

CONTRÔLE DU COURS DE PHYSIQUE PHY311

Vendredi 6 juillet 2012, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives, notes de PC.

Indiquez le numéro de votre groupe de PC sur votre copie.

Les trois exercices sont indépendants.

I État d'une molécule dipolaire (sur 6 points)

1. On considère un système quantique décrit par l'état $|\psi\rangle$ et un autre système quantique de même nature, décrit par l'état $|\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$, où α est un nombre réel. Y a-t-il une différence entre les prédictions que l'on peut faire concernant la mesure d'une quantité physique A pour ces deux systèmes ?

2. On considère une molécule dipolaire (de type ammoniac) préparée dans une superposition de ses deux états d'énergie les plus bas, $|\psi_S\rangle$ et $|\psi_A\rangle$, d'énergies respectives $-\hbar\omega_0/2$ et $+\hbar\omega_0/2$. Montrer que l'état $|\psi\rangle$ de la molécule peut toujours se ramener à la donnée de deux nombres réels θ et φ tels que

$$|\psi\rangle = \cos\theta |\psi_S\rangle + e^{i\varphi} \sin\theta |\psi_A\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (1)$$

3. On se donne $N \gg 1$ molécules toutes préparées dans le même état $|\psi\rangle$ donné en (1), les coefficients θ et φ étant inconnus. Sur chaque molécule, on effectue une mesure de l'énergie.

- (a) Quels sont les résultats possibles pour une mesure individuelle ? Donner les probabilités correspondantes.
- (b) Quelle est la valeur moyenne des résultats obtenus sur l'assemblée des N molécules ? Les coefficients θ et φ sont-ils complètement déterminés après ces mesures ?

4. On prépare N autres molécules également dans l'état $|\psi\rangle$ et on mesure leur moment dipolaire électrique. On supposera que cette mesure est instantanée. On rappelle que l'observable \hat{d} associée à ce moment dipolaire a pour états propres $|\psi_D\rangle = (|\psi_S\rangle + |\psi_A\rangle)/\sqrt{2}$ et $|\psi_G\rangle = (|\psi_S\rangle - |\psi_A\rangle)/\sqrt{2}$, associés respectivement aux valeurs propres $+d_0$ et $-d_0$.

- (a) Quels sont les résultats possibles pour une mesure individuelle ? Donner les probabilités correspondantes.
- (b) Quelle est la valeur moyenne des résultats obtenus sur l'assemblée des N molécules ? Les coefficients θ et φ sont-ils complètement déterminés après les N mesures de la questions 3 et les N mesures de cette question ?

5. En cas d'ambiguïté restante sur la détermination de θ et/ou φ , proposer en quelques lignes un protocole expérimental pour lever cette ambiguïté.

II Propagation et étalement d'un paquet d'ondes (sur 8 points)

1. On considère un système quantique d'hamiltonien \hat{H} indépendant du temps et on note $|\psi(t)\rangle$ son état à l'instant t . On se donne une observable \hat{A} elle aussi indépendante du temps et on s'intéresse à l'évolution dans le temps de la valeur moyenne de cette observable : $a(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$.

- (a) Rappeler l'équation d'évolution du ket $|\psi(t)\rangle$ et en déduire celle du bra $\langle \psi(t) |$.

(b) En déduire que la quantité da/dt est reliée à la valeur moyenne du commutateur $[\hat{A}, \hat{H}] = \hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}$:

$$i\hbar \frac{da}{dt} = \langle \psi(t) | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi(t) \rangle. \quad (2)$$

2. Évolution du centre d'un paquet d'ondes. On considère une particule ponctuelle de masse m en mouvement libre (pas de potentiel) le long de l'axe x . On note \hat{x} et \hat{p} ses opérateurs position et impulsion.

- Rappeler (sans justification) l'action de \hat{x} et de \hat{p} sur une fonction d'onde $\psi(x)$.
- Comparer $\hat{x}\hat{p}\psi(x)$ et $\hat{p}\hat{x}\psi(x)$. En déduire que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1}$, où $\hat{1}$ est l'opérateur identité.
- On se donne deux opérateurs \hat{A} et \hat{B} . Montrer que $[\hat{A}, \hat{B}^2] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]$. En déduire que $[\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar \hat{p}$.
- On pose $\bar{p}(t) = \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle$ et $\bar{x}(t) = \langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle$. À l'aide des questions précédentes, exprimer $d\bar{p}/dt$ et $d\bar{x}/dt$ en fonction de \bar{p} , \bar{x} et m . En déduire les valeurs de $\bar{p}(t)$ et $\bar{x}(t)$ en fonction de $\bar{p}(0)$, $\bar{x}(0)$, t et m .
- On note $\psi(x, t)$ la fonction d'onde associée au ket $|\psi(t)\rangle$. À l'instant initial $t = 0$, la particule est préparée dans l'état fondamental $\phi_0^{(\omega)}(x)$ d'un oscillateur harmonique de pulsation ω :

$$\psi(x, 0) = \phi_0^{(\omega)}(x) = C \exp(-x^2 / 2a_0^2), \quad (3)$$

où $a_0 = (\hbar/(m\omega))^{1/2}$ et où C est un coefficient de normalisation. On coupe le potentiel harmonique à l'instant $t = 0$ et on laisse ensuite la particule évoluer librement (expérience de temps de vol). Déterminer la position moyenne et l'impulsion moyenne de la particule à un instant $t > 0$.

3. Étalement du paquet d'ondes. On s'intéresse encore à l'évolution du paquet d'ondes d'une particule libre préparée dans l'état (3) à l'instant $t = 0$ et on cherche maintenant à calculer les quantités

$$\overline{p^2}(t) = \langle \psi(t) | \hat{p}^2 | \psi(t) \rangle, \quad \overline{x^2}(t) = \langle \psi(t) | \hat{x}^2 | \psi(t) \rangle, \quad \bar{\gamma}(t) = \langle \psi(t) | \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | \psi(t) \rangle. \quad (4)$$

On rappelle qu'on a pour l'état (3) : $\overline{p^2}(0) = m\hbar\omega/2$, $\overline{x^2}(0) = \hbar/(2m\omega)$ et $\bar{\gamma}(0) = 0$. On donne la valeur des commutateurs : $[\hat{x}^2, \hat{p}^2] = 2i\hbar(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$, $[\hat{x}\hat{p}, \hat{p}^2] = [\hat{p}\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}^2$.

- Exprimer $d\overline{p^2}/dt$, $d\overline{x^2}/dt$, $d\bar{\gamma}/dt$ en fonction de $\overline{p^2}$, $\overline{x^2}$, $\bar{\gamma}$ et m .
- En déduire que l'étalement de la distribution en position de la particule est tel que $\overline{x^2}(t) = \overline{x^2}(0)(1 + \omega^2 t^2)$.

4. Oscillateur harmonique à deux dimensions. La particule peut maintenant se propager dans le plan xy et elle est décrite par une fonction d'onde $\psi(x, y, t)$. À l'instant $t = 0$, la particule est préparée dans l'état fondamental d'un oscillateur harmonique de pulsations ω_x selon l'axe x et $\omega_y (< \omega_x)$ selon y : $\psi(x, y, 0) = \phi_0^{(\omega_x)}(x) \phi_0^{(\omega_y)}(y)$.

- Comparer les variances initiales $\Delta x^2(0)$ et $\Delta y^2(0)$ des distributions en position selon les deux axes.
- On supprime le potentiel harmonique à l'instant $t = 0$, on laisse la particule se propager librement dans le plan xy pendant une durée t et on mesure l'ellipticité du nuage $\varepsilon(t) = \Delta x(t)/\Delta y(t)$. Indiquer si le signe de $\varepsilon(t) - 1$ peut changer au cours du temps et commenter l'origine physique de ce phénomène.
- Quand un gaz de particules décrites par la mécanique classique est à l'équilibre thermique à température T dans un potentiel harmonique de pulsation ω_x selon l'axe x , les variances Δx^2 et Δp_x^2 vérifient « l'équipartition de l'énergie » (k_B est la constante de Boltzmann) :

$$\frac{1}{2}m\omega_x^2\Delta x^2 = \frac{1}{2}k_B T, \quad \frac{\Delta p_x^2}{2m} = \frac{1}{2}k_B T. \quad (5)$$

Donner l'évolution de l'ellipticité d'un tel gaz dans une expérience de temps de vol, en supposant $\omega_y < \omega_x$. En considérant l'évolution dans le temps du signe de $\varepsilon(t) - 1$, expliquer pourquoi cette expérience permet de déterminer sans ambiguïté si le comportement du gaz est régi par la physique classique ou la physique quantique. Dans quelle catégorie peut-on classer l'expérience de temps de vol présentée en figure 1 ?

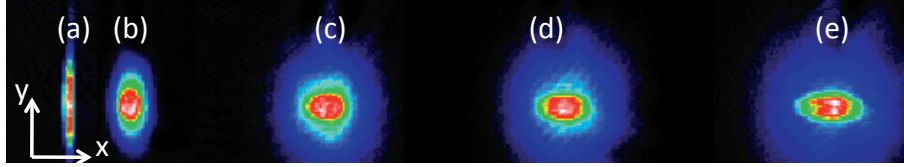


FIGURE 1 – Expérience de temps de vol menée avec des atomes de rubidium, dans un état initial correspondant à un « condensat de Bose-Einstein ». La figure (a) correspond à l’instant $t = 0$ et les figures suivantes aux instants $t = 5, 10, 15, 20$ ms (images : Laboratoire Kastler Brossel).

III Interférences de grosses particules (sur 6 points)

On mène une expérience de fentes d’Young avec des particules matérielles supposées sphériques de rayon R et de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ (figure 2). Ces particules sont émises par une source portée à la température $T = 300 \text{ K}$. Elles se propagent le long de l’axe y de l’interféromètre avec une vitesse v telle que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k_B T, \quad (6)$$

où m est la masse de la particule et k_B la constante de Boltzmann.

1. Exprimer la longueur d’onde λ de la particule en fonction de ρ , R , T et de la constante de Planck h .
2. On note D la distance entre le plan des fentes et l’écran de détection. Rappeler l’expression de l’interfrange x_i en fonction de λ , D et a dans le cas où la largeur de chaque fente ℓ est petite devant la distance entre fentes a . On supposera également $a \ll D$. Dans la suite, on pourra utiliser ce résultat même si $\ell \approx a$.
3. Pour pouvoir observer de manière satisfaisante les franges d’interférence, on pose que les deux conditions suivantes doivent être satisfaites :

- $R \leq x_i/2$: cette condition traduit le fait qu’une particule ne doit pas « s’étaler » sur plusieurs franges d’interférence.
- $R \leq a/2$: cette condition traduit le fait que les particules doivent passer dans les fentes sans toucher leur bord ($R \leq \ell/2$), sachant par ailleurs que $\ell \leq a = \ell + \ell'$.

On fixe D et on optimise a pour observer des interférences avec les particules les plus grosses possibles. Quelle est la taille maximale R_{max} pour laquelle les interférences sont observables ? On exprimera R_{max} en fonction de D , ρ , T , k_B et h . Quelle valeur doit-on choisir pour la distance entre fentes a ?

4. La longueur de l’interféromètre est $D = 1 \text{ m}$. Quelle est la valeur de R_{max} ? À quelle vitesse correspond cette taille maximale ? Quelle est la longueur d’onde correspondante ? Indiquer en quelques lignes les principaux obstacles à la réalisation de cette expérience. Rappel : $k_B = 1.4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$.

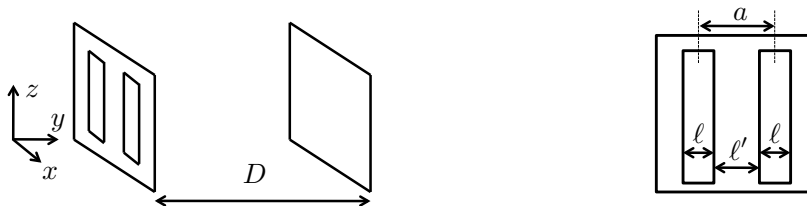


FIGURE 2 – Gauche : interféromètre à fentes d’Young. Droite : Plan des fentes ; chaque fente a pour largeur ℓ , la distance entre les centres des fentes est a et la zone opaque entre les fentes est de largeur ℓ' ($a = \ell + \ell'$).

Corrigé

I Etat d'une molécule dipolaire

1. Pour une observable quelconque \hat{A} , la probabilité pour trouver la valeur propre a_i est $p(a_i) = |\langle \psi_i | \psi \rangle|^2$, où $|\psi_i\rangle$ est l'état propre associé à a_i . Cette probabilité est inchangée quand on passe de $|\psi\rangle$ à $|\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$. Il n'y a donc pas de différence entre les prédictions que l'on peut faire pour $|\psi\rangle$ et pour $|\psi'\rangle$: le vecteur d'état est défini à une phase globale près.

2. L'état de la molécule peut s'écrire comme $\mu|\psi_S\rangle + \nu|\psi_A\rangle$, avec μ, ν complexes tels que $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$. On peut toujours multiplier cet état par un nombre $e^{i\alpha}$ de module 1, de sorte que le coefficient de $|\psi_S\rangle$ soit réel et positif. La forme donnée en (1) s'en déduit immédiatement.

3. (a) Les résultats d'une mesure individuelle sont $-\hbar\omega_0/2$, avec la probabilité $\cos^2\theta$ et $+\hbar\omega_0/2$, avec la probabilité $\sin^2\theta$.

(b) La moyenne des résultats est $\langle E \rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \cos(2\theta)$. Cette moyenne, si elle est mesurée avec une bonne précision, détermine la valeur de θ . En revanche, la valeur de φ reste indéterminée.

4. (a) Les résultats de mesure possibles sont $+d_0$, avec la probabilité $p_+ = |\langle \psi_D | \psi \rangle|^2$ et $-d_0$, avec la probabilité $p_- = |\langle \psi_G | \psi \rangle|^2$. Un calcul simple donne $p_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \sin(2\theta) \cos(\varphi))$.

(b) La valeur moyenne de la mesure du moment dipolaire donne $\langle d \rangle = \sin(2\theta) \cos(\varphi) d_0$. On connaît θ grâce aux mesures de la question précédente et on en déduit donc $\cos(\varphi)$. Ceci permet de préciser la valeur de $|\varphi|$ entre 0 et π , mais pas le signe de φ .

5. Pour déterminer le signe de φ , on peut laisser évoluer l'état pendant une durée t , ce qui revient à changer φ en $\varphi - \omega_0 t$. Une mesure sur un troisième lot de N molécules permet alors de déterminer $\cos(\varphi - \omega_0 t)$ et donc de lever l'ambiguïté sur le signe de φ si t est bien choisi.

II Propagation et étalement d'un paquet d'ondes

1. (a) On a $i\hbar(d|\psi\rangle/dt) = \hat{H}|\psi\rangle$ et $-i\hbar(d\langle\psi|/dt) = \langle\psi|\hat{H}$.

(b) On utilise

$$\frac{da}{dt} = \frac{d\langle\psi|}{dt} \hat{A} |\psi\rangle + \langle\psi| \hat{A} \frac{d|\psi\rangle}{dt} \quad (7)$$

et on en déduit le résultat de l'énoncé.

2. (a) $\hat{x} : \psi(x) \rightarrow x\psi(x)$ et $\hat{p} : \psi(x) \rightarrow -i\hbar(d\psi/dx)$.

(b) On déduit immédiatement de ce qui précède que $(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi(x) = -i\hbar x(d\psi(x)/dx) + i\hbar d(x\psi(x))/dx = i\hbar\psi(x)$.

(c) $[\hat{A}, \hat{B}^2] = \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} = \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]$. En utilisant $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, on en déduit immédiatement $[\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar \hat{p}$.

(d) La relation (2) donne $\dot{\bar{p}} = 0$ et $\dot{\bar{x}} = \bar{p}/m$, soit $\bar{p}(t) = \bar{p}(0)$ et $\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \bar{p}(0)t/m$.

(e) Pour l'état initial considéré, on constate immédiatement que $\bar{p}(0) = 0$ et $\bar{x}(0) = 0$, puisque $\psi(x, 0)$ est une gaussienne centrée en 0 ainsi que sa transformée de Fourier. On en déduit donc que la position moyenne et l'impulsion moyenne restent nulles à tout instant $t > 0$.

3. (a) On déduit de la relation (2) les relations suivantes : $\dot{\bar{p}^2} = 0$, $\dot{\bar{x}^2} = \bar{\gamma}/m$ et $\dot{\bar{\gamma}} = 2\bar{p}^2/m$.

(b) Compte tenu des conditions initiales, on trouve : $\bar{p}^2(t) = \bar{p}^2(0)$, $\bar{\gamma}(t) = 2t\bar{p}^2(0)/m$ et $\bar{x}^2(t) = \bar{x}^2(0) + \bar{p}^2(0)t^2/m^2$, dont on déduit le résultat donné dans l'énoncé.

4. (a) Si $\omega_x > \omega_y$, la distribution initiale en x est plus étroite que celle en y : $\varepsilon^2(0) = \Delta x^2(0)/\Delta y^2(0) = \omega_y/\omega_x < 1$.

(b) Comme l'hamiltonien à deux dimensions s'écrit comme la somme de $p_x^2/2m$ et de $p_y^2/2m$, les distributions selon les deux directions évoluent de manière indépendante. On peut donc appliquer à chacune de ces distributions le résultat de la question précédente. L'ellipticité vérifie :

$$\varepsilon^2(t) = \frac{\omega_y}{\omega_x} \frac{1 + \omega_x^2 t^2}{1 + \omega_y^2 t^2}. \quad (8)$$

Aux temps longs, cette fonction tend vers ω_x/ω_y , qui est supérieur à 1. Il y a donc un instant particulier où l'ellipticité s'inverse. Cette inversion est une conséquence de l'inégalité de Heisenberg : si la distribution en position selon x est plus comprimée que celle en y , la distribution en impulsion selon x doit être plus large. Aux temps longs, l'étalement du paquet d'ondes reflète la distribution en impulsion initiale : le paquet d'ondes s'étale plus vite selon x , d'où la nécessaire inversion d'ellipticité.

(c) Pour un gaz de particules classiques à température T , les distributions en impulsion selon les axes x et y ont la même largeur $\sqrt{mk_B T}$, même si les pulsations selon ces axes ne sont pas les mêmes. Aux longs temps d'expansion, on s'attend donc à trouver une distribution circulaire, mais pas d'ellipticité inversée. Les données de la figure 1 montrent une claire inversion d'ellipticité, en accord avec la prédiction quantique.

III Interférences de gros objets

1. On a $\lambda = h/(mv)$ avec $v = \sqrt{k_B T/m}$, soit $\lambda = h/\sqrt{mk_B T}$. On utilise $m = \rho(4\pi/3)R^3$, ce qui donne finalement

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{h}{\sqrt{\rho R^3 k_B T}}. \quad (9)$$

2. Si $\ell \ll a$ et $a \ll D$, l'interfrange dans une expérience de fentes d'Young est donné par $x_i = \lambda D/a$.

3. Pour que les deux conditions nécessaires données dans l'énoncé puissent être simultanément satisfaites, il faut que $R^2 \leq ax_i/4$, soit $R^2 \leq \lambda D/4$. En remplaçant λ par sa valeur, on arrive alors à :

$$R^{7/2} \leq \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{hD}{\sqrt{\rho k_B T}}, \quad (10)$$

soit

$$R_{\max} = \left(\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{hD}{\sqrt{\rho k_B T}} \right)^{2/7}. \quad (11)$$

On prend alors $a = 2R_{\max}$ et on obtient un système de franges d'interférence d'interfrange $x_i = 2R_{\max}$.

4. La valeur maximale de R pour les paramètres de l'énoncé est de 55 nm. La masse correspondante est de $7.1 \cdot 10^{-19}$ kg, la vitesse est $v = 7.6$ cm/s et la longueur d'onde vaut $\lambda = 1.2 \cdot 10^{-14}$ m. Avec des particules « aussi grosses », il est très difficile de maintenir la cohérence entre les deux bras de l'interféromètre. Les collisions entre la particule et les molécules du gaz résiduel dans l'enceinte où est menée l'expérience, dont la fréquence augmente avec la taille de la particule, risquent d'introduire des déphasages incontrôlés. Il en va de même pour les champs électriques résiduels, si la particule est préparée par mégarde avec une charge électrique non nulle. De plus, on remarque que la vitesse de la particule est très faible, et que les effets de la gravitation seront considérables pendant le temps de parcours (13 secondes) entre le plan des fentes et le plan de détection.