultats pour chaque paire : $p = \pm \hbar^2 / 4$

$$\text{fonction de corrélation : } E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle p \rangle}{\hbar^2 / 4} \quad |E| \leq 1$$

Corrélations à deux particules dans une théorie « à variable cachée »



$$A(\lambda, \vec{a}) = \begin{cases} +\hbar/2 & \text{si } \lambda \in \Lambda_+(\vec{a}) \\ -\hbar/2 & \text{si } \lambda \in \Lambda_-(\vec{a}) \end{cases}$$

avec $\Lambda = \Lambda_+(\vec{a}) \cup \Lambda_-(\vec{a})$

De même pour Bernard : $B(\lambda, \vec{b})$

$$\text{Localité } \begin{cases} A(\lambda, \vec{a}, \vec{b}) \\ B(\lambda, \vec{a}, \vec{b}) \end{cases}$$

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\hbar^2 / 4} \int A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) P(\lambda) d\lambda$$

A, B, P inconnues en M.Q. !!!

Le théorème de Bell

On considère la quantité formée à partir du résultat de quatre séries de mesure différentes :

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}') - E(\vec{a}', \vec{b})$$

Comme $|E| \leq 1$, on a bien sûr $|S| \leq 4$.

J.S. Bell a montré pour une théorie à variables cachées locales l'inégalité beaucoup plus forte :

$$|S| \leq 2$$

Démonstration du théorème de Bell

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4}{\hbar^2} \int A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) P(\lambda) d\lambda \quad A(\lambda, \vec{a}), B(\lambda, \vec{b}) = \pm \hbar/2$$

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}') - E(\vec{a}', \vec{b}) \xrightarrow{?} |S| \leq 2$$

$$\underbrace{A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) + A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}') + A(\lambda, \vec{a}') B(\lambda, \vec{b}') - A(\lambda, \vec{a}') B(\lambda, \vec{b})}_{\underbrace{A(\lambda, \vec{a}) \{B(\lambda, \vec{b}) + B(\lambda, \vec{b}')\}}_0 \text{ ou } \pm \hbar^2/2} \quad \underbrace{A(\lambda, \vec{a}') \{B(\lambda, \vec{b}') - B(\lambda, \vec{b})\}}_{\pm \hbar^2/2 \text{ ou } 0}$$

Corrélations quantiques dans l'état singulet

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e: +\rangle \otimes |p: -\rangle - |e: -\rangle \otimes |p: +\rangle)$$

Alice a une probabilité +1/2 de trouver $\pm \hbar/2$ dans sa mesure de $S_{e,z}$

Si Alice trouve $-\hbar/2$, l'état du système après sa mesure est $|e: -\rangle \otimes |p: +\rangle$

Bernard est alors certain de trouver $+\hbar/2$ dans sa mesure de $S_{p,z}$

Si Alice trouve $+\hbar/2$, l'état du système après sa mesure est $|e: +\rangle \otimes |p: -\rangle$

Bernard est alors certain de trouver $-\hbar/2$ dans sa mesure de $S_{p,z}$

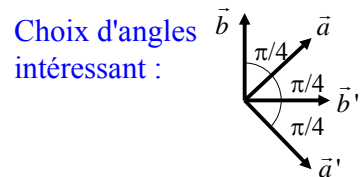
Corrélations EPR (Einstein-Podolsky-Rosen)

Corrélations quantiques dans l'état singulet (suite)

Corrélation totale entre les résultats d'Alice et Bernard : $E(\vec{e}_z, \vec{e}_z) = -1$

Cette corrélation totale reste valable tant qu'Alice et Bernard choisissent le même axe d'analyse \vec{u} : $E(\vec{u}, \vec{u}) = -1$

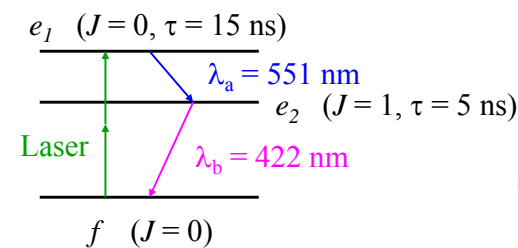
Plus généralement : $E(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$



$$S = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$$

Violation de l'inégalité de Bell $|S| \leq 2$!!!

Les expériences d'Orsay (1)



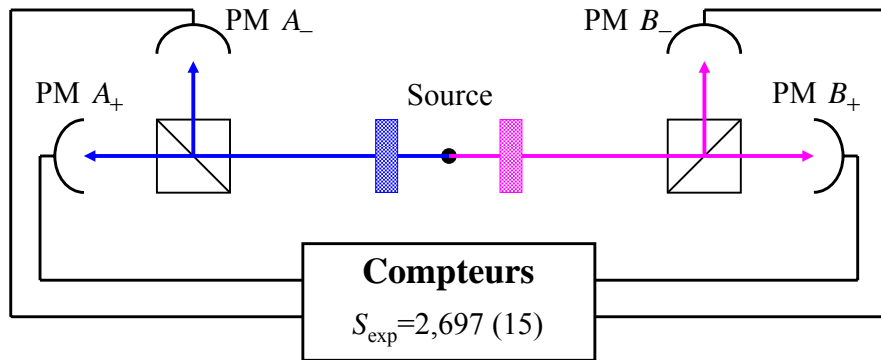
Cascade atomique (calcium)

Etat de polarisation de la paire de photons :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a: \uparrow\rangle \otimes |b: \uparrow\rangle + |a: \rightarrow\rangle \otimes |b: \rightarrow\rangle)$$

A. Aspect, P. Grangier, G. Roger & J. Dalibard

Les expériences d'Orsay (2)

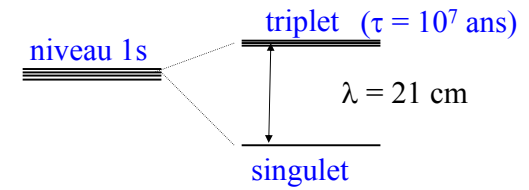


$|S_{\text{exp}}| > 2$: défaite des théories à variables cachées locales

$S_{\text{theo M.Q.}} = 2,70 \approx S_{\text{exp}}$: triomphe de la mécanique quantique

4.

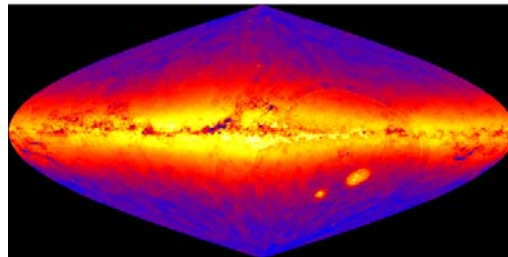
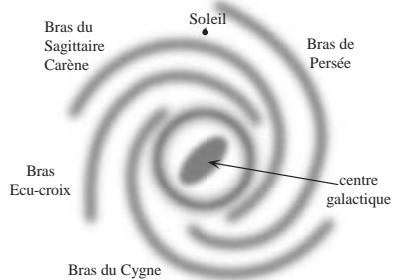
La raie à 21 cm de l'hydrogène en astrophysique



masses d'hydrogène en jeu considérables : on reçoit un signal suffisant de photons émis lors de la désexcitation du niveau triplet

Notre galaxie

200 milliards d'étoiles



Forme spirale

Diamètre :
100 000 années-lumière

Epaisseur :
1000 années-lumière

L'hydrogène dans notre galaxie

Entre les étoiles, matière diffuse : 10 % de la masse totale

Dans ce gaz interstellaire, 90% des atomes sont de l'hydrogène

0,3 atome/cm³ en moyenne

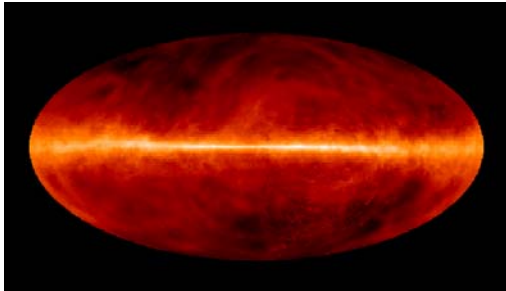
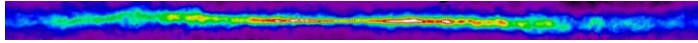
Nuages de masse comprise entre 0,1 et 1000 masses solaires

Matière pour la formation de nouvelles générations d'étoiles

trop "froide" pour être vue optiquement

Observation de la raie à 21 cm

On observe avec des radio-télescopes la raie émise à 21 cm par ces nuages



Effet Doppler

température : 20 à 100 K

vitesse moyenne:
jusqu'à 250 km/s

Effet Zeeman

champ magnétique local

Le message de Pioneer

