Onde ou corpuscule ?

La particule quantique dans l'espace libre

Chapitre 1 et début du chapitre 2

Le tronc commun de mécanique quantique

Cours en amphi :
Philippe Grangier & Jean Dalibard

J-L Basdevant, J. D.

Petites classes :
Ignatios Antoniadis
Ulrich Bockelmann
Fabien Bretenaker
Michel Brune
Maxime Dahan
Philippe Grangier ou Jean Dalibard
Manuel Joffre
Christoph Kopper
Thierry Melin
Rémy Mosseri
Razvigor Ossikovski
Bertrand Reulet

Un CD-rom : illustrations et simulations du cours, Manuel Joffre

Une page web : http://www.lkb.ens.fr/~dalibard/PHY311.htm

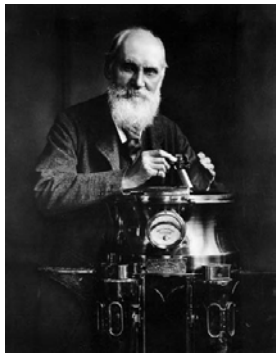
QCM : en ligne le mercredi matin, réponse avant le lundi suivant 23h59
https://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/physique/Manuel.Joffre/qcm/index.php

---

1.

Les nuages de Lord Kelvin

Le ciel et les nuages de Lord Kelvin



27 avril 1900,
Lord Kelvin (Prof. William Thomson)

« Désormais, il n’y a plus rien de nouveau à découvrir en physique.
Ce qui reste à faire, ce sont des mesures de plus en plus précises. »

La connaissance en physique est semblable à un grand ciel bleu,
à l’horizon duquel subsistent seulement deux petits nuages…

Les deux petits nuages de Lord Kelvin

Le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley

détection du mouvement de la terre par rapport à l'éther ?

théorie de la relativité
équivalence masse-énergie

technologie nucléaire

abandon de la notion de temps absolu

Le rayonnement du corps noir

lumière émise par un corps à l'équilibre thermodynamique

mécanique quantique

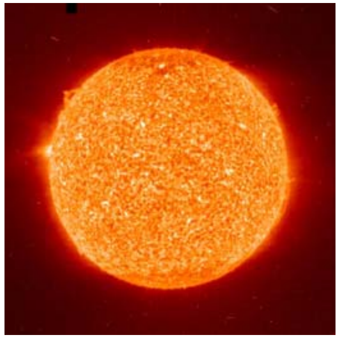
électronique & lasers

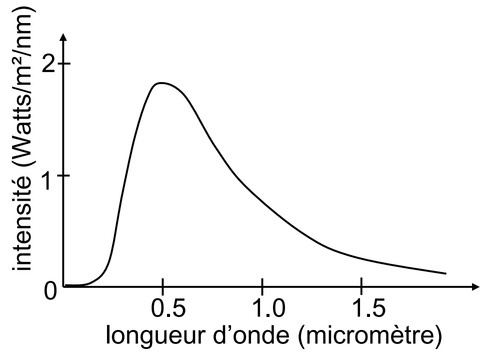
abandon du déterminisme

Le rayonnement du « corps noir »

Lumière émise par un corps matériel quand il est en équilibre thermique à la température T

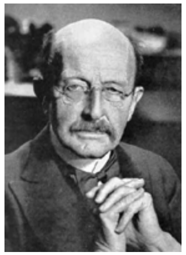
Exemple : la surface du soleil





Courbe universelle, ne dépendant que de T, que la physique classique ne sait pas expliquer

Les premiers quanta : Planck (1900)



Explique le rayonnement du corps noir en faisant l'hypothèse que des oscillateurs mécaniques chargés, de fréquence ν, ne peuvent émettre ou absorber l'énergie lumineuse que par quantités discrètes

$$\Delta E = nh\nu = n\hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\,\nu$$

$$h \simeq 6.63\ 10^{-34}\text{Js} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1.05\ 10^{-34}\text{Js}$$

Le photon d'Einstein (1905)

La lumière elle-même a des propriétés quantiques.
Pour une lumière de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, le quantum de rayonnement (baptisé « photon » par Lewis en 1926) a une énergie et une impulsion:

$$E = \hbar\omega \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k} \qquad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Cette nature granulaire est-elle en contradiction avec une équation d'onde qui est continue (Maxwell) ?
- Comment comprendre cette dualité des propriétés de la lumière qui peuvent être à la fois ondulatoires (expériences des fentes d'Young) et corpusculaires?
- Cette dualité existe-t-elle également pour les particules matérielles ?

L’hypothèse de Louis de Broglie (1923)

A toute particule matérielle de masse m et d’impulsion $p=mv$, on peut associer une onde de vecteur d’onde

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

soit une longueur d’onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$ ou encore $$\lambda = \frac{h}{p}$$

Einstein à Langevin:
« Le travail de Louis de Broglie m’a grandement impressionné.
Il a soulevé un coin du grand voile […] Si vous le voyez, veuillez lui témoigner toute mon estime et ma sympathie. »

2.

Les ondes de matière et leurs interférences

diffraction d’électrons 1927

Alexandre Dauvillier ?

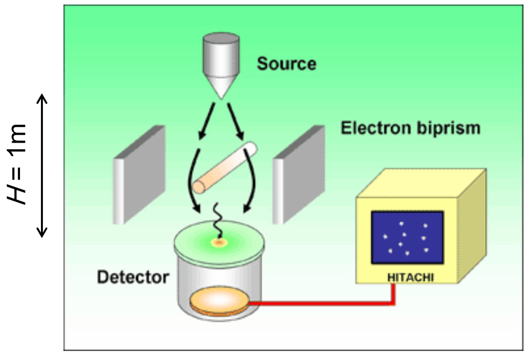
Davisson & Germer

George Thomson

prix Nobel 1937

Expériences d’interférences avec des électrons

A. Tonomura et son équipe
Hitachi Research Laboratory

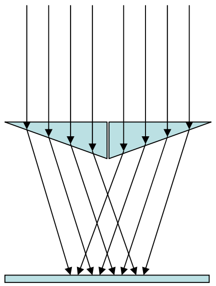


énergie E = 50 keV
vitesse v = c/4

10 électrons par seconde

filament de diamètre de l’ordre de 1mm

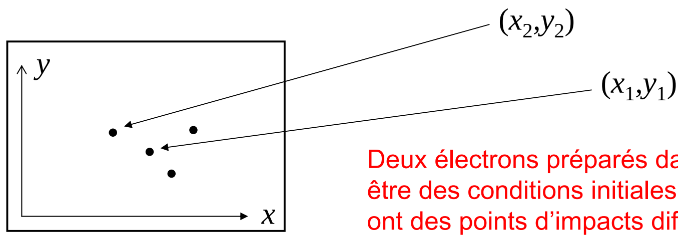
dispositif voisin de l’expérience du « bi-prisme » de Fresnel



La détection des électrons

Un électron est détecté en un point de l’écran, et pas sur une tache étendue : particule ponctuelle

Le point d’impact (x,y) d’un électron donné semble aléatoire.



Deux électrons préparés dans ce qui paraît être des conditions initiales identiques ont des points d’impacts différents.

La fonction d'onde et son interprétation probabiliste

Principe 1:

La description complète de l'état d'une particule de masse m dans l'espace à l'instant t se fait au moyen d'une fonction d'onde complexe :

$\psi(\vec{r},t)$: fonction continue des variables d'espace $\vec{r} = (x,y,z)$

La probabilité de trouver la particule à l'instant t dans un volume d^3r entourant le point $\vec{r}$ est :

$$d^3P = |\psi(\vec{r},t)|^2 \; d^3r$$

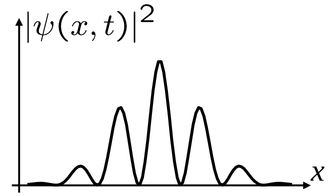
ψ : amplitude de probabilité

$$\int |\psi(\vec{r},t)|^2 \; d^3r = 1$$

fonction d'onde « normée »

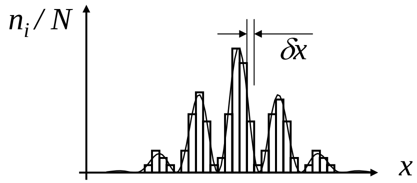
Interprétation probabiliste

On prépare successivement N particules, toutes dans la même fonction d'onde $\psi(x,t)$



Pour chaque particule, on fait une mesure de position avec un détecteur de résolution spatiale δx, et on fait un histogramme des résultats :

n_i : nombre d'atomes détectés dans le canal i

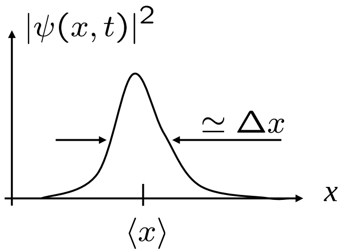


On pourra reconstruire $|\psi(x,t)|^2$ avec une bonne précision si $N >> 1$

Valeurs moyennes et écarts-type

Position moyenne :

$$\langle x \rangle = \int x \; |\psi(x,t)|^2 \; dx$$



Variance : $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2$

avec $\langle x^2 \rangle = \int x^2 \; |\psi(x,t)|^2 \; dx$

Ecart-type: $\Delta x = \sqrt{\Delta x^2}$

Point-clé du principe 1

« La description **complète** de l'état d'une particule de masse m dans l'espace à l'instant t se fait au moyen d'une fonction d'onde »

La fonction d'onde contient toute l'information disponible : il n'y a pas d'autre élément dans le formalisme quantique qui pourrait permettre de savoir, avant de faire la mesure, où la particule va être détectée.

Le caractère probabiliste et aléatoire ne résulte pas d'une mauvaise connaissance des conditions initiales (comme en théorie cinétique des gaz par exemple), mais fait partie intégrante du formalisme quantique.

Einstein (« Dieu ne joue pas aux dés ») s'opposait à ce rôle central de l'aléatoire au sein de la théorie quantique.

Point-clé du principe 1 (suite)

« La fonction d'onde est une **amplitude** de probabilité… »

Si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions d'onde possibles, correspondant aux lois de probabilité $P_1=|\psi_1|^2$ et $P_2=|\psi_2|^2$, alors

$$\psi \propto \psi_1 + \psi_2$$

est également une fonction d'onde possible, correspondant à la loi

$$P = |\psi|^2 \propto P_1 + P_2 + \underbrace{\psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*}_{\text{Interférences !}}$$

Principe de superposition

Ce principe sera essentiel quand on étendra le formalisme
à un système physique quelconque

3.

L'équation de Schrödinger

(particule libre)

Quelle équation pour cette onde ?

Equations de Maxwell dans l'espace libre : 6 fonctions réelles

$\vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{B}(\vec{r},t)$ telles que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ avec

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B}\\ -\vec{\nabla}\times\vec{E}\end{pmatrix}$$

On va chercher de même une équation pour ψ sous la forme:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = F(\psi)$$

où $F(\psi)$ fait intervenir ψ et/ou ses dérivées par rapport aux variables d'espace x,y,z.

Une piste pour chercher l'équation d'onde

On va utiliser la « relation de dispersion » qui relie :

- la fréquence et le vecteur d'onde $\omega \longleftrightarrow \vec{k}$

ou, d'une manière équivalente :

- l'énergie et l'impulsion $E \longleftrightarrow \vec{p}$

sachant que le lien onde-corpuscule se fait par: $E=\hbar\omega \qquad \vec{p}=\hbar\vec{k}$

	Lumière	Matière
Corpuscule	$E=cp$ Einstein	$E=\dfrac{p^2}{2m}$
Onde	$\omega=ck$	$\omega=\dfrac{\hbar k^2}{2m}$ de Broglie

Une piste pour chercher l'équation d'onde (suite)

On veut que l'onde plane progressive $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

avec $\omega = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$ soit solution de $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = F(\psi)$

où $F(\psi)$ fait intervenir ψ et/ou ses dérivées par rapport à x,y,z.

Pour l'onde plane progressive, on a : $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\,\psi = -i\dfrac{\hbar k^2}{2m}\,\psi$

et il faut donc : $-i\dfrac{\hbar k^2}{2m}\,\psi = F(\psi)$

Sachant que gradient et laplacien vérifient :

$$\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = i\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \Delta\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = -k^2\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

une possibilité simple apparaît : $F(\psi) = i\dfrac{\hbar}{2m}\,\Delta\psi$

L'équation de Schrödinger

Imposer aux ondes de de Broglie d'être solutions de l'équation d'onde conduit donc au choix :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\frac{\hbar}{2m}\,\Delta\psi$$

On multiplie les deux membres par $i\hbar$ et on arrive au :

Principe 2

Si la particule est dans le vide et ne subit aucune interaction, la fonction d'onde satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

Apparté: la piste initiale de Schrödinger et l'équation de Klein-Gordon

Recherche de solutions sous forme d'onde plane : $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

Au lieu de la version non relativiste utilisée ici :

$$\begin{aligned} E &= p^2/2m \\ \omega &= \hbar k^2/2m \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi$$

Schrödinger a d'abord essayé la version relativiste :

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \\ \omega^2 &= k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -c^2\Delta\psi + m^2c^4\psi$$

A l'époque, difficultés à la fois mathématiques et physiques…

Points-clé du principe 2

⇨ Conservation de la norme :

en utilisant $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = i\dfrac{\hbar}{2m}\,\Delta\psi$ et $\dfrac{\partial \psi^*}{\partial t} = -i\dfrac{\hbar}{2m}\,\Delta\psi^*$

on vérifie que $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int |\psi(\vec{r},t)|^2\,d^3r = 0$

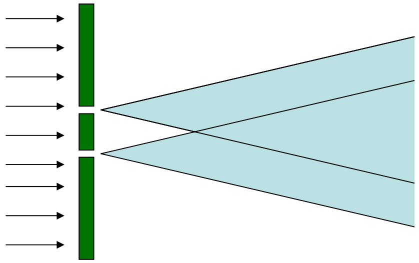
⇨ Les ondes planes de de Broglie

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\,e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} = \psi_0\,e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}$$

sont solutions de l'équation de Schrödinger, mais ne sont pas normalisées : cas limite d'une onde normalisée très étalée (comme en électromagnétisme).

Points-clé du principe 2 (suite)

Traitement quantitatif du phénomène d'interférence



principe de superposition

La résolution numérique exacte de $\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi$ avec les conditions aux limites appropriées (en particulier ψ nulle sur l'écran hormis les deux trous) rend bien compte du phénomène observé :

⇨ Diffraction par chacune des fentes

⇨ Valeur de l'interfrange dans la zone de recouvrement

Utilisation des ondes de de Broglie (I)

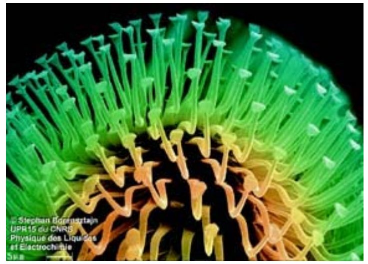
Le pouvoir de résolution d'un microscope est limité par la longueur d'onde qu'on utilise : en lumière visible, une fraction de micromètre.

Microscope électronique : avec des « rayons électroniques » de longueur d'onde beaucoup plus courte, on peut voir des détails beaucoup plus fins qu'avec un microscope optique.

E_{cin} = 150 eV $\quad v$ = 7 10^6 m/s $\quad \lambda$ = 1 Å

5 µm

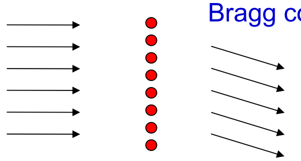
100 µm



Utilisation des ondes de de Broglie (II)

Utilisation de particules (ex: électrons, neutrons) dont la longueur d'onde est bien ajustée à l'échelle de longueur qu'on veut sonder

Diffraction de Bragg cohérente



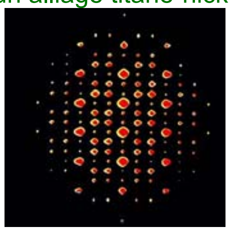
cristal de période de quelques angströms

λ = 1 Å

électrons : v = 7.3 10^6 m/s $\quad E$ = 150 eV

neutrons : v = 4000 m/s $\quad E$ = 0.1 eV

diffraction d'électrons par un alliage titane-nickel



Davisson

4.

Peut-on savoir par quelle fente passe chaque particule ?

Les implications d'une information sur le chemin suivi

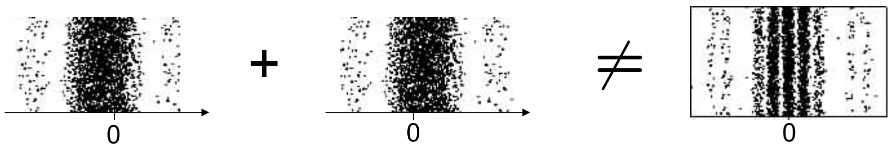
Une telle information, si elle était disponible, « ruinerait » la logique de la théorie relativement simple que nous sommes en train de construire.

Si la fente 1 seulement est ouverte, on n'observe pas d'interférences, seulement de la diffraction.

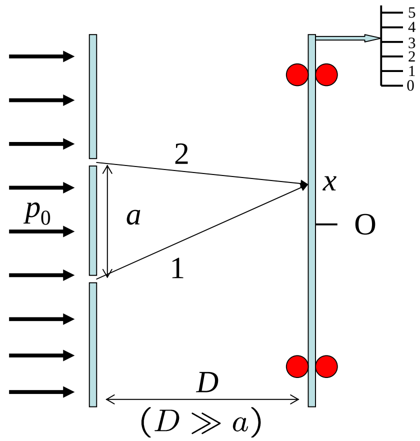
Si on pouvait savoir par quelle fente passe chaque particule, on pourrait classer chaque événement de détection dans une des deux catégories :

- la particule est passée à gauche (figure ci-dessus),
- la particule est passée à droite (même figure décalée de a).

Mais :



Une tentative pour détecter le chemin suivi



On mesure simultanément le point d'impact x de la particule et la direction du recul de l'écran le long de l'axe Ox

Chemin 1 : $p_x^{(1)} = p_0 \dfrac{x + \frac{a}{2}}{D}$

Chemin 2 : $p_x^{(2)} = p_0 \dfrac{x - \frac{a}{2}}{D}$

Différence entre les impulsions de recul : $p_x^{(1)} - p_x^{(2)} = \dfrac{a p_0}{D}$

Comment distinguer entre les deux chemins ?

Pour distinguer entre les deux événements :
« la particule passe par la fente 1 »
« la particule passe par la fente 2 »
il faut connaître l'impulsion de l'écran avant chaque détection avec une précision :

$$\Delta p_{x,\text{ecran}} \ll \frac{a p_0}{D}$$

Pour observer les franges d'interférence, il faut positionner l'écran avant chaque détection avec une précision :

$$\Delta x_{\text{ecran}} \ll \text{interfrange} = \frac{\lambda D}{a}$$

$$\lambda = \frac{h}{p_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x_{\text{ecran}}\ \Delta p_{x,\text{ecran}} \ll h$$

L'inégalité de Heisenberg au secours de notre théorie

Nous verrons dans la suite qu'il est impossible de préparer un système (particule, écran, …) dans un état où les précisions de notre connaissance de sa position et son impulsion sont simultanément arbitrairement bonnes.

Plus précisément : $\Delta x \ \Delta p_x > \dfrac{\hbar}{2}$

En physique quantique plus qu'ailleurs, il importe de préciser parfaitement le protocole expérimental envisagé :

- on peut faire une expérience où on sait par quelle fente passe la particule,
- on peut faire une expérience où on voit des interférences,

mais on ne peut pas faire les deux à la fois…

Physique d'une particule ponctuelle libre

	Mécanique classique	Mécanique quantique
caractéristiques intrinsèques	masse m charge q	masse m charge q
Etat de la particule	position $\vec{r}(t)$ impulsion $\vec{p}(t)$	fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$
Equation du mouvement	$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$	$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$
Type de connaissance	déterministe $\vec{r},\ \vec{p}$	aléatoire $d^3P = \|\psi(\vec{r},t)\|^2\ d^3r$