Des cages de lumière pour les atomes :
la physique des pièges et des réseaux optiques

Cours 3.
Réseaux optiques dans le régime des liaisons fortes

Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2012-13

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Résumé des cours précédents

Une onde lumineuse stationnaire crée un potentiel périodique permettant de contrôler le mouvement d'un atome

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$

échelle d'énergie naturelle : l'énergie de recul $E_{\rm r} = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

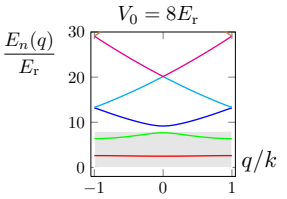
^{87}Rb @ 780 nm :
4 kHz = 0.2 µK

Etats propres de $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \sin^2(k\hat{x})$ sous forme de fonctions de Bloch :

$$\psi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x) \qquad -k < q \leq k$$

$u_{n,q}(x)$ périodique de période $a = \pi/k$

Spectre d'énergie $E_n(q)$ sous forme de bandes



Buts de ce cours

➡ Introduire une nouvelle base de fonctions également bien adaptée à l'étude du mouvement des atomes dans le réseau optique

Particule libre	**Particule dans un réseau**
ondes planes $\lvert p\rangle$ ou $\psi_p(x) = e^{ixp/\hbar}$	fonctions de Bloch $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x)$
états localisés $\lvert x\rangle = \int e^{-ixp/\hbar} \lvert p\rangle \, dp$	« fonctions de Wannier »

➡ Aborder la limite des liaisons fortes : $V_0 \gg E_{\rm r}$

Restriction de la dynamique des particules à une ou deux bandes
Hamiltonien de Hubbard & rôle des interactions

1.

Les fonctions de Wannier

Une nouvelle base intéressante : les fonctions de Wannier

Fonctions localisées à l'échelle du réseau et associées aux bandes d'énergie

Particule libre	**Particule dans un réseau**
$\|x\rangle = \int e^{-ixp/\hbar} \|p\rangle \, dp$	$\|w_{n,j}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-ijaq} \|\psi_{n,q}\rangle \, dq$
$\|x=0\rangle = \int \|p\rangle \, dp$	$\|w_{n,0}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \|\psi_{n,q}\rangle \, dq$

coef. de normalisation : $\left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2}$

On peut vérifier que la fonction $w_{n,j}(x)$ se déduit de $w_{n,0}(x)$ par une translation de *j* périodes du réseau :

$$w_{n,j}(x) = w_{n,0}(x - ja)$$

Importance du choix de la phase des fonctions de Bloch

Dans la définition $|w_{n,0}\rangle = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} |\psi_{n,q}\rangle \, dq$ le choix de la phase de chaque onde de Bloch $|\psi_{n,q}\rangle \to e^{i\theta_n(q)}|\psi_{n,q}\rangle$ joue un rôle essentiel

Walter Kohn (1959)
Si le potentiel $V(x)$ est pair $[\, V(x) = V(-x) \,]$ et si les bandes d'énergie sont disjointes, alors il existe un choix unique de phase tel que :

- la fonction de Wannier est réelle
- la fonction de Wannier est paire ou impaire vis à vis de $x = 0$ ou $x = a/2$
- la fonction de Wannier décroît exponentiellement vite à l'infini

Propriétés des fonctions de Wannier $|w_{n,j}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-ijaq} |\psi_{n,q}\rangle \, dq$

Translation : $w_{n,j}(x) = w_{n,0}(x - ja)$

Il suffit de connaître une fonction de Wannier associée à la bande *n*

Inversion : connaissant la fonction de Wannier associée à la bande *n*, on peut reconstruire toutes les fonctions de Bloch de cette bande

$$\psi_{n,q}(x) \propto \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_{n,0}(x - ja) \, e^{ijaq}$$

Orthogonalité : $\int w_{n,j}(x) \, w_{n',j'}(x) \, dx = \delta_{n,n'} \, \delta_{j,j'}$

orthogonalité interbandes — orthogonalité intersites

En particulier $w_{n,0}(x)$ et $w_{n,0}(x-a)$ sont orthogonales

Transformée de Fourier des fonctions de Wannier

Rappel : la forme de Bloch $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x)$ avec $u_{n,q}(x)$ périodique permet d'écrire

$$u_{n,q}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{n,j}(q) \, e^{i\, j\, 2\pi x/a}$$

$$\psi_{n,q}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{n,j}(q) \, e^{i\, x(q + j\, 2\pi/a)}$$

peigne d'ondes planes

Introduisons la transformée de Fourier de la fonction de Wannier associée à la bande *n*

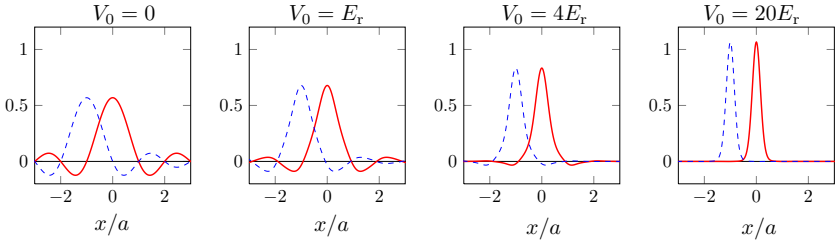
$$\tilde{w}_n(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n,0}(x) \, e^{-ix\kappa} \, dx$$

On peut alors montrer : $\boxed{C_{n,j}(q) = \frac{1}{\sqrt{a}} \, \tilde{w}_n(q + 2\pi j/a)}$

Exemples de fonctions de Wannier

Bande fondamentale ($n = 0$) du potentiel $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ $\quad a = \pi/k$

on trace $w_{0,0}(x)$ $w_{0,-1}(x)$



$\sin(kx)/kx$

Une nouvelle forme de l'hamiltonien

L'hamiltonien est par définition diagonal dans la base des fonctions de Bloch

$$H = \sum_n \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} dq\; E_n(q)\, |\psi_{n,q}\rangle\langle\psi_{n,q}|$$

avec la relation d'orthonormalité pour ces fonctions :

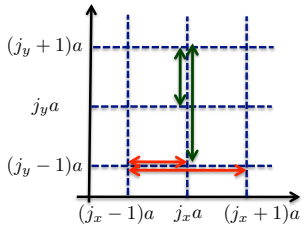
$$\langle\psi_{n,q}|\psi_{n',q'}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_{n,q}(x)\, \psi_{n',q'}(x)\, dx = \delta_{n,n'}\, \delta(q - q')$$

Comment s'écrit l'hamiltonien dans la base des fonctions de Wannier ?

Changement de base donné par : $|w_{n,j}\rangle = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-ijaq}\, |\psi_{n,q}\rangle\, dq$

c'est-à-dire : $\langle\psi_{n,q}|w_{n,j}\rangle = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-ijaq}$

Le cas multidimensionnel



Potentiel périodique

$$V(x, y) = V_0 \sin^2(kx) + V'_0 \sin^2(ky)$$

Fonctions de Bloch

$$\Psi_{\vec{n},\vec{q}}(x, y) = \psi_{n_x,q_x}(x)\; \psi_{n_y,q_y}(y)$$

Fonctions de Wannier

$$w_{\vec{n},\vec{j}}(x, y) = w_{n_x,j_x}(x)\; w_{n_y,j_y}(y)$$

Quand on écrit l'hamiltonien en terme de fonctions de Wannier, on voit apparaître des termes de saut d'un site à un autre avec l'élément de matrice

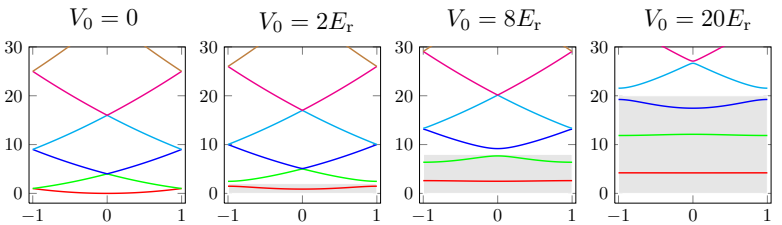
$$\langle w_{\vec{n},\vec{j}}|\hat{H}|w_{\vec{n},\vec{j}'}\rangle = \int w_{\vec{n},\vec{j}}(x, y)(\hat{H}_x + \hat{H}_y)w_{\vec{n},\vec{j}'}(\vec{r})\; d^2r$$

Contribution de $\hat{H}_x$: $\left(\int w_{n_x,j_x} \hat{H}_x w_{n_x,j'_x}\, dx\right)\; \delta_{j_y,j'_y} = J_{n_x}(j_x - j'_x)\; \delta_{j_y,j'_y}$, sauts le long de l'axe x

Contribution de $\hat{H}_y$: sauts le long de l'axe y

2.

Le cas d'un potentiel fortement modulé



ouverture d'un « gap » au niveau des croisements

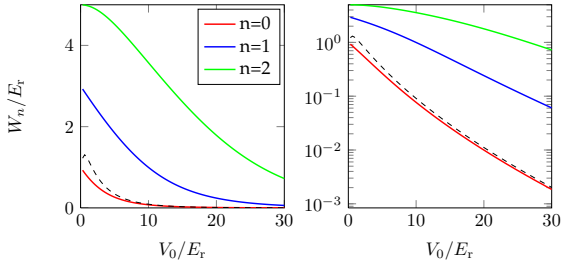
bandes de basse énergie de plus en plus plates

Largeur des bandes permises dans le cas $V_0 \gg E_\mathrm{r}$

Pour le potentiel sinusoïdal, l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien a la structure d'une équation de Mathieu. On dispose de plusieurs résultats analytiques dans la limite $V_0 \gg E_\mathrm{r}$

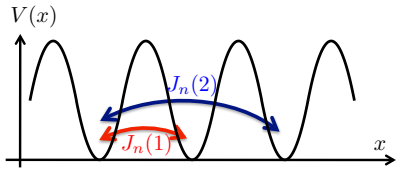
Largeur de la bande fondamentale : $\dfrac{W_0}{E_\mathrm{r}} \approx \dfrac{16}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{V_0}{E_\mathrm{r}}\right)^{3/4} \exp\left[-2\left(\dfrac{V_0}{E_\mathrm{r}}\right)^{1/2}\right]$

variation exponentielle par rapport à la racine de la hauteur de la barrière caractéristique de l'effet tunnel



Rappel : E_r/h est d'ordre quelques kHz à quelques dizaines de kHz

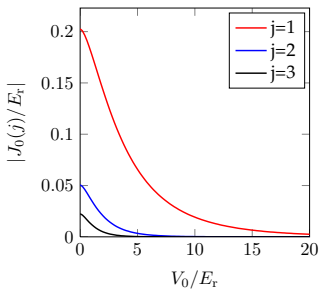
Eléments de matrice des sauts entre voisins

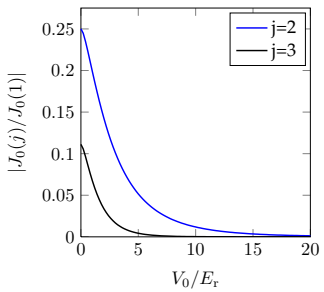


L'élément de matrice est donné par

$$J_n(j) = \int w^*_{n,j}(x) \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right) w_{n,0}(x)\, dx$$

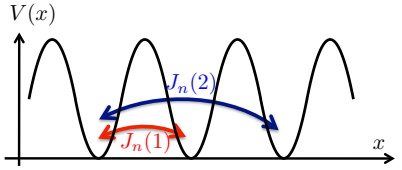
Quand la profondeur du réseau augmente, la zone de l'espace où $w_{n,0}(x)$ et $w_{n,j}(x)$ prennent toutes deux des valeurs significativement différentes de 0 diminue.





Pour $V_0 \gtrsim 10\, E_\mathrm{r}$, on peut se limiter aux sauts entre proches voisins (à 1% près)

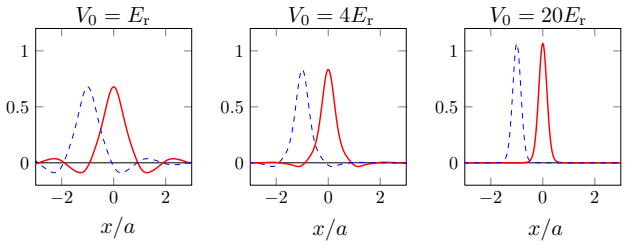
Eléments de matrice des sauts entre voisins



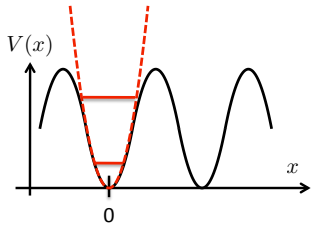
L'élément de matrice est donné par

$$J_n(j) = \int w^*_{n,j}(x) \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right) w_{n,0}(x)\, dx$$

Quand la profondeur du réseau augmente, la zone de l'espace où $w_{n,0}(x)$ et $w_{n,j}(x)$ prennent toutes deux des valeurs significativement différentes de 0 diminue.



Spectre en énergie pour des potentiels très profonds



Si on néglige complètement les sauts entre voisins et si on linéarise au voisinage du fond des puits :

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \approx V_0 k^2 x^2$$

$$V_0 \gg E_\mathrm{r}$$

Oscillateur harmonique de pulsation ω telle que $\hbar\omega = 2\sqrt{V_0 E_\mathrm{r}}$, dont l'état fondamental a pour taille caractéristique $a_\mathrm{oh} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ et un spectre en $(n+1/2)\hbar\omega$

Ce développement a un sens si $ka_\mathrm{oh} = (E_\mathrm{r}/V_0)^{1/4} \ll 1$

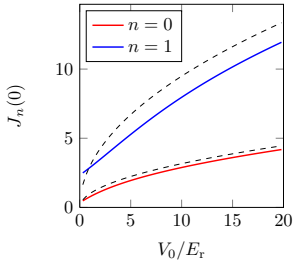
Pour fixer les idées, imposons $ka_\mathrm{oh} \leq 1/2$, soit $V_0/E_\mathrm{r} \geq 16$.

Pour $V_0 = 16E_\mathrm{r}$, le quantum d'énergie pour l'oscillateur harmonique vaut $\hbar\omega = 8E_\mathrm{r}$

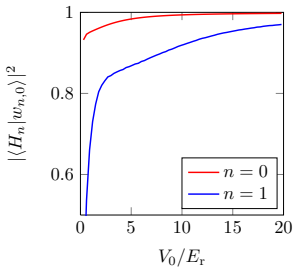
⟶ Etat fondamental à $4E_\mathrm{r}$, premier état excité à $12E_\mathrm{r}$

Spectre en énergie pour des potentiels très profonds (suite)

Centres des bandes d'énergie $E_n(q)$ comparés au spectre de l'oscillateur harmonique $(n+1/2)\hbar\omega$



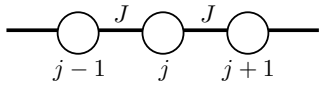
Recouvrement entre fonctions de Wannier et états propres de l'osc. harmonique (fonctions de Hermite)



3.

Hamiltonien de Hubbard

- Modèle minimal pour décrire le mouvement d'une particule sur un réseau



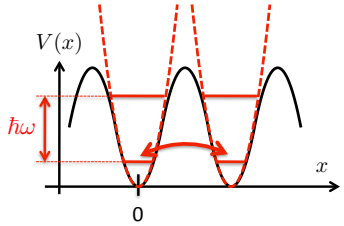
- Discussion de l'effet des interactions entre atomes

Hamiltonien à une particule

On restreint la dynamique des atomes à la bande fondamentale $n=0$

température, énergie d'interaction $\ll \hbar\omega$

pour des fermions : $E_{\text{Fermi}} \ll \hbar\omega$



On restreint les conséquences de l'effet tunnel aux sauts entre proches voisins

$J_{n=0}(j=0)$: énergie sur site, choisie égale à 0 à partir de maintenant

$J_{n=0}(j=1)$: saut tunnel entre proches voisins, pris égal à $-J$ [avec $J>0$]

$$\hat{H} = -J\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}|\right)$$

Diagonalisation de l'hamiltonien de Hubbard

Transposition de la forme générale de Bloch à la restriction à la bande fondamentale

$\psi_{n,q}(x) = e^{ixq}\, u_{n,q}(x)$

$u_{n,q}(x)$ périodique de période $a = \pi/k$

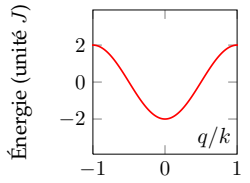
$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq}|w_j\rangle$$

$$|u\rangle = \sum_j |w_j\rangle$$ **unique !**

On vérifie immédiatement que $|\psi_q\rangle$ est bien état propre de

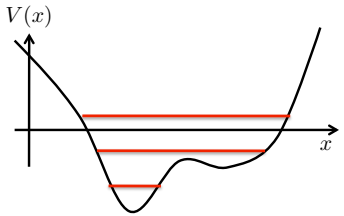
$$\hat{H} = -J\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}|\right)$$

avec la valeur propre $E(q) = -J\left(e^{iaq} + e^{-iaq}\right)$
$= -2J\cos(aq)$



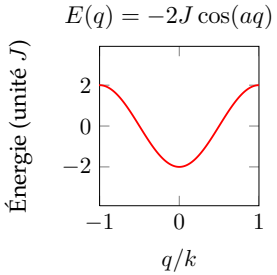
La largeur $W_0 = 4J$ de cette bande est identifiée avec : $\frac{W_0}{E_r} \approx \frac{16}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{3/4} \exp\left[-2\left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{1/2}\right]$

Le signe du coefficient tunnel J



Dans un puits de potentiel, on peut classer les états propres par leur nombre de noeuds :

- état fondamental : pas de noeud
- premier état excité : un noeud
- etc.



Si $J > 0$, l'état fondamental de l'hamiltonien de Hubbard est obtenu pour $q = 0$

$$|\psi_{q=0}\rangle = \sum_j |w_j\rangle$$

Si $J < 0$, l'état fondamental est obtenu pour $q = \pi/a$

$$|\psi_{q=\pi/a}\rangle = \sum_j (-1)^j |w_j\rangle$$

$$\psi_{q=\pi/a}(x) = \sum_j (-1)^j w_0(x - ja)$$

change de signe quand $x \to x + a$

Interactions dans le modèle de Hubbard

Interactions à courte portée, modélisée par un potentiel de contact (à régulariser)

$$W(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = g\,\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m} \qquad a_d : \text{ longueur de diffusion}$$

Ecriture en seconde quantification (pour des bosons)

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{g}{2}\int \hat{\Psi}^\dagger(x)\,\hat{\Psi}^\dagger(x)\,\hat{\Psi}(x)\,\hat{\Psi}(x)\,dx \qquad \text{(version 1D)}$$

où $\hat{\Psi}(x)$ est l'opérateur destruction d'une particule au point x, qui s'écrit en fonction des fonctions de Wannier

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{n,j} w_{n,j}(x)\,\hat{b}_{n,j} \qquad \hat{b}_{n,j} : \text{détruit une particule dans la fonction de Wannier } w_{n,j}(x)$$

On arrive à une expression bien compliquée !!!

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{g}{2}\sum_{n_1,j_1}\sum_{n_2,j_2}\sum_{n_3,j_3}\sum_{n_4,j_4} \hat{b}^\dagger_{n_3,j_3}\hat{b}^\dagger_{n_4,j_4}\hat{b}_{n_1,j_1}\hat{b}_{n_2,j_2} \times \int w_{n_1,j_1}(x)\,w_{n_2,j_2}(x)\,w_{n_3,j_3}(x)\,w_{n_4,j_4}(x)\,dx$$

Simplification du terme d'interaction pour les liaisons fortes

- On se limite à la bande fondamentale

énergie d'interaction << gap entre la bande fondamentale et la 1ère bande excitée

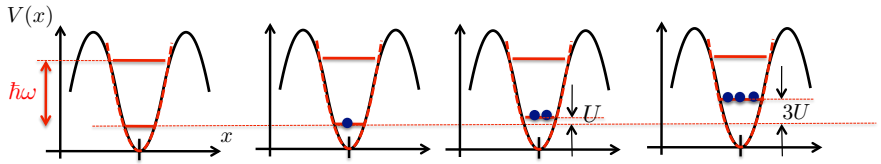
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$$

- Recouvrement négligeable entre des fonctions de Wannier centrées sur différents sites

$j_1 = j_2 = j_3 = j_4$: deux atomes n'interagissent entre eux que s'ils sont sur le même site

L'intégrale restante est la même pour tous les sites j : $\int w_{0,j}^4(x)\,dx$

$$\hat{H}_{\rm int} \approx \frac{U}{2}\sum_j \hat{n}_j\,(\hat{n}_j - 1) \qquad U = g\int w_{0,0}^4(x)\,dx \approx \frac{g}{\sqrt{2\pi}\,a_{\rm oh}}$$



Energie d'interaction à trois dimensions

A trois dimensions, à partir de

$$W(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = g\,\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m} \qquad a_d : \text{ longueur de diffusion}$$

on obtient

$$\hat{H}_{\rm int} \approx \frac{U^{(3D)}}{2}\sum_{\vec{j}} \hat{n}_{\vec{j}}\left(\hat{n}_{\vec{j}} - 1\right) \qquad \frac{U^{(3D)}}{E_{\rm r}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\,k a_d\,\left(\frac{V_0}{E_{\rm r}}\right)^{3/4}$$

En dehors d'une résonance de diffusion, $a_{\rm d}$ est d'ordre nanométrique :

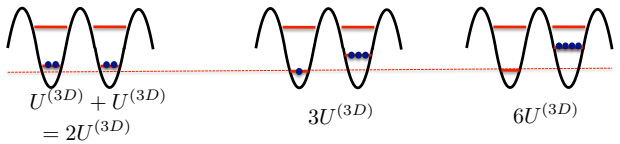
pour $V_0/E_{\rm r} \approx 10$ à 30, on trouve $U^{(3D)}/E_{\rm r} \approx 0.01$ à 1

Energie d'interaction et énergie cinétique

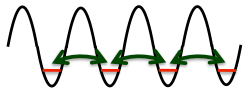
La physique à N corps dans le réseau est régie par la compétition entre deux effets

• Le terme d'interaction caractérisé par $U^{(3D)}$, qui tend à mettre le même nombre d'atomes par site, et qui augmente (lentement) avec V_0/E_r

4 particules
2 sites

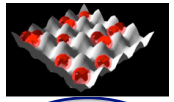


• Le terme d'énergie cinétique caractérisé par l'élément de matrice tunnel J, qui tend à délocaliser chaque atome, et qui diminue (rapidement) avec V_0/E_r



Compétition entre énergie cinétique et énergie d'interaction

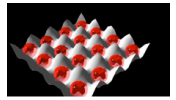
Cette compétition donne naissance à de nombreux phénomènes spectaculaires.



état superfluide, peu de corrélations entre particules

On varie le rapport U/J

Munich, 2002



état « isolant de Mott », fortement corrélé

L'énergie cinétique domine

L'énergie d'interaction domine

Cette compétition existe également en absence de réseau, dans un gaz homogène

densité ρ

distance entre particules $\ell \sim \rho^{-1/3}$

Energie cinétique : $\frac{\hbar^2}{m\ell^2}$

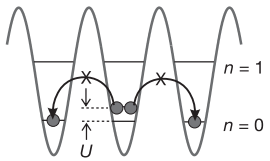
longueur de diffusion a_d

Energie d'interaction : $\frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m}\rho$

rapport entre les deux énergies : $(\rho a_d^3)^{1/3}$

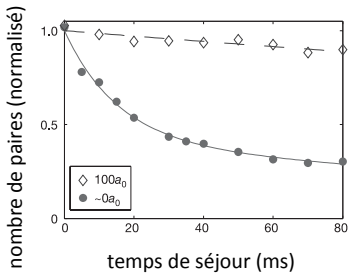
Une autre illustration de cette compétition : les paires répulsives liées

Expérience menée à Innsbruck en 2006 dans le groupe de R. Grimm



$$\frac{U^{(3D)}}{E_r} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, k a_d \left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{3/4}$$

On contrôle la valeur de a_d grâce à une résonance de diffusion



→ La force répulsive entre les atomes est grande... et les paires survivent longtemps

→ La force répulsive entre les atomes est nulle... et les paires se cassent

Les paires répulsives liées

Problème à deux corps en présence d'un réseau

$$\hat{H} = -J\left(\hat{T}(1)+\hat{T}^\dagger(1)\right) - J\left(\hat{T}(2)+\hat{T}^\dagger(2)\right) + U\sum_{j_1,j_2}\delta_{j_1,j_2}\,|w_{j_1},w_{j_2}\rangle\langle w_{j_1},w_{j_2}|,$$

$$\hat{T} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |w_{j+1}\rangle\langle w_j|$$

Séparation « centre de masse » et « variable relative » : $|\Psi^{\text{total}}\rangle = |\Psi_q^{\text{cdm}}\rangle \otimes |\Phi^{\text{rel.}}\rangle$

↑ fonction de Bloch

Pour chaque valeur du quasi-moment q pour le centre de masse, il existe un état lié pour la variable relative

Etat d'énergie positive de l'ordre de U, au dessus du continuum de la bande à une particule

4.

Le cas d'un super-réseau

au delà du potentiel sinusoïdal...

L'arbitraire dans la définitions des fonctions de Wannier

Rappel : définition des fonctions de Wannier $\quad |w_{n,0}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} |\psi_{n,q}\rangle \, dq$

➟ Que se passe-t-il si on change la phase des fonctions de Bloch ?

$$|\psi_{n,q}\rangle \longrightarrow e^{i\theta_n(q)} \, |\psi_{n,q}\rangle$$

Ceci peut changer radicalement la forme des fonctions de Wannier et permet une construction « sur mesure » de ces fonctions

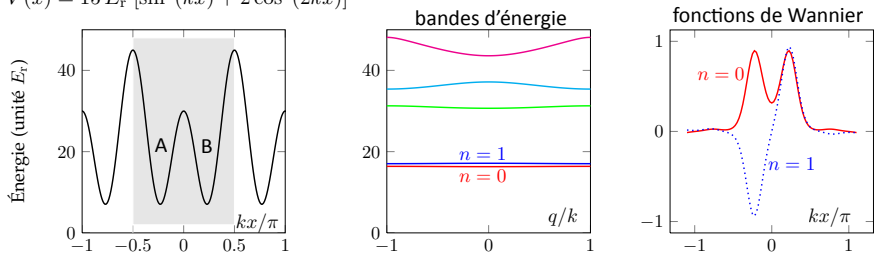
➟ On peut également mélanger des fonctions de Wannier issues de bandes différentes, pour obtenir des fonctions plus agréables à manipuler

Illustration sur le cas d'un super-réseau

Un exemple de super-réseau

On superpose deux ondes stationnaires, créées par des lasers de fréquence ν et 2ν

$V(x) = 15\, E_{\mathrm{r}} \, [\sin^2(kx) + 2\cos^2(2kx)]$

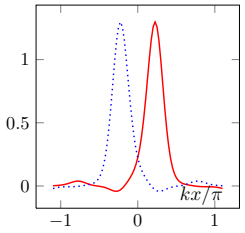


Généralisation directe du problème du double puits (retournement de la molécule d'ammoniac)

Une base commode est obtenue par « hybridisation » ⟶

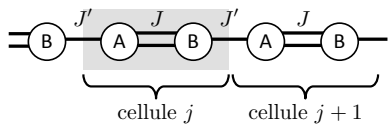
$w_A(x) \propto w_0(x) - w_1(x)$

$w_B(x) \propto w_0(x) + w_1(x)$



Hamiltonien de Hubbard pour le super-réseau

Modélisation par une répétition d'une cellule à deux sites A et B et deux coefficients tunnel différents J et J'



Hamiltonien : $\hat{H} = -J \sum_j |w_{B,j}\rangle\langle w_{A,j}| \; - \; J' \sum_j |w_{A,j+1}\rangle\langle w_{B,j}| \; + \; \mathrm{h.c.}$

On cherche (bien sûr !) les états propres sous la forme de Bloch : $\psi_q(x) = e^{ixq} \, u_q(x)$

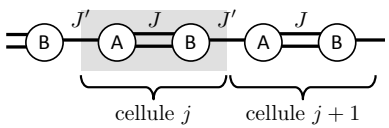
Forme la plus générale d'une fonction périodique u_q dans ce contexte :

$$|u_q\rangle = \alpha_q \left(\sum_j |w_{A,j}\rangle \right) + \beta_q \left(\sum_j |w_{B,j}\rangle \right)$$ **espace de dimension 2**

correspondant à la fonction de Bloch : $\quad |\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} \, (\alpha_q |w_{A,j}\rangle + \beta_q |w_{B,j}\rangle)$

Que prendre pour les coefficients α_q, β_q ?

Le super-réseau (suite)



On reporte la forme de Bloch $|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq}\left(\alpha_q|w_{A,j}\rangle + \beta_q|w_{B,j}\rangle\right)$

dans l'hamiltonien $\hat{H} = -J\sum_j |w_{B,j}\rangle\langle w_{A,j}| \; - \; J'\sum_j |w_{A,j+1}\rangle\langle w_{B,j}| \; + \; \text{h.c.}$

On obtient le même système 2x2 en chaque site du réseau :

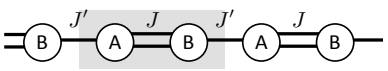
$$\hat{\mathcal{H}}(q)\begin{pmatrix}\alpha_q\\ \beta_q\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\alpha_q\\ \beta_q\end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{H}}(q) = -\begin{pmatrix}0 & J+J'e^{-iaq}\\ J+J'e^{iaq} & 0\end{pmatrix}$$

hamiltonien dans l'espace réciproque

Ce modèle de Hubbard à deux sites est équivalent au problème d'un spin ½ dont l'hamiltonien dépend d'un paramètre continu q (ou $\vec{q}$ à plusieurs dimensions)

Des propriétés topologiques non triviales peuvent émerger du fait de l'invariance $q \to q + 2\pi/a$

Le super-réseau (suite)



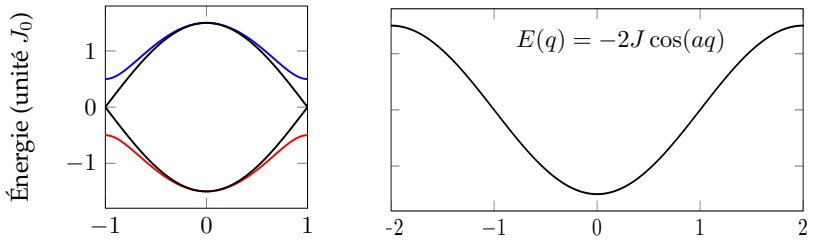
Les bandes d'énergie pour ce super-réseau : valeurs propres de

$$\hat{\mathcal{H}}(q) = \begin{pmatrix}0 & -J-J'e^{-iaq}\\ -J-J'e^{iaq} & 0\end{pmatrix}$$

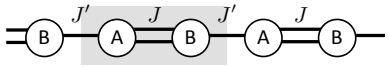
$$E(q) = \pm\left|J+J'e^{iaq}\right| = \pm\left(J^2+J'^2+2JJ'\cos(aq)\right)^{1/2}$$

bandes rouges et bleues : $J = J_0,\ J' = J_0/2$

bandes noires : $J = J' = 3J_0/4$



Le super-réseau (suite)



Les bandes d'énergie pour ce super-réseau : valeurs propres de

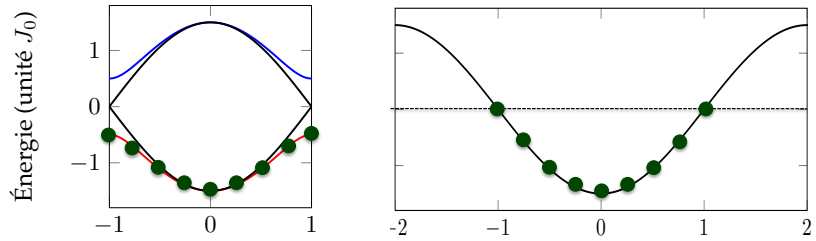
$$\hat{\mathcal{H}}(q) = \begin{pmatrix}0 & -J-J'e^{-iaq}\\ -J-J'e^{iaq} & 0\end{pmatrix}$$

$$E(q) = \pm\left|J+J'e^{iaq}\right| = \pm\left(J^2+J'^2+2JJ'\cos(aq)\right)^{1/2}$$

bandes rouges et bleues : $J = J_0,\ J' = J_0/2$

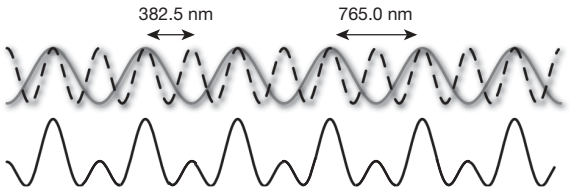
bandes noires : $J = J' = 3J_0/4$

Instabilité de Peierls



Réalisation expérimentale d'un super-réseau

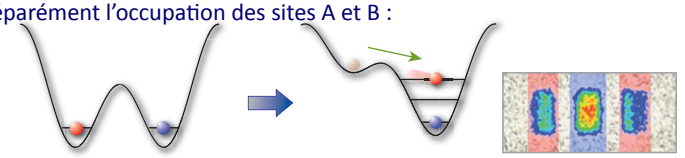
Fölling *et al.* 2007 :



Contrôle des intensités et de la phase relative
des deux ondes stationnaires à l'emplacement des atomes

Manipulation de l'effet tunnel via l'interaction entre deux atomes

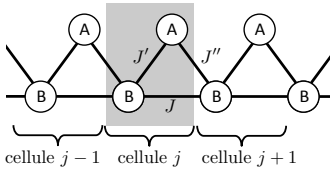
Utilisation d'une déformation des puits et de la méthode de dépliement de bande pour mesurer séparément l'occupation des sites A et B :



Les bandes plates

Un autre exemple de réseau de Hubbard à deux sites

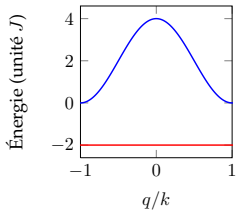
dents de scie



Hamiltonien dans l'espace réciproque :

$$\hat{\mathcal{H}}(q) = -\begin{pmatrix} 0 & J' + J''e^{iaq} \\ J' + J''e^{-iaq} & 2J\cos(aq) \end{pmatrix}$$

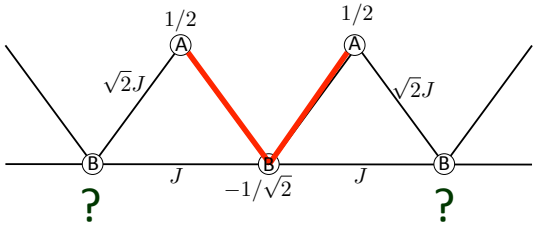
Pour $J' = J'' = \sqrt{2}\,J$, une bande plate apparaît dans le spectre :



Un paquet d'ondes préparé dans cette bande
ne va pas évoluer du tout :
pas de déplacement, pas d'étalement !

L'origine physique des bandes plates

Considérons l'état $|\psi_j^{(\mathrm{loc})}\rangle = \frac{1}{2}\left(|w_{A,j-1}\rangle + |w_{A,j}\rangle - \sqrt{2}\,|w_{B,j}\rangle\right)$



Interférences destructives pour les sauts vers les sites voisins

Analogue des « états noirs » de l'optique quantique