

**Des cages de lumière pour les atomes :
la physique des pièges et des réseaux optiques**

Cours 5 (suite et fin).

Les oscillations de Bloch dans un réseau optique

Cours 6.

Topologie dans un réseau : l'exemple des points de Dirac

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

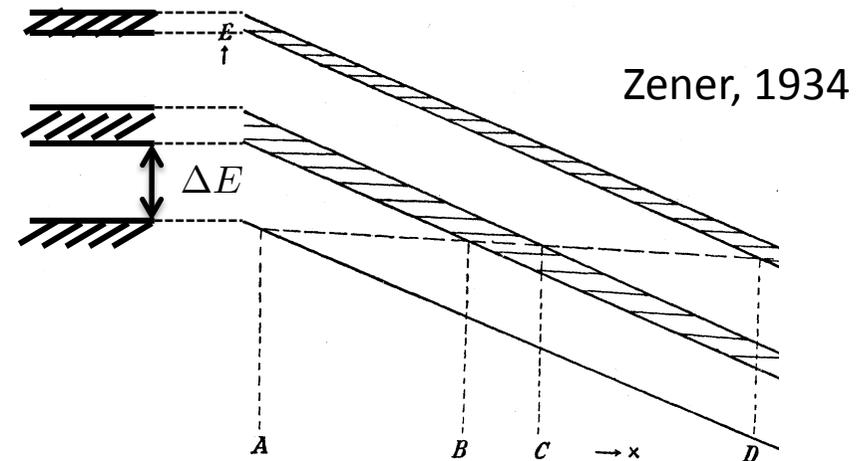
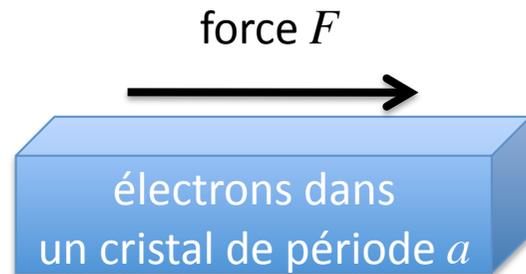
Année 2012-13



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

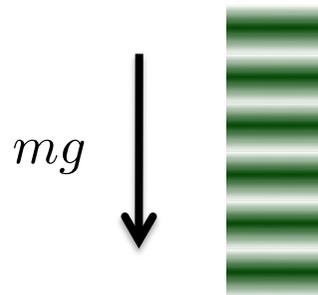
Rappel du cours précédent : l'oscillation de Bloch

champ électrique uniforme

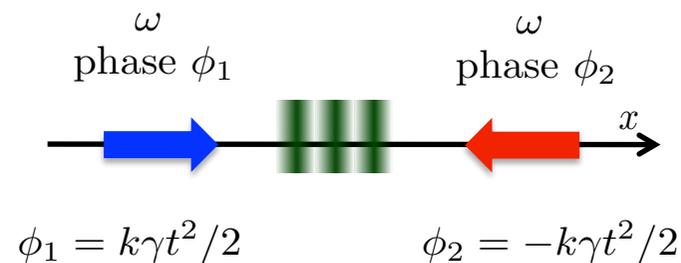


Si le passage par effet tunnel est négligeable, l'électron oscille à la pulsation $\omega_B = Fa/\hbar$

Avec des atomes froids : $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F\hat{x}$ $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$

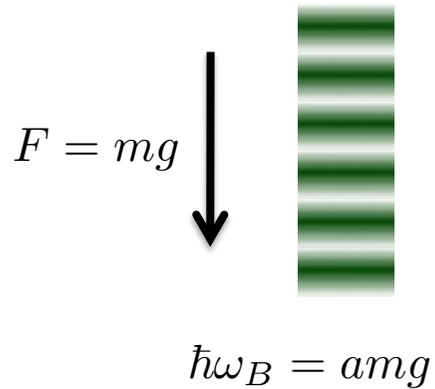


référentiel du laboratoire

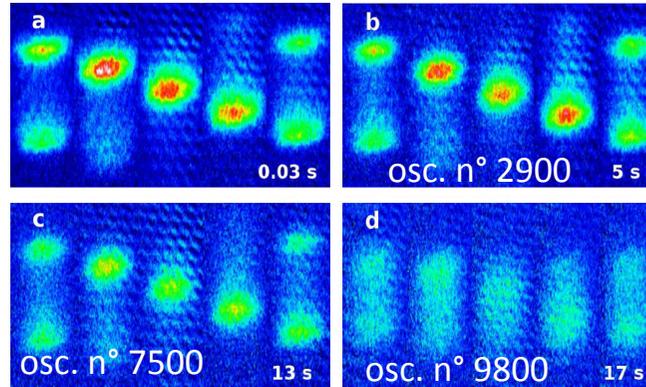


référentiel accéléré

Rappel du cours précédent (suite)



Groupe de G. Tino (2011), ^{88}Sr



$a = 266 \text{ nm}$
 $\omega_B/2\pi = 574 \text{ Hz}$

$V_0 \approx 2 \text{ à } 3 E_r$

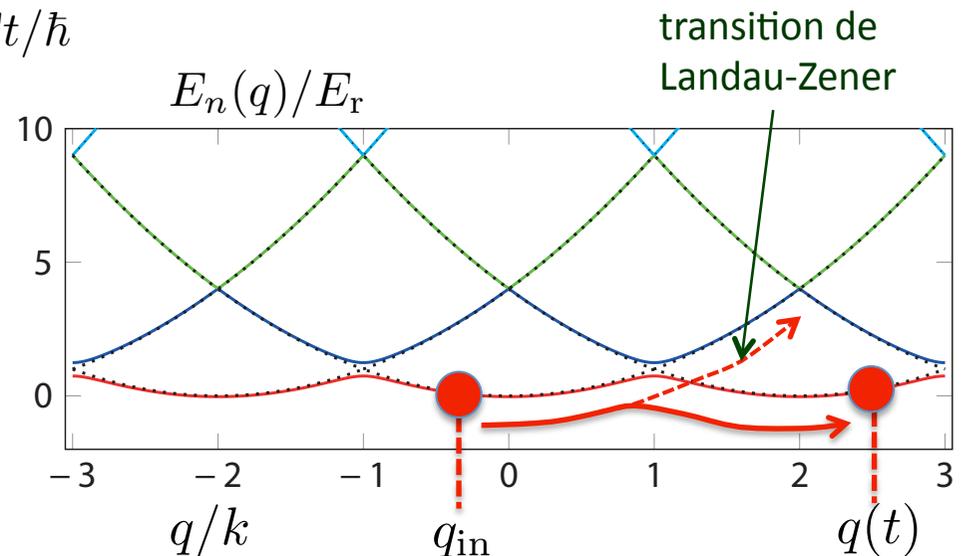
distributions après temps de vol

Défilement du quasi-moment : $q(t) = q_{\text{in}} + Ft/\hbar$

Suivi adiabatique de la bande si $F \ll F_c$

$$\psi(x, 0) = e^{ixq_{\text{in}}} u_{n, q_{\text{in}}}(x)$$

$$\longrightarrow \psi(x, t) \propto e^{ixq(t)} u_{n, q(t)}(x)$$

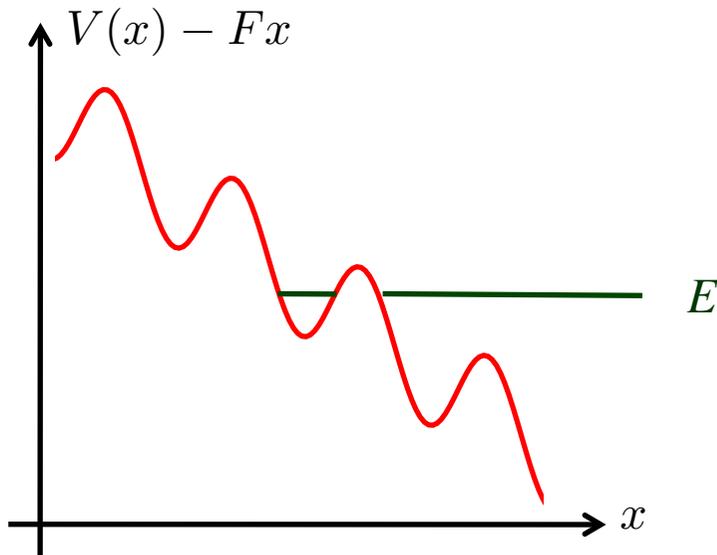


5.

Les échelles de Wannier-Stark

Le problème de Wannier-Stark

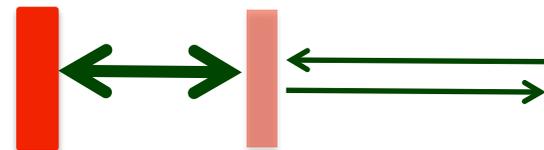
Peut-on trouver les états propres de $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F\hat{x}$?



$$V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$

Spectre continu allant de $-\infty$ à $+\infty$

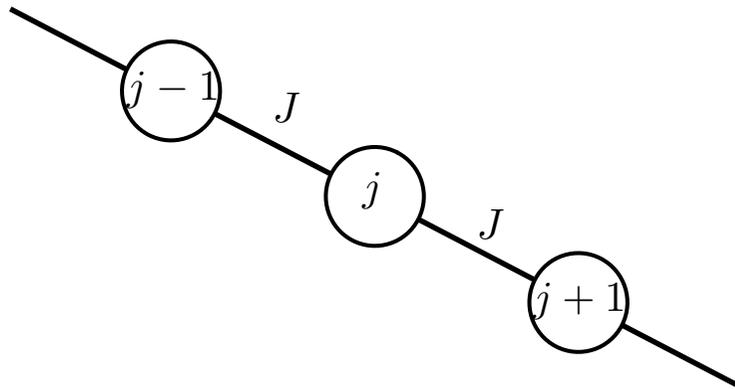
Il peut y avoir des résonances de type Fabry-Perot :



Pas d'états liés, mais des résonances de diffusion (formalisme de la matrice S)

Le problème de Wannier-Stark (suite)

Si on se restreint à une seule bande d'énergie (où un nombre fini de bandes), le problème change de nature.



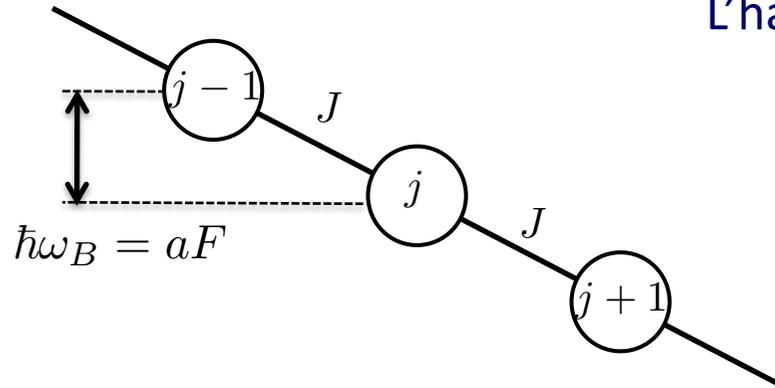
Le spectre d'énergie devient entièrement discret :

uniquement des états liés

Nous allons faire cette approximation à une bande dans ce qui suit.

Il faut néanmoins se souvenir que ces états liés acquièrent une largeur non nulle dès que l'on prend en compte la possibilité de changement de bande par transition Landau-Zener

La solution du problème de Wannier-Stark à une bande



L'hamiltonien du problème s'écrit :

$$\hat{H} = -J \left(\hat{T} + \hat{T}^\dagger \right) - Fa \sum_j j |w_j\rangle \langle w_j|$$

$$\hat{T} = \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j|$$

Recherche des états propres $|\psi\rangle = \sum_j c_j |w_j\rangle$: $-J (c_{j-1} + c_{j+1}) - aF j c_j = E c_j$

à rapprocher de la définition des fonctions de Bessel : $\frac{x}{2} (\mathcal{J}_{n+1}(x) + \mathcal{J}_{n-1}(x)) = n \mathcal{J}_n(x)$

$$E = -j_0 aF$$

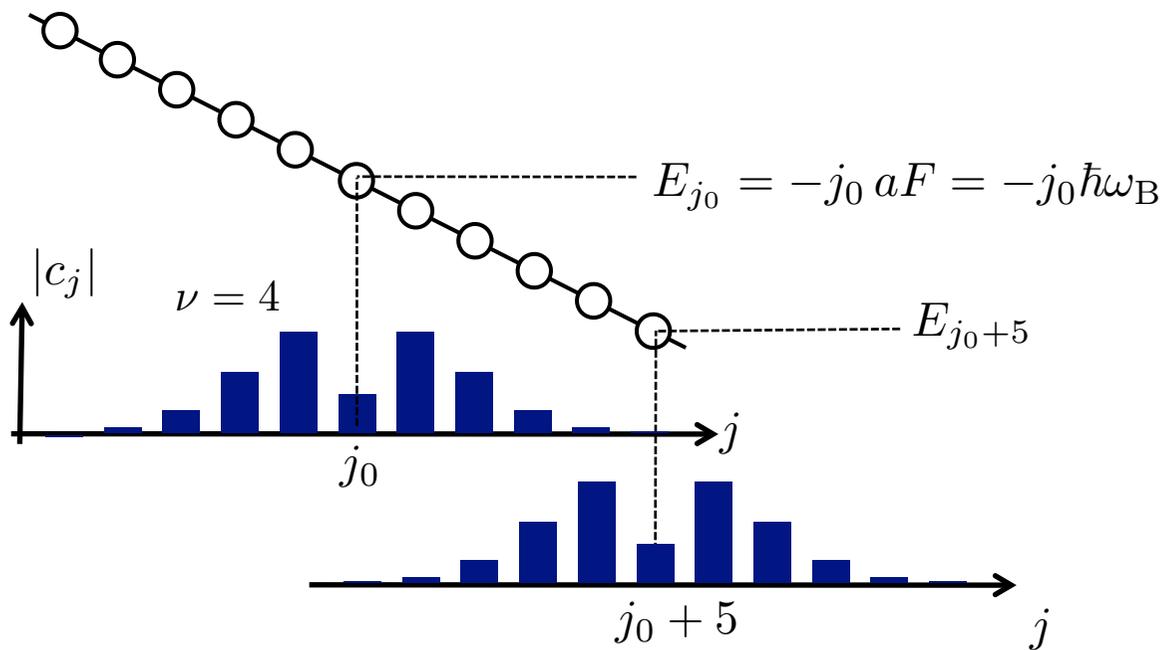
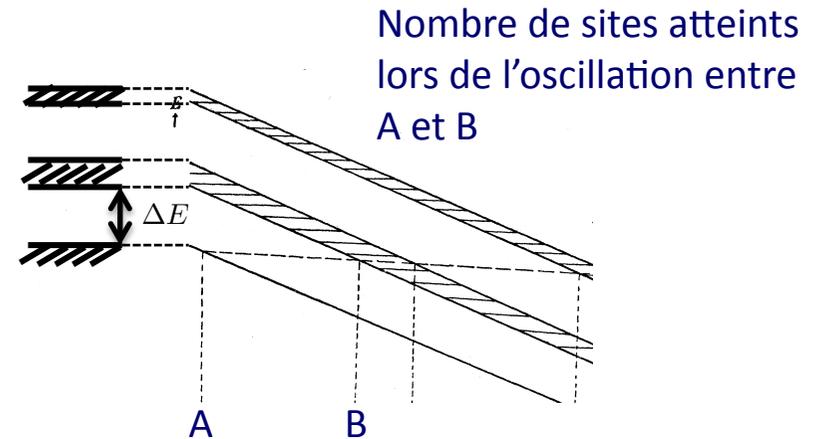
$$\frac{x}{2} \longleftrightarrow \frac{J}{aF} \quad n \longleftrightarrow j_0 - j$$

La solution du problème de Wannier-Stark (suite)

Le paramètre sans dimension du problème : $\nu = \frac{\Delta E}{aF} = \frac{4J}{aF}$

Etats propres de l'hamiltonien :

$$|\Phi_{j_0}\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_{j-j_0}(\nu/2) |w_j\rangle$$

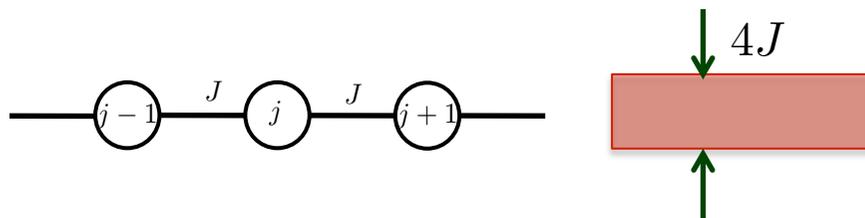


Extension de $\sim \nu/2$ sites de part et d'autre du site central j_0

La nature du spectre de l'hamiltonien

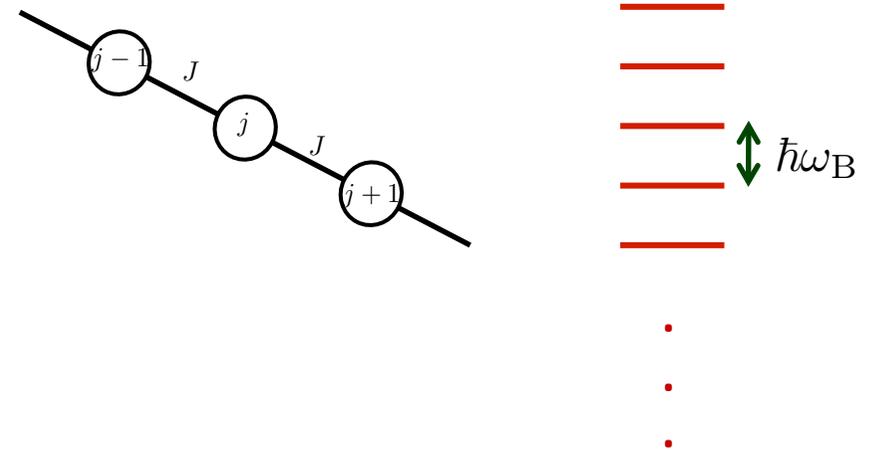
Approximation à une bande

Force nulle



*spectre continu et borné,
bande d'énergie*

Force non nulle

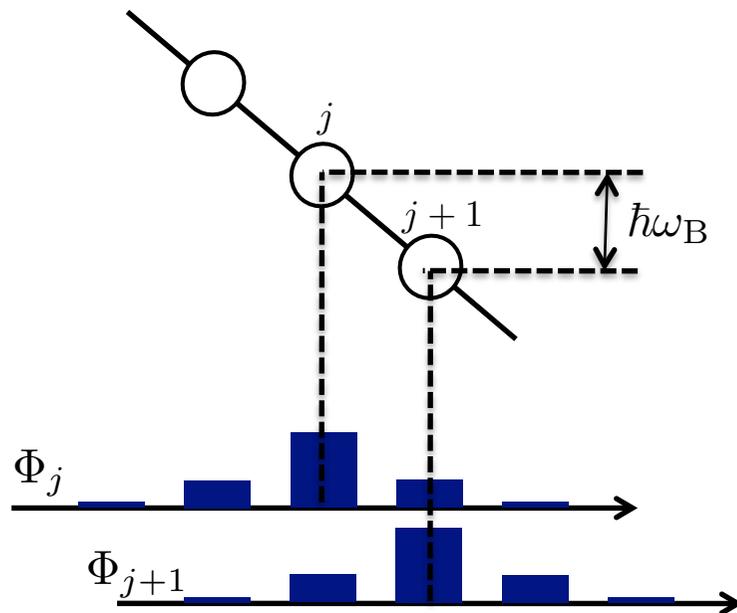


*spectre discret et non borné,
échelle de Wannier-Stark*

Spectroscopie des échelles de Wannier-Stark

On sonde les états propres de l'hamiltonien de Wannier-Stark avec une perturbation monochromatique de faible amplitude

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F\hat{x} \longleftrightarrow \hat{W}(x, t) = \hat{W}^{(+)}(x) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$



Couplage résonant de Φ_j vers $\Phi_{j'}$ si

$$\longrightarrow \langle \Phi_{j'} | \hat{W}^{(\pm)}(x) | \Phi_j \rangle \neq 0$$

$$\longrightarrow \omega \approx \pm |j - j'| \omega_B$$

spectre symétrique dans l'approximation à une bande

Spectroscopie de Wannier-Stark vs. oscillations de Bloch

Les oscillations de Bloch

On prépare les atomes dans un état qui n'est pas un état propre de

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F\hat{x}$$

et on regarde comment il évolue librement : réponse percussionnelle

La spectroscopie de Wannier-Stark

Le système peut se trouver initialement dans un état propre de l'hamiltonien et on mesure sa réponse à une sonde de faible amplitude

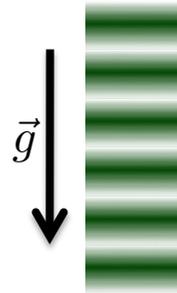
$$\hat{W}(x, t) = \hat{W}^{(+)}(x) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

Mesure de la gravité par spectroscopie de Wannier-Stark

SYRTE 2011, 2013

groupe de F. Pereira dos Santos

Atomes de ^{87}Rb dans
un réseau vertical
de pas $a=266\text{ nm}$

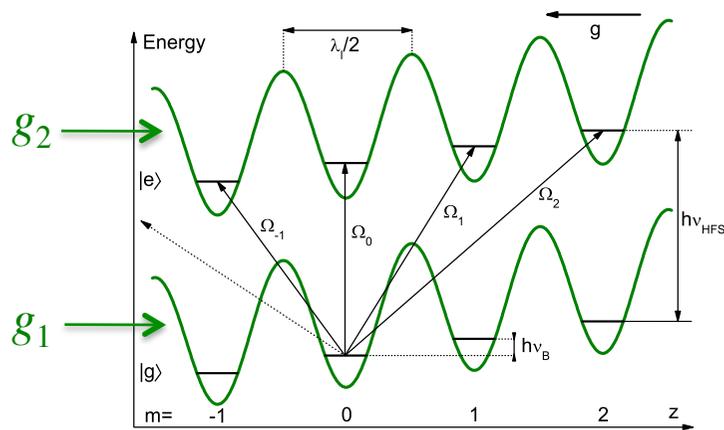
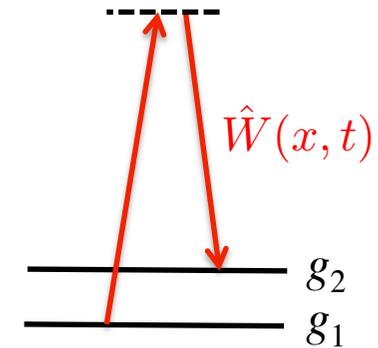


$$\hbar\omega_B = mga$$

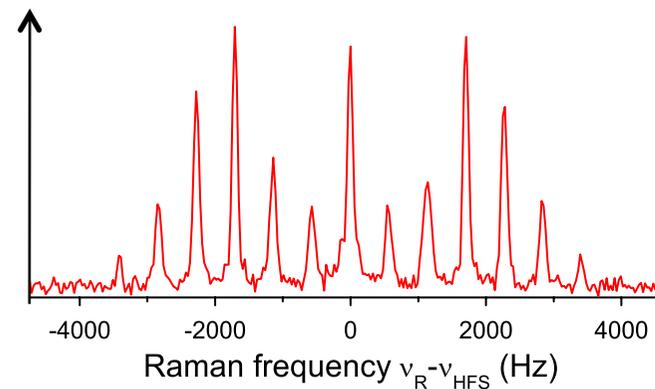
$$\omega_B/2\pi = 569\text{ Hz}$$

$$V_0 = 3.9 E_R$$

$$\nu \sim 7$$



Population de g_2



Sensibilité relative : $0.9 \cdot 10^{-5}$ en 1 s, comparable au résultat de Florence ($1.5 \cdot 10^{-7}$ en une heure)

Pour comparaison : interféromètre atomique en chute libre (plusieurs dizaines de cm)

$$\delta g / g \approx 0.7 \cdot 10^{-7} \text{ en } 1 \text{ s}$$

6.

Perspectives et applications

Mesure de h / m (m : masse d'un atome d'une espèce donnée)

Mesure de forces au voisinage de surfaces

La mesure de h / m

Importance métrologique :

Nouvelle définition de l'unité de masse

Mesure de la constante de structure fine α (constante fondamentale des interactions électromagnétiques)

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

Si « on croit » à l'électrodynamique quantique, α peut se « déduire » de la mesure de l'anomalie gyromagnétique de l'électron (Gabrielse, Harvard) :

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999\,084\,(51) \quad [0.37 \text{ ppb}]$$

Pour un mesure indépendante de l'électrodynamique quantique :

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c} \frac{m}{m_e} \frac{h}{m}$$

R_∞ : constante de Rydberg

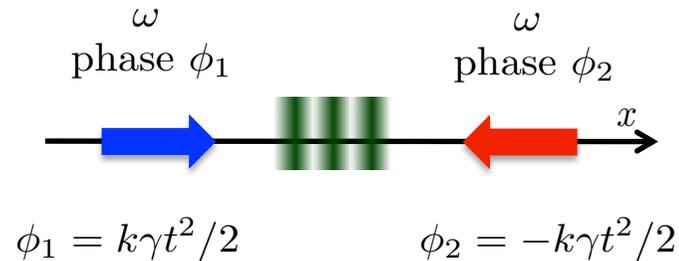
m_e : masse de l'électron

Autre mesure de α : effet Hall quantique [18 ppb]

Mesure de \hbar / m avec les oscillations de Bloch

Groupe de F. Biraben, Laboratoire Kastler Brossel

Réseau accéléré

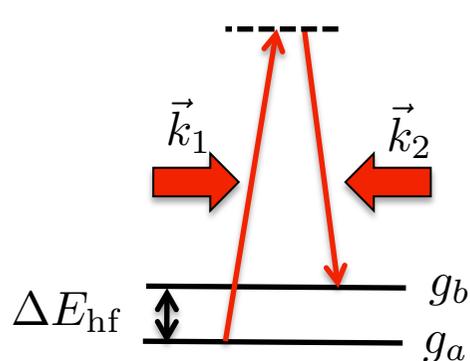


Transfert d'impulsion dans le référentiel du laboratoire

$$p_{\text{fin}} = p_{\text{in}} + 2N \hbar k$$

avec $N \gg 1$ (entre 500 et 1000)

Mesure des impulsions initiales et finales grâce à l'effet Doppler (spectroscopie Raman)



$$\hbar\omega(p) = \Delta E_{\text{hf}} + \frac{[p + \hbar(k_1 + k_2)]^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}$$



$$\frac{\hbar}{m} = \frac{\omega(p_{\text{fin}}) - \omega(p_{\text{in}})}{2Nk(k_1 + k_2)}$$

Mesure de h / m avec les oscillations de Bloch (suite)

Bouchendira et al., 2011 $\frac{\hbar}{m} = \frac{\omega(p_{\text{fi}}) - \omega(p_{\text{in}})}{2Nk(k_1 + k_2)} \quad V_0 \sim 100 E_r$

Mesures faites avec un réseau vertical

- accélération vers le haut ou vers le bas : permet d'éliminer l'effet de la gravité
- schéma interférométrique pour améliorer la précision de la mesure de p_{in} et p_{fi}

$$\frac{h}{m_{\text{Rb}}} = 4.591\,359\,2729(57) \cdot 10^{-9} \text{m}^2/\text{s} \quad [1.2 \text{ ppb}]$$

L'expression $\alpha^2 = \underbrace{\frac{2R_\infty}{c} \frac{m}{m_e} \frac{h}{m}}_{[0.44 \text{ ppb}]}$ conduit alors à $\frac{1}{\alpha} = 137.035\,999\,037(91) \quad [0.66 \text{ ppb}]$
(gain d'un facteur 7)

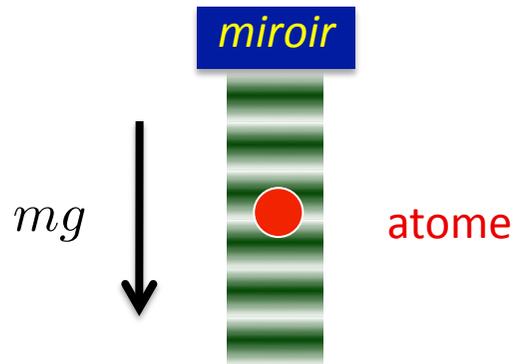
La comparaison avec la mesure de l'anomalie gyromagnétique de l'électron permet :

- de tester la contribution des muons et des hadrons,
- si on croit à l'électrodynamique quantique, de contraindre une possible structure de l'électron ou les paramètres de particules de matière noire.

Mesures de forces faibles

La relation $\hbar\omega_B = Fa$ connecte une mesure de force et une mesure de fréquence

Carusotto et al. (2005) : comment la proximité d'un matériau (par exemple le miroir créant l'onde stationnaire) modifie-t-elle la fréquence de Bloch liée à la gravité ?



Potentiel d'interaction qui prend en compte les effets de van der Waals-London, de Casimir-Polder, et les corrections thermiques :

$$\frac{\Delta\omega_B}{\omega_B} = -\frac{0.17}{D^4} (\mu\text{m})^4$$

correction de 10^{-5} à la gravité pour $D = 10 \mu\text{m}$
(une précision de 10^{-7} est possible)

Wolf et al. (2007) : interféromètre à partir d'états de Wannier-Stark pour une recherche de forces correspondant à une déviation par rapport à la loi de Newton

Mesures locales, avec une position définie au micron près

Cours 6.

Topologie dans un réseau : l'exemple des points de Dirac



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

1.

Points de Dirac dans une zone de Brillouin

Les points de Dirac

Réseau à deux dimensions, quasi-moment $\vec{q} = (q_x, q_y)$

Bandes d'énergie $E_n(q_x, q_y)$

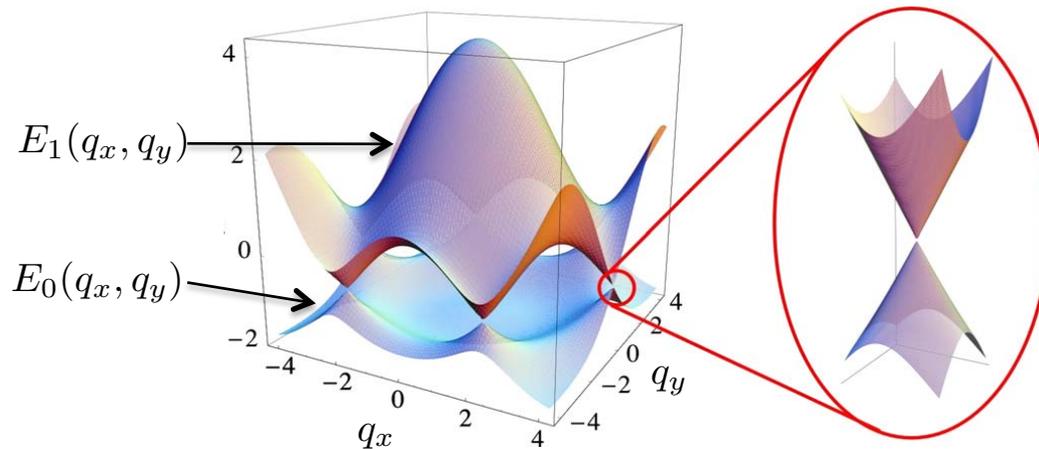


figure tirée de Castro-Neto et al (2009)

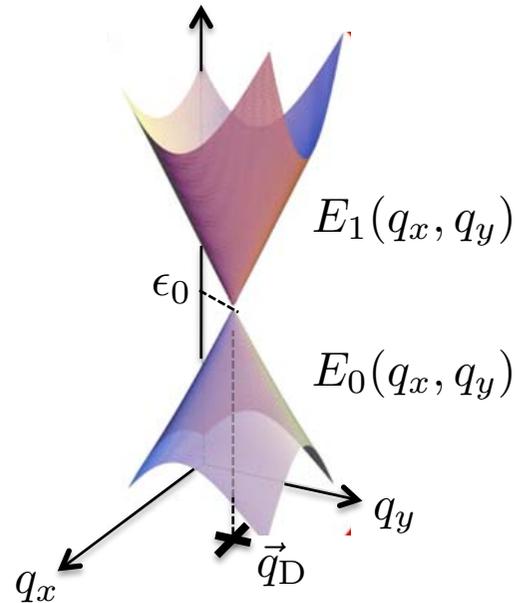
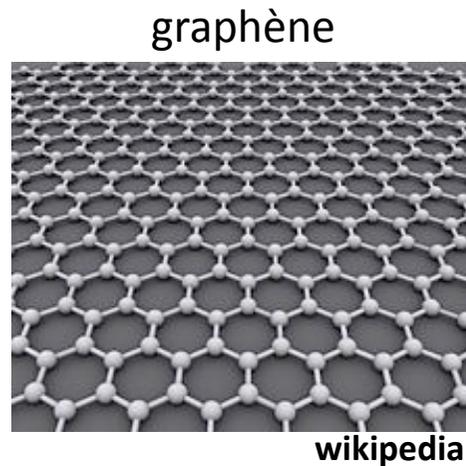
Un point de Dirac est un point de contact isolé entre deux bandes d'énergie avec :

- une relation de dispersion linéaire au voisinage de ce point
- une chiralité (positive ou négative)

Caractéristique emblématique du graphène (réseau 2D hexagonal), mais ces points de Dirac peuvent apparaître dans beaucoup d'autres configurations.

Expérience de Zurich, groupe de T. Esslinger : Tarruell et al (2012)

La relation de dispersion linéaire



$$E_{0/1}(\vec{q}) \approx \pm \hbar c |\vec{q} - \vec{q}_D| + \epsilon_0$$

c : dimension d'une vitesse

*dans le graphène : 1/300^{ème}
de la vitesse de la lumière*

Vitesse de groupe pour un paquet d'ondes composé de quasi moments au voisinage de \vec{q}_D :

$$\vec{v}_{g,0/1} = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{q}} E_{0/1}(\vec{q}) = \pm c \frac{\delta \vec{q}}{|\delta \vec{q}|}$$

$$|\vec{v}_{g,0/1}| = c$$

$$\delta \vec{q} = \vec{q} - \vec{q}_D$$

simule le mouvement de particules ultra-relativistes, décrit par l'équation de Dirac

La chiralité des points de Dirac

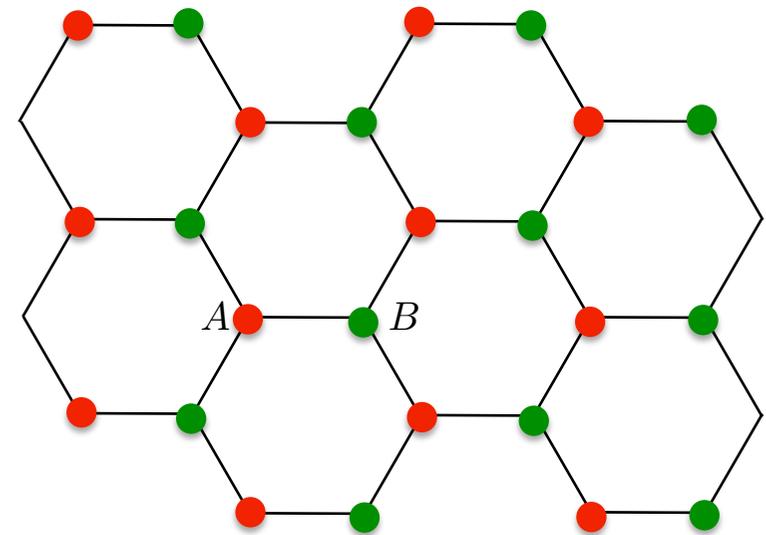
Modélisation « minimale » pour obtenir ces points :

- modèle de liaisons fortes
- cellule unité à deux sites **A** et **B** (pour avoir deux bandes d'énergie)

Même énergie ϵ_0 pour les sites **A** et les sites **B**

Sauts possibles

- de **A** vers **B**
- de **B** vers **A**



Hamiltonien dans l'espace réciproque :

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & \epsilon_0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A, \vec{j} \rightarrow A, \vec{j}' & B, \vec{j} \rightarrow A, \vec{j}' \\ A, \vec{j} \rightarrow B, \vec{j}' & B, \vec{j} \rightarrow B, \vec{j}' \end{pmatrix}$$

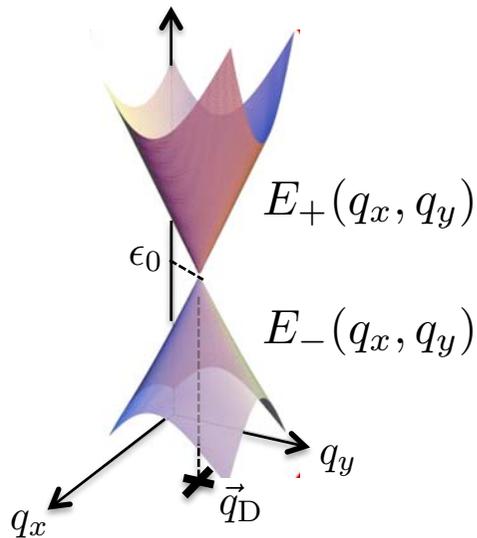
La chiralité des points de Dirac (suite)

Hamiltonien dans l'espace réciproque : $\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & \epsilon_0 \end{pmatrix}$

$f(q_x, q_y)$: fonction complexe dont la valeur précise dépend des caractéristiques du réseau

graphène : $f(q_x, q_y) = -J \left(1 + e^{i3aq_x/2} \cos(\sqrt{3}aq_y/2) \right)$ J : coefficient tunnel
 a : distance A-B

Deux bandes d'énergie : $E_{\pm}(q_x, q_y) = \epsilon_0 \pm |f(q_x, q_y)|$



Point de Dirac : $f(\vec{q}_D) = 0$

Quelle est la structure des états propres de $\hat{\mathcal{H}}(\vec{q})$ au voisinage de \vec{q}_D ?

La chiralité des points de Dirac (suite)

Hamiltonien dans l'espace réciproque : $\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & \epsilon_0 \end{pmatrix}$ $f(\vec{q}_D) = 0$
 $\delta\vec{q} = \vec{q} - \vec{q}_D$

Au voisinage de \vec{q}_D , on a (à une phase et une homothétie près) : $f(q_x, q_y) = \hbar c(\delta q_x \pm i\delta q_y)$
 $= \hbar c \delta q e^{\pm i\varphi}$

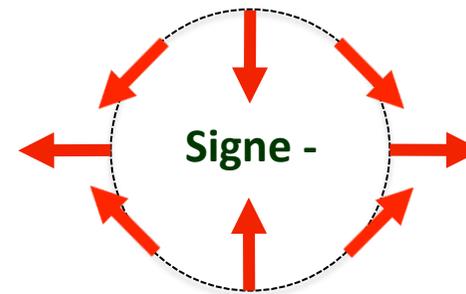
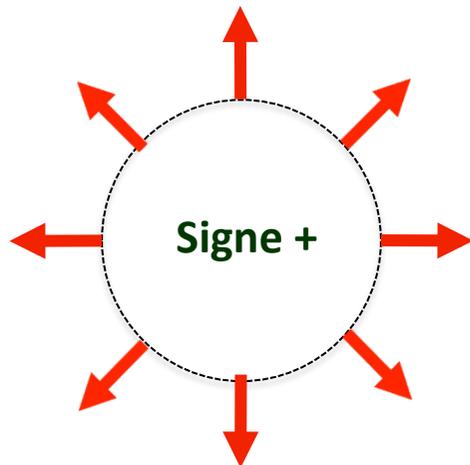
Signe +

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \epsilon_0 \hat{1} + \hbar c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\delta q}$$

Signe -

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \epsilon_0 \hat{1} + \hbar c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\delta q}^*$$

$\hat{\vec{\sigma}}$: matrices de Pauli. Equivalent de l'hamiltonien d'un spin $\frac{1}{2}$: $\hat{H} = \gamma \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}$
au voisinage du zéro d'un champ magnétique $\vec{B} = b(x\vec{u}_x \pm y\vec{u}_y)$



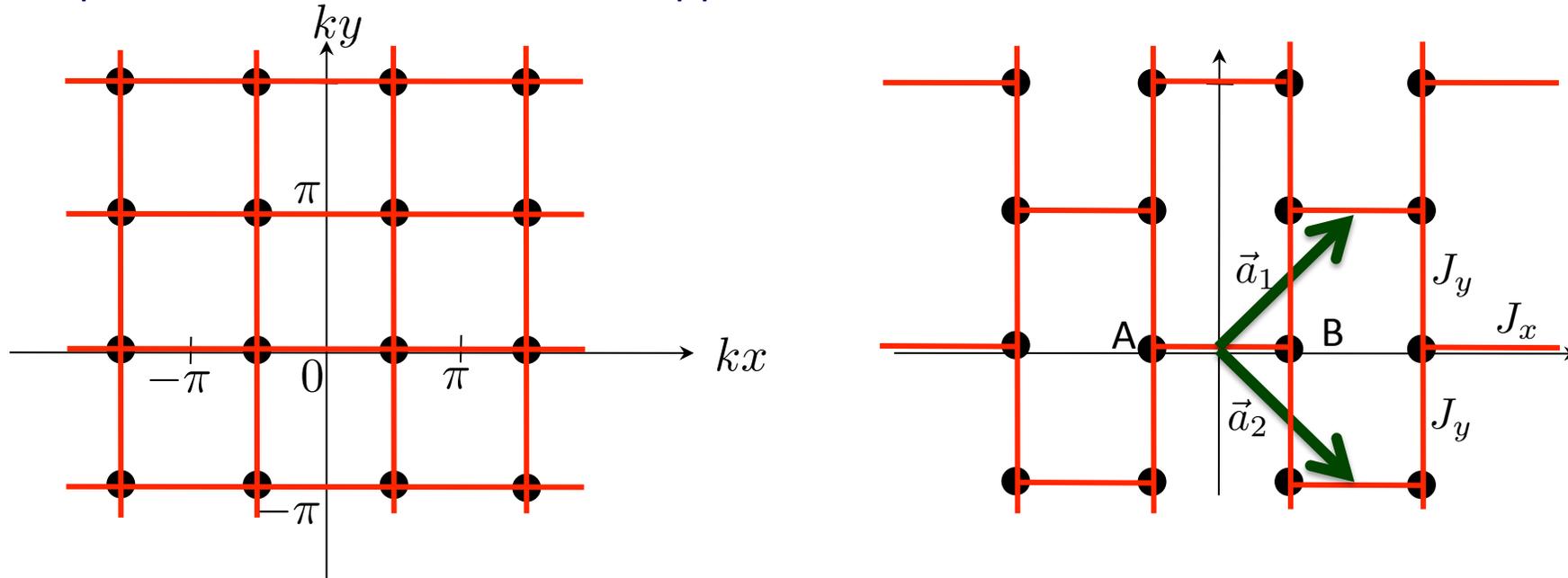
2.

Le réseau « mur de briques »

Le réseau en mur de briques

Zurich, 2012

On part d'un réseau carré et on supprime un lien horizontal sur deux :



Forme de Bloch : $|\psi_{\vec{q}}\rangle = \sum_{\vec{j}} e^{i\vec{r}_{\vec{j}} \cdot \vec{q}} \left(\alpha_{\vec{q}} |w_{A,\vec{j}}\rangle + \beta_{\vec{q}} |w_{B,\vec{j}}\rangle \right)$ $\vec{r}_{\vec{j}} = j_1 \vec{a}_1 + j_2 \vec{a}_2$

$$\hat{H} |\psi_{\vec{q}}\rangle = E(\vec{q}) |\psi_{\vec{q}}\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) \begin{pmatrix} \alpha_{\vec{q}} \\ \beta_{\vec{q}} \end{pmatrix} = E(\vec{q}) \begin{pmatrix} \alpha_{\vec{q}} \\ \beta_{\vec{q}} \end{pmatrix}$$

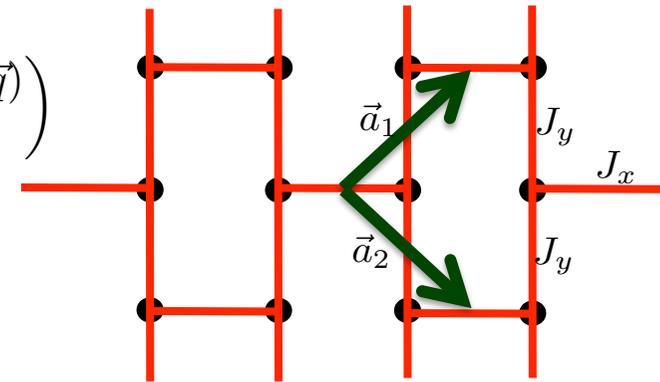
avec $\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & \epsilon_0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{q}) = -J_x - J_y (e^{i\vec{a}_1 \cdot \vec{q}} + e^{i\vec{a}_2 \cdot \vec{q}})$

Les points de Dirac du réseau « mur de briques »

$$f(\vec{q}) = -J_x - J_y (e^{i\vec{a}_1 \cdot \vec{q}} + e^{i\vec{a}_2 \cdot \vec{q}})$$

$$= -J_x - 2J_y e^{iaq_x} \cos(aq_y)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & \epsilon_0 \end{pmatrix}$$



Quels sont les zéros de la fonction $f(\vec{q})$?

$$\sin(aq_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_x = 0 \pmod{\pi/a}$$

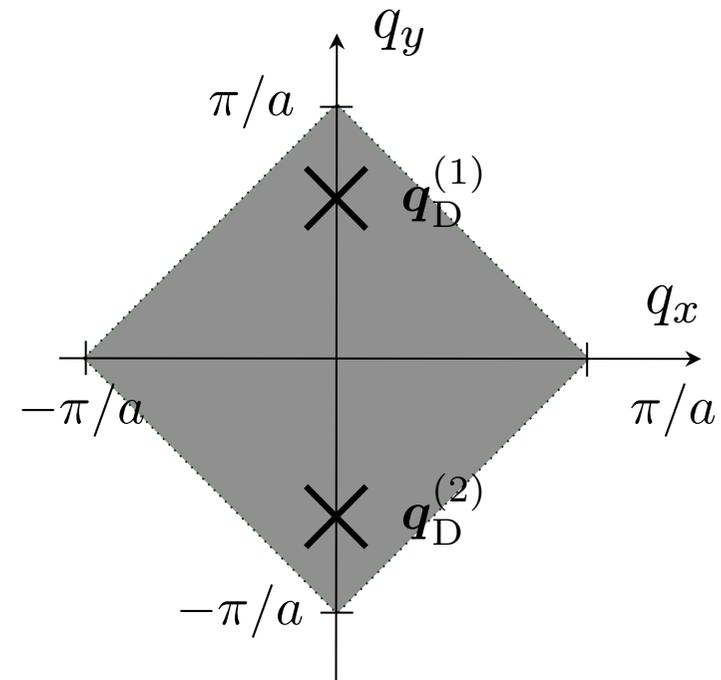
$$\cos(aq_x) \cos(aq_y) = -\frac{J_x}{2J_y}$$

Deux types de situations possibles :

$J_x > 2J_y$: pas de solution

$J_x < 2J_y$: $\cos(aq_y) = -J_x/(2J_y)$
deux pts de Dirac de
chiralités opposées

$J_x = 2J_y$: un zéro double à chaque coin
de la zone de Brillouin



La robustesse des points de Dirac

Les points de Dirac apparaissent par paires de chiralité opposée

Invariance par renversement du temps

Si $\psi_{\vec{q}}(\vec{r})$ est fonction propre pour $E(\vec{q})$, alors $\psi_{\vec{q}}^*(\vec{r}) \propto \psi_{-\vec{q}}(\vec{r})$
est également fonction propre pour la même énergie $E(\vec{q})$

\vec{q}_D : point de Dirac  $-\vec{q}_D$: point de Dirac

Les points de Dirac sont topologiquement robustes

Tant que l'on maintient l'équivalence entre les sites A et B ($E_A = E_B$), on ne peut pas faire apparaître ou disparaître un point de Dirac « brutalement ».

Il faut passer par une « fusion » de deux points de Dirac de parités opposées

La robustesse des points de Dirac (suite)

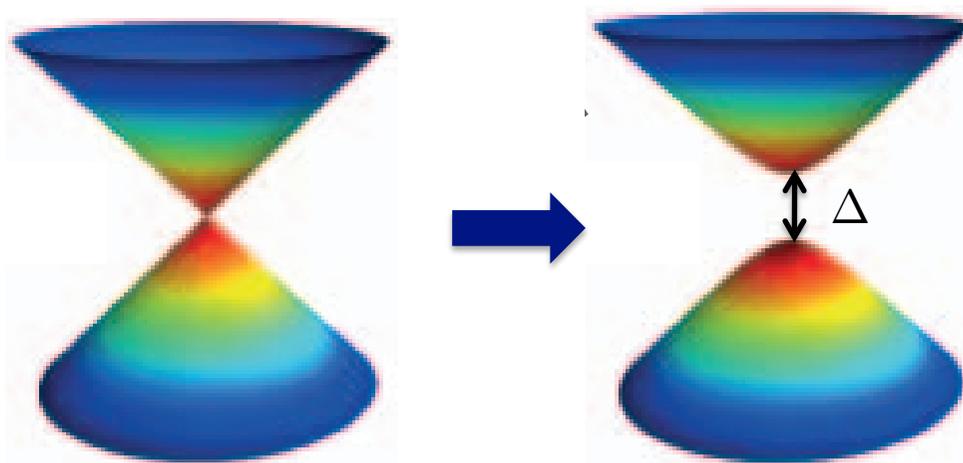
Nous avons jusqu'ici raisonné sur l'hamiltonien du réseau réciproque

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & \epsilon_0 \end{pmatrix} \quad E_{\pm}(\vec{q}) = \epsilon_0 \pm |f(\vec{q})|$$

Si on disymétrise les points A et B, la structure en points de Dirac disparaît :

$$\begin{array}{l} A : \epsilon_0 + \Delta \\ B : \epsilon_0 - \Delta \end{array} \quad \text{alors} \quad \hat{\mathcal{H}}(\vec{q}) = \epsilon_0 \hat{1} + \begin{pmatrix} \Delta & f^*(\vec{q}) \\ f(\vec{q}) & -\Delta \end{pmatrix}$$

dégénérescence levée aux points où $f(\vec{q})$ s'annule : $E_{\pm}(\vec{q}) = \epsilon_0 \pm [|f(\vec{q})|^2 + \Delta^2]^{1/2}$



Un cas intéressant : Δ est
lui-même une fonction de \vec{q}



effet Hall quantique,
isolants topologiques

3.

Le graphène en version atomes froids

Tarruell et al, 2012

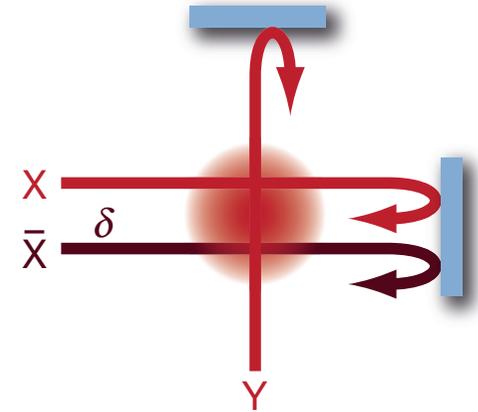
Le réseau « mur de briques » avec de la lumière

On superpose plusieurs ondes stationnaires selon les axes Ox et Oy :

→ Une onde intense selon Ox :

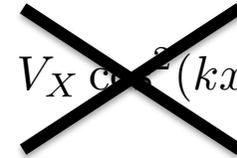
$$V_1(\vec{r}) = -V_{\bar{X}} \cos^2(kx + \theta/2)$$

θ variable en changeant la fréquence de l'onde lumineuse. On prend $\theta = \pi$ pour l'instant.



→ Une paire d'ondes plus faibles verrouillées en phase :

$$V_2(\vec{r}) = -V_Y \cos^2(ky) - 2\sqrt{V_X V_Y} \cos(kx) \cos(ky) - V_X \cos^2(kx)$$



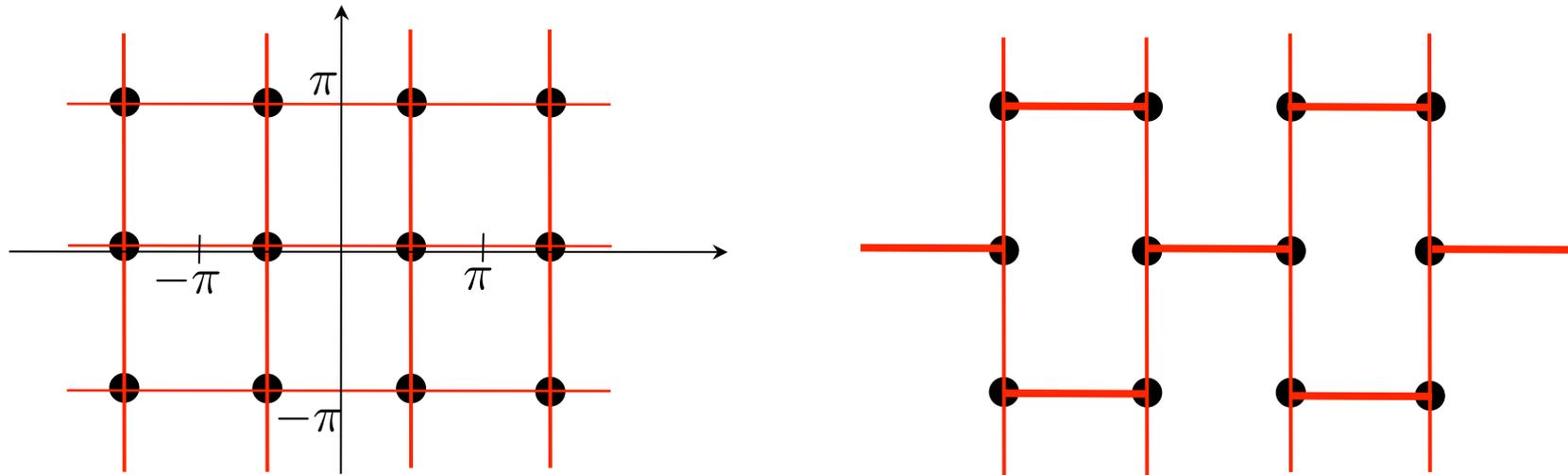
Choix des intensités tel que $V_X \ll \sqrt{V_X V_Y} \ll V_Y < V_{\bar{X}}$

Si on ne garde que les deux termes dominants, réseau carré :

$$-V_{\bar{X}} \sin^2(kx) - V_Y \cos^2(ky)$$

Le réseau « mur de briques » avec de la lumière (suite)

$$-V_{\bar{X}} \sin^2(kx) - V_Y \cos^2(ky) \quad V_{\bar{X}}, V_Y > 0$$



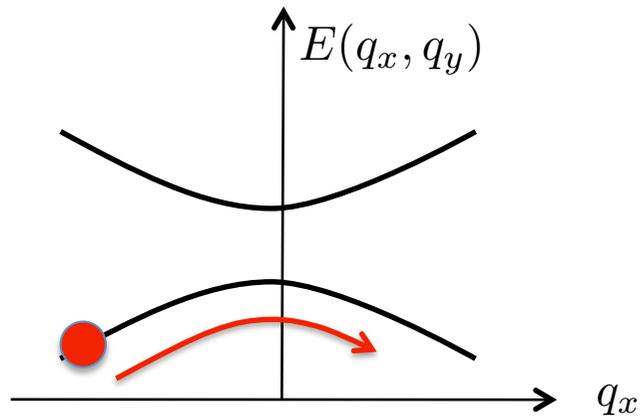
On prend maintenant en compte l'effet de $-2\sqrt{V_X V_Y} \cos(kx) \cos(ky)$

Lien centré en $\cos(kx) \cos(ky) = +1$: effet tunnel renforcé

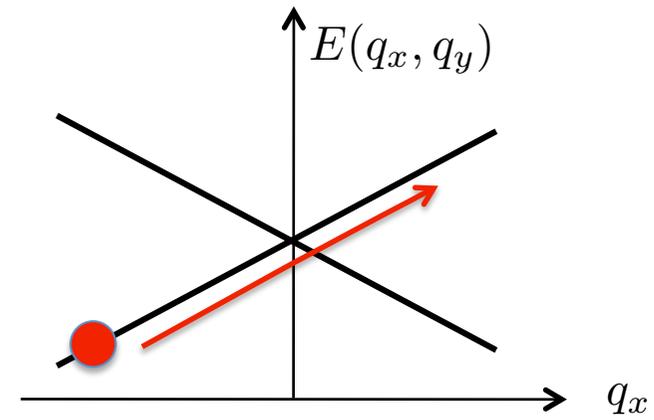
Lien centré en $\cos(kx) \cos(ky) = 0$: effet tunnel inchangé

Lien centré en $\cos(kx) \cos(ky) = -1$: effet tunnel diminué

Points de Dirac et oscillations de Bloch

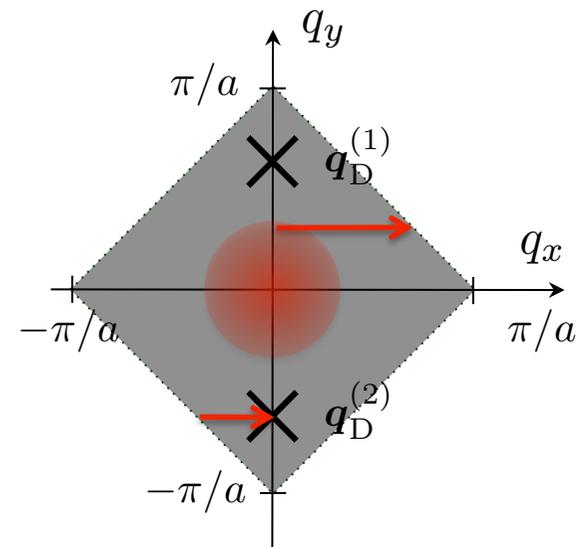
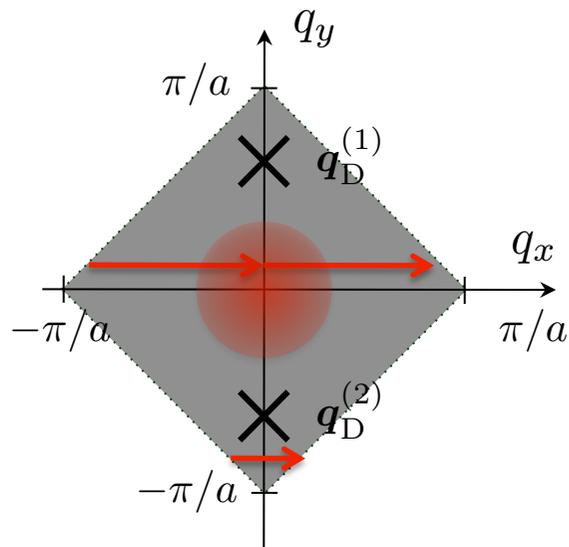


croisement évité :
suivi adiabatique possible



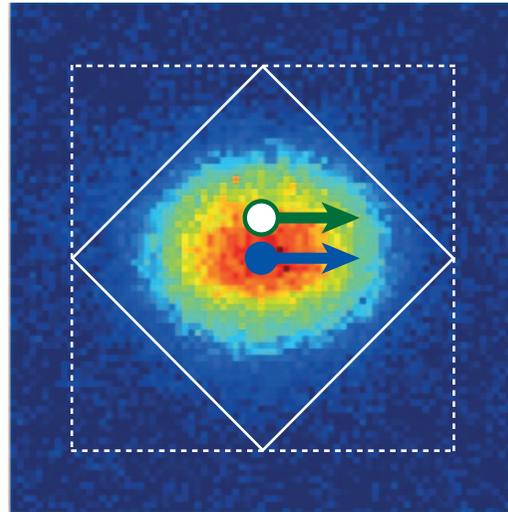
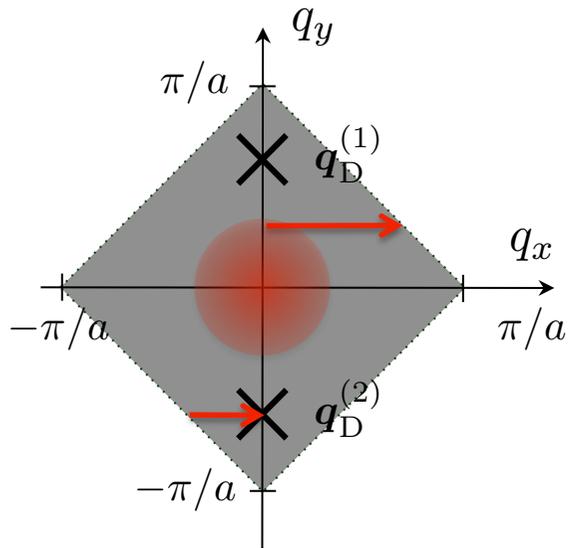
point de Dirac :
pas de suivi adiabatique possible

Oscillations de Bloch induites par la force créée par un gradient de champ magnétique selon x

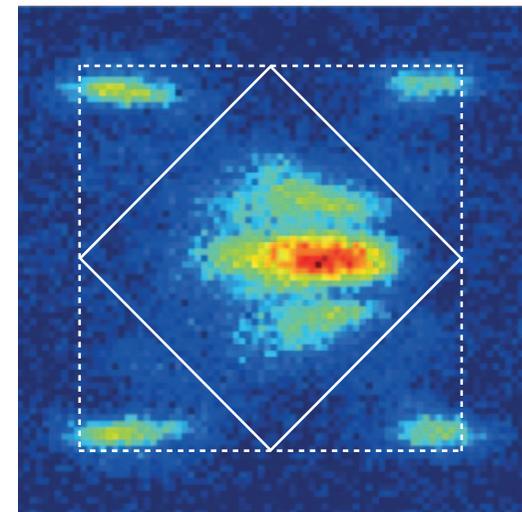


Points de Dirac et oscillations de Bloch (suite)

Atomes de ^{40}K (fermions polarisés, sans interaction)



instant initial



après une période de Bloch

Les quasi-moments qui n'ont pas de suivi adiabatique lors de l'oscillation de Bloch sont bien là où on les attend selon la prédiction:

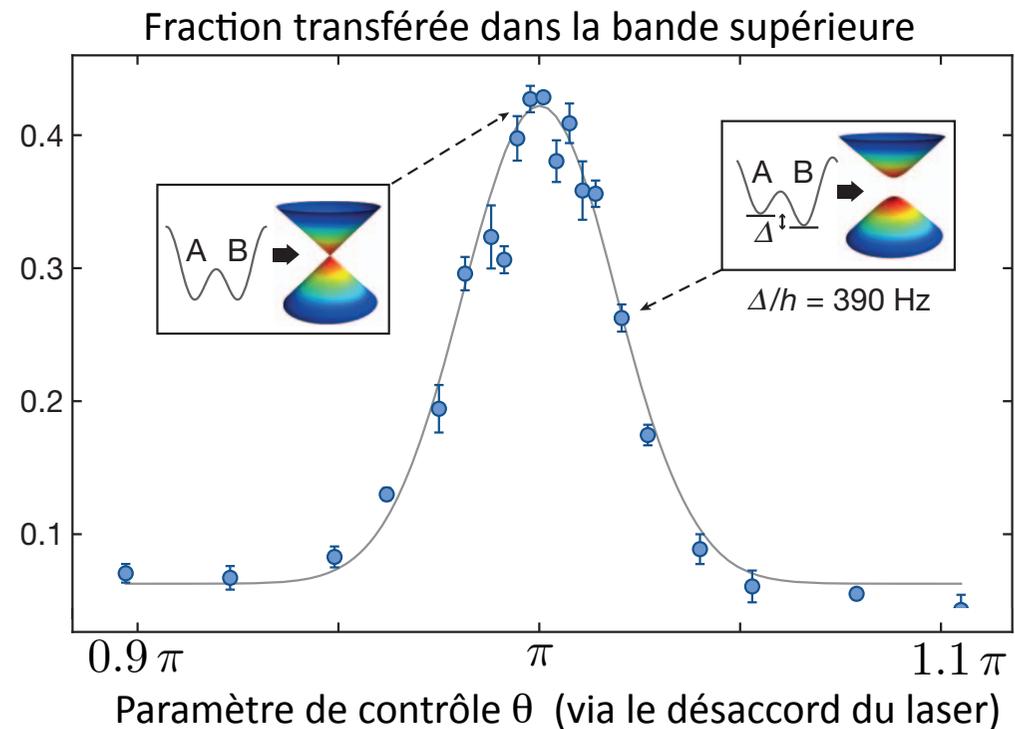
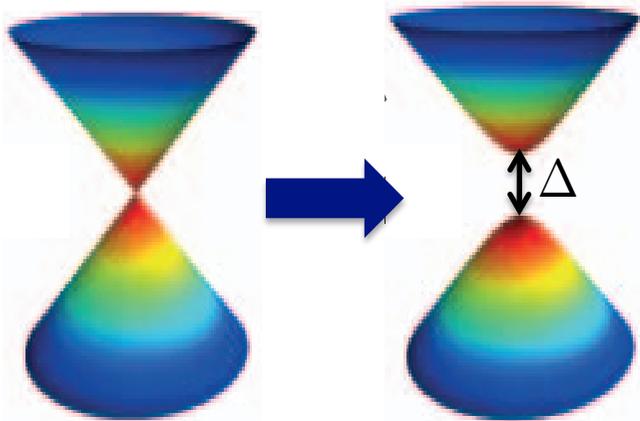
$$\cos(aq_y) = -J_x/(2J_y)$$

Disparition des points de Dirac

On revient sur le potentiel intense : $V_1(\vec{r}) = -V_{\bar{X}} \cos^2(kx + \theta/2)$

jusqu'ici, on a pris $\theta = \pi$: les sites A et B jouaient donc des rôles équivalents

Si $\theta \neq \pi$, on disymétrise les rôles des sites de type A et des sites de type B



expérience : Tarruell et al., 2012

analyse théorique : Lim et al., 2012

Conclusions

Premier pas dans le contrôle de la topologie des bandes dans un réseau optique

Mise en évidence des points de Dirac par oscillations de Bloch

Contrôle de la position de ces points

Beaucoup d'aspects restent à explorer, par exemple :

Chiralité des points de Dirac : phase accumulée si un atome tourne autour d'un point (oscillations de Bloch 2D), effet Hall quantique anormal

Aspects paradoxaux de l'équation de Dirac : paradoxe de Klein (transmission quasi-totale d'un paquet d'ondes à travers une barrière de grande hauteur)