

# Table des matières

1	Inti	roducti	on	5		
2	Le gaz parfait de fermions					
	2.1	Stratés	gie d'évaporation d'un gaz de fermions	7		
		2.1.1	Suppression des interactions dans un gaz de fermions			
			polarisés	7		
		2.1.2	Appendice : Collisions froides en onde p	10		
	2.2	Le gaz	de Fermi dégénéré dans un potentiel harmonique	13		
		2.2.1	Considérations de thermodynamique statistique	13		
		2.2.2	Appendice : Théorème du viriel	15		
		2.2.3	Approximation de densité locale, profil de densité du			
			nuage piégé à température nulle	19		
		2.2.4	Appendice : Rappels sur le gaz de Fermi homogène à			
			température nulle	20		
3	Fermions en interactions attractives					
	3.1	Introd	uction	23		
	3.2	La tra	nsition CBE-BCS : approche qualitative	24		
		3.2.1	Cas des interactions fortes : le condensat de molécules.	24		
		3.2.2	Cas des interactions faibles : le superfluide BCS	24		
		3.2.3	Longueur de diffusion infinie : le régime unitaire	25		
		3.2.4	Appendice : Longueur de diffusion et état faiblement lié	27		
		3.2.5	Aperçu des approches théoriques	29		
	3.3	Étude	expérimentale de la transition CBE-BCS	31		
		3.3.1	Quelques considérations sur la durée de vie d'un gaz			
			d'atomes froids au voisinage d'une résonance de Fesh-			
			bach	33		
		3.3.2	Profil de densité, énergie d'un gaz de fermions en in-			
			teractions fortes	34		

TABLE DES MATIÈRES	
--------------------	--

3.3.3	Spectroscopie des modes de basse énergie	34
3.3.4	Le problème de la thermométrie	35
3.3.5	Mesure de l'énergie d'appariement	37
3.3.6	Superfluidité	40

## Chapitre 1

### Introduction

Dans ces quelques pages, on trouvera une description de l'application des techniques de refroidissement et de piégeage d'atomes au cas de fermions ultra-froids. Nous débuterons par l'étude des gaz parfaits de fermions ce qui nous permettra d'évoquer leurs techniques d'évaporation spécifique, et nous discuterons leurs propriétés dans le régime de dégénérescence quantique qui a été observé en 2000. Nous poursuivrons ensuite par la discussion du gaz de fermions en interactions. La différence essentielle avec les bosons est ici le fantastique écart de complexité dans les techniques théoriques à mettre en œuvre pour décrire un superfluide fermionique. En effet, alors que la plupart des expériences réalisées dans les gaz de bosons ultra-froids peuvent être décrites par la théorie du champ moyen et l'équation de Gross-Pitaevskii, il est en général nécessaire de faire appel à des simulations numériques lourdes pour être capables de fournir des informations théoriques quantitatives sur les gaz de fermions. Cette constatation a deux conséquences : tout d'abord dans l'organisation de ces notes, nous n'aborderons quasiment pas les aspects théoriques que nous laisseront à des cours plus spécifiques sur la supraconductivité ou les fermions corrélés, en nous concentrant plutôt sur une description des diverses techniques expérimentales qui permettent d'étudier ces système. La deuxième conséquence est plus fondamentale : en effet, ces problèmes de simulation théoriques se posent plus généralement à l'étude de n'importe quel ensemble de fermions en interactions que ces soient des électrons dans des métaux ou des quarks dans un noyau.

## Chapitre 2

# Le gaz parfait de fermions

#### 2.1 Stratégie d'évaporation d'un gaz de fermions

# 2.1.1 Suppression des interactions dans un gaz de fermions polarisés

Du fait du Principe de Pauli, la technique habituelle de refroidissement par évaporation dans un piège magnétique ne peut être transposée directement aux gaz de fermions. En effet, le paramètre principal conditionnant l'efficacité d'une évaporation est le taux de collisions élastiques. Or, pour des fermions polarisés, les collisions en onde s (correspondant à un moment cinétique relatif  $\ell = 0$  donc isotropes) sont interdites, car elles correspondent à une fonction d'onde symétrique par échange des deux particules. Les fermions ne peuvent donc interagir que dans des canaux de moment cinétique  $\ell > 0$  (plus précisément  $\ell$  impair) pour lesquels on montre que la section efficace de collision tend vers 0 à basse énergie (cf. le paragraphe 2.1.2 ci-dessous) Cette disparition des collisions d'un gaz de fermions polarisés est illustrée expérimentalement sur la figure 2.1 extraite de la référence [1]. On constate que la section efficace de collisions, mesurée par le taux de relaxation du gaz vers l'équilibre, décroît quadratiquement avec la température, et donc l'énergie des particules. Sachant que l'emballement du processus d'évaporation dépend crucialement du taux de collisions élastiques, on conçoit immédiatement que cette suppression des collisions en onde s puisse constituer un frein sérieux aux expériences de refroidissement de fermions dans le régime de dégénérescence quantique.

Afin de passer outre cet obstacle, on peut néanmoins imaginer plusieurs stratégies de contournement qui possèdent chacune avantages et inconvénients

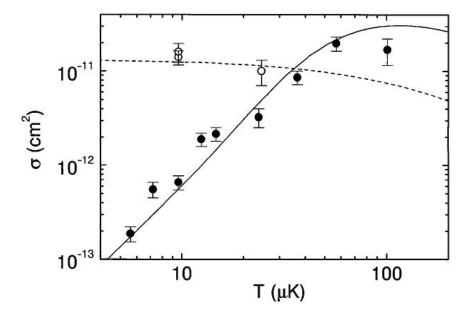


Fig. 2.1 – Evolution de la section efficace de collisions élastiques  $\sigma$  pour un gaz de fermions ( $^{40}$ K) polarisés dans un seul état de spin (ronds pleins) ou dans un mélange de deux états de spin (ronds vides) – mesures extraites de [1]. Dans le premier cas les collisions en onde s sont permises et le taux de collision varie peu avec la température. Dans le second seules les collisions en onde p sont permises par le Principe de Pauli, ce qui aboutit à une diminution quadratique de  $\sigma$  avec la température.

- 1. Piégeage magnétiques de plusieurs états de spin. Sur le principe la plus simple, cette idée se révèle en pratique inopérante dans la plupart des cas. En effet, dès que plusieurs états de spin sont présents, des collisions avec par exemple changement d'état hyperfin, peuvent apparaître<sup>1</sup> (cf. Fig. 2.2). Le seul atome où cette stratégie a pu être menée à bien est le <sup>40</sup>K qui bénéficie d'une structure hyperfine inversée (i.e. l'état interne fondamental possède un moment cinétique total maximal, contrairement aux autres alcalins).
- 2. Piégeage dans un potentiel dipôlaire. Le problème posé par les pièges magnétiques est que les états piégés magnétiquement ne sont en général pas les états de plus basse énergie du système. Cette contrainte est en revanche levée lorsque l'on place les atomes dans un potentiel dipôlaire. Si le désaccord du laser de piégeage par rapport aux transitions atomiques est grand devant la structure hyperfine de l'atome, les différents états internes subissent le même déplacement lumineux et l'on peut alors piéger autant d'états de spin de l'état fondamental hyperfin que désirés. La limitation de cette technique est due à la faible profondeur des piège dipôlaires. Ainsi, même avec des puissances importantes (une voire plusieurs centaines de watts), leur profondeur reste au mieux de l'ordre de la température dans un piège magnéto-optique, ce qui fait que les taux de chargement sont relativement bas (au plus une dizaine de pourcents).
- 3. Refroidissement sympathique. On peut enfin imaginer travailler avec plusieurs espèces atomiques, par exemple un boson que l'on sait très bien évaporer, et des fermions que l'on souhaite étudier. Lorsque la température du nuage de bosons baisse, les collisions entre bosons et fermions thermalisent alors les deux espèces atomiques et aboutissent donc à un refroidissement du gaz fermionique. Cette technique peut être utilisée dans un piège magnétique car en polarisant les deux espèces atomiques dans l'état de moment cinétique maximum (stretched state, ou état étiré), les pertes par changement d'état hyperfin sont inhibées par conservation du moment cinétique. Ce refroidissement dit sympathique est d'autant plus efficace que les masses des deux espèces sont proches. En effet, l'énergie va être plus équitablement répartie après une collision, et d'autre part le décalage relatif des centres des nuages induit par la gravité y sera plus faible<sup>2</sup>. Le mélange

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Les écarts hyperfins des alcalins, dues à l'interaction du spin électronique avec le moment magnétique nucléaire sont de l'ordre du GHz, soit une dizaine de mK, donc supérieurs à la température dans un piège magnéto-optique.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Si ce décalage est trop important, les deux nuages ne se recouvrent pas et le gaz

<sup>6</sup>Li-<sup>7</sup>Li est ainsi bien adapté à l'évaporation sympathique, mais les combinaisons <sup>87</sup>Rb-<sup>40</sup>K et <sup>23</sup>Na-<sup>6</sup>Li sont aussi utilisées avec succès<sup>3</sup>. Une autre condition à respecter est de conserver en permanence un grand nombre de bosons par rapport au nombre de fermions, de façon à ce que la capacité calorifique du réfrigérant reste grande devant celle des fermions.

#### 2.1.2 Appendice: Collisions froides en onde p

On considère la collision de deux particules interagissant par un potentiel central V(r). On sait qu'en passant dans le référentiel du centre de masse, on peut ramener le problème à l'étude de la dynamique d'une particule de masse réduite  $\mu$  diffusant sur ce même potentiel V(r). Par ailleurs, en utilisant l'invariance par rotation, on peut chercher les états propres de diffusion sous la forme d'états de moment cinétique fixé, soit  $\psi(r) = Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)R(r)$ , où R est solution de l'équation [2, 4]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r)\right)R = ER.$$
 (2.1)

La particule étant libre asymptotiquement, on sait que R est à longue distance somme d'une onde sphérique convergente et d'une onde sphérique divergente. Par conservation du courant de probabilité, ces deux ondes sont de même amplitude et sont seulement déphasées l'une par rapport à l'onde incidente, soit

$$R(r) \propto \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2 + 2\delta_{\ell})}}{kr} - \frac{e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{kr}, \qquad (2.2)$$

où  $E = \hbar^2 k^2/2\mu$  et  $\delta_\ell$  désigne le déphasage de l'onde à la réflexion sur le potentiel. En utilisant la théorie de la diffusion, on sait que le déphasage est lié à la section efficace de diffusion dans l'onde  $\ell$  par la relation [4, 2]

$$\sigma_{\ell} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell}. \tag{2.3}$$

Considérons le cas simplifié d'une diffusion par un potentiel de portée finie  $r_0$  tel que V(r)=0 pour  $r>r_0$ , et V quelconque sinon. Pour  $r>r_0$ , on doit résoudre l'équation de Schrödinger pour une particule libre, dont les

bosonique ne peut pas refroidir le nuage fermionique.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Bien que l'évaporation d'un mélange <sup>6</sup>Li-<sup>8</sup>7Rb ait été réalisée, la faible section efficace de collision LiRb aboutit à une évaporation relativement peu efficace.

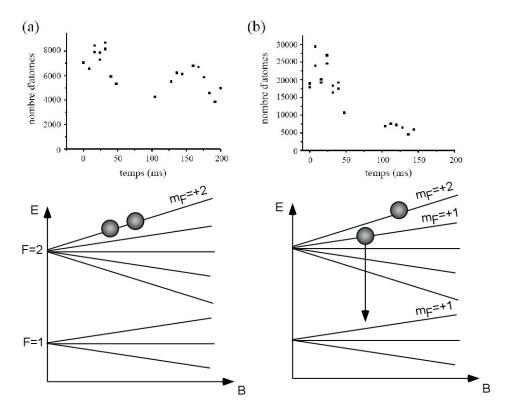


Fig. 2.2 – Apparition de pertes inélastiques dans un gaz d'atomes froids piégés magnétiquement. (a) Évolution du nombre d'atomes dans un gaz de rubidium polarisé dans l'état de moment cinétique maximal  $|F=2,m_F=+2\rangle$ . (b) Idem pour le mélange  $|F=2,m_F=+2\rangle+|F=2,m_F=+1\rangle$ . On constate que la durée de vie du mélange est considérablement réduite par l'apparition des collisions inélastiques.

solutions s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel sphériques  $j_{\ell}$  et  $n_{\ell}$  [4] par

$$R(r) = \alpha j_{\ell}(kr) + \beta n_{\ell}(kr). \tag{2.4}$$

Le comportement des fonctions j et n à longue distance étant de la forme

$$\begin{cases} j_{\ell}(x) \sim \sin(x - \ell\pi/2)/x \\ n_{\ell}(x) \sim \cos(x - \ell\pi/2)/x, \end{cases}$$

on en déduit en comparant le développement de l'eq. (2.4) aux grandes valeurs de r à l'expression (2.2)

$$\frac{\alpha}{\beta} = \cot(\delta_{\ell}).$$

Considérons à présent la solution pour  $r < r_0$ . En étudiant l'équation de Schrödinger au voisinage de r = 0, on voit que, pour des potentiels V suffisamment réguliers en r = 0, le terme centrifuge impose un comportement en  $r^{\ell}$  pour R au voisinage de 0. Si l'on note  $u_k(r)$  la solution de (2.1) pour  $r < r_0$  telle que  $u_k(r) \sim r^{\ell}$  en 0, on a alors  $R(r) = \lambda u_k(r)$ , pour un certain  $\lambda$ .

Il reste à présent à raccorder les comportements pour  $r < r_0$  et  $r > r_0$ . En écrivant la continuité de R et de sa dérivée, on trouve après quelques manipulations élémentaires

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_{\ell}(kr_0) - kr_1 n'_{\ell}(kr_0)}{kr_1 j'_{\ell}(kr_0) - j_{\ell}(kr_0)},$$

avec  $r_1 = u_k(r_0)/u'_k(r_0)$ .

Faisons à présent tendre k vers zéro pour obtenir le comportement à basse énergie. En notant que le comportement des fonctions de Bessel sphériques proche de l'origine est donné par<sup>4</sup>

$$\begin{cases} j_{\ell}(x) \sim x^{\ell}/(2\ell+1)!! \\ n_{\ell}(x) \sim (2\ell-1)!!/x^{\ell+1}, \end{cases}$$

on en déduit que

$$\cot(\delta_{\ell}) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{k^{2\ell+1}},$$

où A est un constante. En utilisant la relation (2.3), on en déduit donc que  $\sigma_{\ell} \propto k^{4\ell} \sim E^{2\ell}$ , où E est l'énergie cinétique de la particule. Pour  $\ell=1$  que

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>On note  $(2\ell+1)!! = (2\ell+1)\cdot(2\ell-1)\cdot(2\ell-3)...3\cdot 1$ . Par convention, on pose (-1)!! = 1.

#### 2.2. LE GAZ DE FERMI DÉGÉNÉRÉ DANS UN POTENTIEL HARMONIQUE13

l'on retrouve dans le ca de fermions polarisés, on obtient  $\sigma_1 \sim E^2$ , en accord avec les mesures du groupe de Boulder (Fig. 2.1).

Qualitativement, on peut interpréter ce comportement en notant que dans un canal  $\ell \neq 0$ , il apparaît une barrière centrifuge qui empêche classiquement les atomes de s'approcher les uns des autres si leur énergie cinétique est plus basse que la hauteur de la barrière. Dans le cas d'un potentiel à courte portée comme celui que nous venons d'étudier, ceci signifie que les collisions en ondes  $\ell > 0$  sont inhibées à basse énergie, puisque les atomes ne peuvent pas s'approcher à une distance suffisamment petite pour ressentir leur potentiel d'interaction, et ne diffusent donc pas.

Ce résultat est de plus d'un grand intérêt pratique puisqu'il signifie qu'à basse énergie (et donc à basse température), les interactions en onde s dominent devant les autres : c'est cette propriété qui permet de décrire les interaction entre atomes uniquement à l'aide de la longueur de diffusion, sans avoir à considérer toute la complexité du potentiel d'interaction réel.

# 2.2 Le gaz de Fermi dégénéré dans un potentiel harmonique

#### 2.2.1 Considérations de thermodynamique statistique

Dans les conditions expérimentales habituelles, les atomes sont piégés dans des potentiels que l'on peut dans une bonne approximation considérer harmoniques. Si l'on note  $\omega_{i=x,y,z}$  les fréquences propres dans les trois directions principales du pièges, le spectre à une particule du système est alors paramétré par trois nombres entiers naturels,  $n_{i=x,y,z}$  associés aux énergies  $E_{\{n_i\}} = \sum_i \hbar \omega_i(n_i+1/2)$ . Si l'on considère un gaz de fermions polarisés dans un seul état de spin, les particules n'interagissent pas entre elles, et à l'équilibre thermodynamique la population de chaque état propre du hamiltonien est donné par la distribution de Fermi-Dirac à température T

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1},\tag{2.5}$$

où  $\beta = 1/k_BT$  et  $\mu$  est le potentiel chimique du gaz.

En pratique, on mesure le nombre d'atomes plutôt que le potentiel chimique. Afin d'exprimer  $\mu$  en fonction de N, on utilise la relation

$$N = \sum_{\{n_i\}} f(E_{\{n_i\}}) \tag{2.6}$$

qui permet après inversion permet d'obtenir  $\mu(N)$ . Afin de calculer la somme de l'équation (2.6), on introduit la densité d'état  $\rho(E)$  du potentiel harmonique définie par

$$\rho(E) = \sum_{\{n_i\}} \delta(E - E_{\{n_i\}}), \tag{2.7}$$

ce qui nous permet d'écrire formellement que

$$N = \int dE \rho(E) f(E).$$

Reste à présent à calculer la densité d'état. Dans la limite où les énergies typiques des atomes sont grandes devant les  $\hbar\omega_i$ , on peut considérer que les états propres forment un continuum, ce qui permet de remplacer les sommes sur les  $n_i$  par des intégrales<sup>5</sup> et on écrit donc

$$\rho(E) \sim \int dn_x dn_y dn_z \delta(E - \sum_i \hbar \omega_i n_i),$$

où l'on a négligé les contributions de point zéro à l'énergie. Posons  $e_i = \hbar \omega_i$ . On obtient alors

$$\rho(E) \sim \frac{1}{\hbar^3 \bar{\omega}^3} \int_0^\infty de_x \int_0^\infty de_y \int_0^\infty de_z \delta \left( E - \sum_i e_i \right),$$

avec  $\bar{\omega}^3 = \omega_x \omega_y \omega_z$ . L'intégrale se calcule ensuite sans difficulté et l'on obtient

$$\rho(E) \sim \frac{E^2}{2\hbar^3 \bar{\omega}^3}.$$

Examinons le cas de la température nulle ou, plus précisément le régime  $k_BT \ll \mu$ . Dans ce cas, la distribution de Fermi-Dirac est une marche et  $f(E) \sim \Theta(\mu - E)$  où  $\Theta$  est la fonction de Heavyside. Dans ce cas, le nombre d'atomes s'écrit

$$N = \int_0^\infty dE \rho(E) \Theta(\mu - E) = \int_0^\mu dE \frac{E^2}{2\hbar^3 \bar{\omega}^3} = \frac{\mu^3}{6\hbar^3 \bar{\omega}^3}.$$

Autrement dit, l'énergie de Fermi du gaz de fermions piégés, qui s'identifie à température nulle avec le potentiel chimique, est donnée par

 $<sup>\</sup>overline{\phantom{a}}^5$ En pratique, ceci revient formellement à effectuer une somme de Riemann et cette approximation sera valable lorsque  $k_BT$  ou l'énergie de Fermi  $E_F$  sont grands devant les  $\hbar \omega$ .

$$\mu = E_F = \hbar \bar{\omega} \left( 6N \right)^{1/3}. \tag{2.8}$$

À température nulle, l'énergie totale du système peut s'exprimer à l'aide du potentiel chimique par la relation  $\mu = \partial U/\partial \mu$ , soit après intégration de la relation (2.8)

$$U = \frac{3}{4}NE_F. \tag{2.9}$$

L'énergie du système peut être mesurée très facilement par temps de vol. En effet, le gaz étant ici sans interaction, on sait qu'après extinction du piège, le nuage s'étend balistiquement, et après un temps de vol suffisamment long, la distribution de densité du nuage reproduit la distribution d'impulsion initiale dans le piège : par intégration, on en déduit alors l'énergie cinétique moyenne  $\langle E_c \rangle$  du gaz piégé. Par ailleurs, on sait d'après le théorème du viriel, que pour un gaz parfait dans un potential harmonique, il y a équipartition de l'énergie potentielle et cinétique, ce qui nous donne la relation  $U = 2\langle E_c \rangle$ . Au cours de l'évaporation, on attend donc deux régimes différents.

- 1. À haute température  $(k_BT/E_F \gg 1)$ , le gaz est non-dégénéré et se comporte donc comme un gaz de Boltzmann classique. En utilisant l'équipartition de l'énergie, on en déduit donc que  $U = 3k_BT$ .
- 2. Lorsque l'on abaisse la température du gaz en évaporant les atomes, on finit par entrer dans le régime de dégénérescence quantique  $k_BT/E_F \ll 1$ . D'après la relation (2.9), l'énergie totale du nuage ne diminue plus et sature à la valeur  $3NE_F/4$ .

Expérimentalement, c'est cette procédure qui a été suivie par le groupe de JILA pour caractériser les premiers gaz de fermions dégénérés [3], ainsi qu'on le constate sur la figure (2.3).

#### 2.2.2 Appendice: Théorème du viriel

**Préliminaire**: théorème de Hellman-Feynman. Soit un système décrit par un hamiltonien  $\widehat{H}(\lambda)$  que l'on considère à l'équilibre thermodynamique à une température T. Si l'on note  $E_n(\lambda)$  les énergie propres du système, la fonction de partition  $Z(\varepsilon)$  se met sous la forme

$$Z(\lambda) = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}(\lambda)}) = \sum_{n} e^{-\beta E_n(\lambda)}.$$

Cherchons à présent à calculer la fonction de partition en  $\lambda + \delta \lambda$ , avec  $\delta \lambda$  infiniment petit. Sachant que l'on peut écrire que

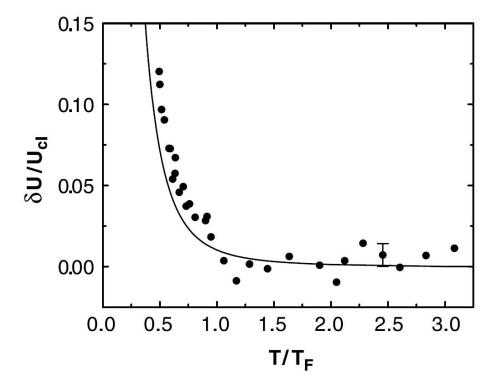


FIG. 2.3 – Mesure de l'énergie d'un gaz de Fermi ultra-froid. Sur cette figure issue de [3], on on trace l'évolution de  $\delta U = U - U_{\rm cl}$ , où  $U_{\rm cl} = 3Nk_BT$  désigne l'énergie interne du gaz classique. À haute température, la loi du gaz parfait décrit bien le comportement du gaz, alors qu'à basse température on a d'après la relation (2.9)  $\delta U/U_{\rm cl} \propto 1/T$ . La courbe en trait plein correspond au calcul théorique obtenu à partir de la loi de Fermi-Dirac à température finie.

#### 2.2. LE GAZ DE FERMI DÉGÉNÉRÉ DANS UN POTENTIEL HARMONIQUE17

$$\widehat{H}(\lambda + \delta \lambda) = \widehat{H}(\lambda) + \delta \lambda \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda}$$

on peut calculer les valeurs propres de  $\widehat{H}(\lambda + \delta \lambda)$  en perturbation de celles de  $\widehat{H}(\lambda)$  et l'on obtient

$$E_n(\lambda + \delta \lambda) = E_n(\lambda) + \delta \lambda \left\langle n \left| \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda} \right| n \right\rangle.$$

On en déduit alors par simple substitution que

$$Z(\lambda + \delta \lambda) = \sum_{n} e^{-\beta \left( E_n(\lambda) + \langle n | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right)} \sim \sum_{n} e^{-\beta E_n(\lambda)} \left( 1 - \beta \delta \lambda \langle n | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} | n \rangle \right),$$

ce qui nous donne

$$\frac{dZ}{d\lambda} = -\beta \operatorname{Tr}\left(e^{-\beta H(\lambda)} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda}\right).$$

Si on introduit l'énergie libre  $F = -k_B T \ln Z$ , on voit que cette dernière expression peut se récrire comme

$$\frac{dF}{d\lambda} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle,\,$$

 $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne thermodynamique.

On applique à présent ce théorème au cas d'un système de N particules décrit dont l'énergie potentielle se met sous la forme  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N)$ , où V est homogène et de degré p et vérifie donc pour tout  $\lambda$ 

$$V(\lambda \boldsymbol{r}_1, \lambda \boldsymbol{r}_2, ..., \lambda \boldsymbol{r}_N) = \lambda^p V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_N).$$

On introduit l'opérateur unitaire  $\widehat{T}_{\lambda}$  défini en représentation position par

$$\widehat{T}_{\lambda}|\boldsymbol{r}_{1},\boldsymbol{r}_{2},...,\boldsymbol{r}_{N}\rangle = |\lambda\boldsymbol{r}_{1},\lambda\boldsymbol{r}_{2},...,\lambda\boldsymbol{r}_{N}\rangle.$$

On voit alors que  $\widehat{T}_{\lambda}$  satisfait les propriétés suivantes

$$\widehat{T}_{\lambda}|\boldsymbol{p}_{1},\boldsymbol{p}_{2},...,\boldsymbol{p}_{N}\rangle = |\boldsymbol{p}_{1}/\lambda,\boldsymbol{p}_{2}/\lambda,...,\boldsymbol{p}_{N}/\lambda\rangle 
\widehat{T}_{\lambda}^{\dagger}\widehat{\boldsymbol{r}}_{i}\widehat{T}_{\lambda} = \lambda\widehat{\boldsymbol{r}}_{i} 
\widehat{T}_{\lambda}^{\dagger}\widehat{\boldsymbol{p}}_{i}\widehat{T}_{\lambda} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{i}/\lambda,$$

où  $\hat{p}_i$  désigne l'observable impulsion de la particule i. D'après ces propriétés, l'homogénéité de V peut se traduire à l'aide de l'opérateur  $\hat{T}_{\lambda}$  par

$$\widehat{T}_{\lambda}^{\dagger}V(\widehat{r}_{1},...)\widehat{T}_{\lambda}=\lambda^{p}V(\widehat{r}_{1},...).$$

Définissons à présent  $\widehat{H}(\lambda)$  par

$$\widehat{H}(\lambda) = \widehat{T}_{\lambda}^{\dagger} \widehat{H} \widehat{T}_{\lambda} = \sum_{i} \frac{\widehat{p}_{i}^{2}}{2m\lambda^{2}} + \lambda^{p} V(\widehat{\boldsymbol{r}}_{1}, \dots).$$
 (2.10)

Calculons la fonction de partition  $Z(\lambda)$  associée à  $H(\lambda)$ . En utilisant les propriétés des fonctions d'opérateurs, on voit que

$$e^{-\beta \widehat{H}(\lambda)} = e^{-\beta \widehat{T}_{\lambda}^{\dagger} \widehat{H} \widehat{T}_{\lambda}} = \widehat{T}_{\lambda}^{\dagger} e^{-\beta \widehat{H}} \widehat{T}_{\lambda}.$$

En utilisant la relation Tr(AB) = Tr(BA), on en déduit donc que

$$Z(\lambda) = \operatorname{Tr}\left(\widehat{T}_{\lambda}^{\dagger} e^{-\beta \widehat{H}} \widehat{T}_{\lambda}\right) = \operatorname{Tr}\left(e^{-\beta \widehat{H}}\right) = Z(1).$$

Autrement dit Z, et donc l'énergie libre  $F(\lambda)$ , sont constants, soit d'après le théorème de Helman-Feynman

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle$$
.

En utilisant l'équation (2.10), on voit que

$$\frac{\partial \widehat{H}(\lambda)}{\partial \lambda} = -2\sum_{i} \frac{\widehat{p}_{i}^{2}}{2m\lambda^{3}} + p\lambda^{p-1}V(\widehat{r}_{1}, ...),$$

soit pour  $\lambda = 1$ 

$$2\langle \widehat{E}_c \rangle_0 = p \langle \widehat{V} \rangle_0,$$

où  $E_c$  désigne l'énergie cintétique<sup>6</sup>. Dans le cas d'un gaz parfait piégé dans un potentiel harmonique, on a p=2, ce qui nous donne l'égalité de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de piégeage.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Ce résultat porte le nom de théorème du viriel. Il en existe d'autres versions dans le cas de système en interactions [5].

# 2.2.3 Approximation de densité locale, profil de densité du nuage piégé à température nulle

L'approche suivie au paragraphe précédent s'avère malaisée pour déterminer le profil de densité du nuage. Une solution alternative consiste à remarquer que, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'énergie potentielle de piégeage vaut  $U/2 \propto NE_F$  en vertu du théorème du viriel. Comme dans un piège harmonique et isotrope l'énergie potentielle de piégeage vaut par ailleurs  $Nm\omega^2\langle r^2\rangle/2$ , on en déduit que le rayon du nuage varie comme

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3E_F}{4m\omega^2} \propto N^{1/3}.$$

Autrement dit, plus le nombre d'atomes piégés est grand, plus le nuage est gros, ce qui peut être interprété comme une manifestation de la pression de Fermi qui résiste à la compression des fermions les un sur les autres. Ceci signifie aussi que, pour des nombres d'atomes suffisamment grands, le rayon  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  devient plus grand que les autres distances caractéristiques du systèmes, à savoir la distance interatomique et la taille de l'état fondamental du potentiel de piégeage. Cette remarque nous permet donc d'avoir recours à une approximation de densité locale, par laquelle on suppose que l'on peut décrire localement le nuage comme une gaz de Fermi homogène dont le potentiel chimique est décalé par le potentiel de piégeage. Sachant qu'à température nulle le potentiel chimique d'un gaz homogène vaut  $\mu_h(n) = \hbar^2 (6\pi^2 n)^{2/3}/2m$ , on en déduit que le potentiel chimique local du gaz vaut

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_{\rm h}(n) + V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{2/3} + V(\mathbf{r}).$$

Or, pour un système à l'équilibre, le potentiel chimique est uniforme.  $\mu$  est donc constant, égal à  $\mu_0$ , potentiel chimique au centre du piège. Le profil de densité est alors simplement donné par

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} (\mu_0 - V(\mathbf{r})) \right)^{3/2}.$$
 (2.11)

Comme au paragraphe précédent, on calcule  $\mu_0$  en normalisant le nombre d'atome via la relation  $N = \int d^3 \mathbf{r} n(\mathbf{r})$ . Après un calcul sans difficulté, on retrouve la relation (2.8), à savoir

$$\mu_0 = E_F = \hbar \bar{\omega} \left( 6N \right)^{1/3}.$$

On compare sur la Fig. (2.4) le profil de densité de l'équation (2.11) aux données expérimentales obtenues à l'ENS sur un gaz de  $^6$ Li. On y constate

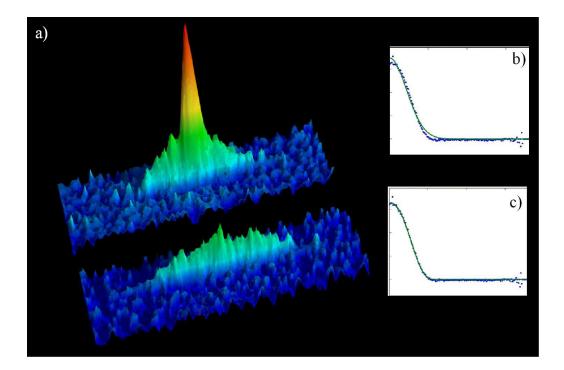


FIG. 2.4 – Profil de densité d'un gaz de fermions sans interactions. a) Profil bidimensionnel d'un condensat de Bose-Einstein (en haut) en présence d'une mer de Fermi à très basse température (en bas). Le condensat est immédiatement reconnaissable par le pic central indiquant la condensation. On remarque que le gaz de fermions est plus large que le condensat et la fraction non condensée, ce qui est une manifestation de la pression de Fermi. b) et c) Ajustement du profil de densité du nuage fermionique par une gaussienne (b) et une distribution de Fermi - (Eq. 2.11 – (c).

clairement que le profil gaussien caractéristique de la distribution de Boltzmann décrit imparfaitement les profils expérimentaux, au contraire de la loi de Fermi-Dirac pour laquelle l'accord est remarquable.

# 2.2.4 Appendice : Rappels sur le gaz de Fermi homogène à température nulle

On considère ici le cas d'un gaz parfait homogène dont le spectre à une particule est décrit par des ondes planes d'énergie  $E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$ . De manière identiquement à l'équation (2.6), le nombre de particule  $N_{\mathbf{k}}$  dans un état d'impulsion  $\mathbf{k}$  est donné par la loi de Fermi Dirac (2.5, soit

#### 2.2. LE GAZ DE FERMI DÉGÉNÉRÉ DANS UN POTENTIEL HARMONIQUE21

$$N_{\mathbf{k}} = f(E_{\mathbf{k}}).$$

Dans la limite continue, la densité d'états est uniforme et vaut  $\rho_{\boldsymbol{k}} = V/(2\pi)^3$ , où l'on à introduit un volume de quantification V. Ceci nous permet de calculer le nombre de particules dans l'ensemble grand canonique comme

$$N = \int \frac{d^3 \mathbf{k} V}{(2\pi)^3} f(E_{\mathbf{k}}).$$

À basse température  $(k_BT/\mu \ll 1)$ , la distribution de Fermi-Dirac se réduit à une marche, et cette relation s'écrit donc simplement

$$N = \int_{E_k < \mu} \frac{d^3 \mathbf{k} V}{(2\pi)^3}.$$

Si 'on introduit l'impulsion de Fermi  $k_F$  telle que  $\mu = \hbar^2 k_F^2/2m$ , ceci revient à calculer le volume dans l'espace des k de la sphère de rayon  $k_F$  et l'on obtient donc de façon triviale

$$N = \frac{V k_F^3}{6\pi^2},$$

soit en introduisant la densité n=N/V

$$k_F = \left(6\pi^2 n\right)^{1/3}. (2.12)$$

L'énergie de Fermi s'écrit donc en définitive dans cette limite

$$E_F = \frac{\hbar^2 \left(6\pi^2 n\right)^{2/3}}{2m}. (2.13)$$

## Chapitre 3

# Fermions en interactions attractives

#### 3.1 Introduction

Le chapitre précédent traitait du gaz parfait de fermions qui, contrairement aux bosons, ne présente pas de transition de phase lorsque l'on abaisse la température et que l'on entre dans le régime de dégénérescence quantique  $k_BT/E_F \ll 1$ . La situation change complètement lorsque l'on considère un gaz en interactions attractives: en effet, on sait depuis les années 1950, et les travaux théoriques de Bardeen-Cooper et Schrieffer (BCS), que la moindre interaction attractive déstabilise la mer de Fermi à basse température et provoque l'appariement des fermions en paires de Cooper qui sont responsables de la supraconductivité des métaux. Du fait de l'analogie entre supraconductivité et superfluidité (dans les deux cas on observe l'émergence d'une phase où la dissipation disparaît), il peut paraître tentant d'identifier la supraconductivité à la condensation de Bose-Einstein. Cette tentation est d'autant plus grande que le mécanisme BCS procède par l'appariement des fermions en paires de Cooper : ces paires étant constituées de deux particules de spin demi-entier peuvent être considérées comme portant un spin entier et seraient donc des bosons.

Aussi séduisante que soient ces analogies, la supraconductivité telle que décrite par la théorie BCS reste dans son principe très différente de la condensation de Bose-Einstein (CBE), et il est en réalité impossible d'établir une équivalence stricte entre les deux scénarios. Nous allons en fait montrer dans ce qui suit que ces deux modèles sont en réalités les cas limites d'une théorie plus générales établie au début des années 1980, la théorie de la

transition CBE-BCS qui décrit le comportement d'un gaz en interactions attractives.

#### 3.2 La transition CBE-BCS: approche qualitative

#### 3.2.1 Cas des interactions fortes : le condensat de molécules.

Considérons un ensemble d'atomes fermioniques interagissant avec un potentiel interatomique de profondeur  $V_0$  tel que celui représenté sur la figure (3.1). Si  $V_0$  est suffisamment grand, le potentiel possède des états liés, correspondant à la formation de dimères atomiques. Si ces dimère sont suffisamment liés (plus précisément lorsque leur taille est petite devant la distance entre molécules et leur longueur d'onde de de Broglie), on peut les considérer comme ponctuels. Étant constitués de deux fermions, les dimères sont donc des particules de spin entier, et donc des bosons : on est ainsi naturellement amené à conclure de façon un peu paradoxale, que lorsque la température du système est plus basse que  $V_0$ , un ensemble de fermions en interactions fortement attractives se comporte comme un gaz de molécules diatomiques bosoniques, qui peut donc subir une condensation de Bose-Einstein lorsque sa densité dans l'espace des phases est suffisamment grande.

À y réfléchir plus outre, cette conclusion n'est en réalité pas aussi paradoxale qu'à première vue. En effet, les condensats de Bose-Einstein réalisés expérimentalement (<sup>4</sup>He ou atomes froids) ne sont pas constitués de particules élémentaires mais d'atomes, qui ne sont rien d'autres que des assemblages de fermions fortement liés les uns aux autres.

#### 3.2.2 Cas des interactions faibles : le superfluide BCS.

Si l'on diminue à présent la profondeur du potentiel, il existe une valeur  $V_0^*$  en dessous de laquelle il n'existe plus d'état lié<sup>1</sup>. Dans ce cas, le scénario envisagé au paragraphe précédent n'est plus valable, puisqu'il n'est plus possible de former de dimères bosoniques, et l'on serait alors un peu hâtivement amené à conclure qu'il n'existe pas de phase superfluide dans un système de fermions en interaction faiblement attractives. On sait cependant depuis les travaux de Bardeen-Cooper et Schrieffer que la présence de la mer de Fermi peut stabiliser des paires instables dans l'espace libre, suivant le mécanisme d'appariement de Cooper à l'origine de la théorie BCS de la supraconductivité. La différence fondamentale entre ce mécanisme et la condensation de

 $<sup>^1\</sup>mathrm{Notons}$  que ceci n'est vrai qu'à 3D. À 1D, un potentiel attractif possède toujours un état lié.

dimère dans le régime d'attraction forte décrite au paragraphe précédent est donc que le scénario d'appariement BCS implique l'intégralité de la mer de Fermi, alors que la formation de dimères fortement liés ne nécessite que deux particules. Un corollaire de cette distinction concerne la valeur de la température critique : alors que dans le régime BCS la formation des paires se produit en même temps que l'apparition de la superfluidité (les deux phénomènes sont par essence des effets collectifs), il y a découplage dans le régime CBE. En effet, la formation des molécules est dans ce cas un effet à deux corps qui relève de la chimie classique. Si l'énergie des dimères est suffisamment grandes, ceux-ci peuvent se former même à température ambiante. En revanche, la condensation de Bose-Einstein se produit elle toujours à basse température et son seuil ne dépend plus de l'énergie de liaison, mais uniquement de la densité dans l'espace des phases des molécules.

#### 3.2.3 Longueur de diffusion infinie : le régime unitaire.

Le régime intermédiaire reliant le condensat de molécule au superfluide BCS correspond à  $|a| = \infty$ , ou, plus précisément  $n|a|^3 \gg 1$ , avec n la densité de particules du système. La difficulté à décrire les propriétés de ce système ne viennent pas tant de la force des interactions, qui sont plus fortes dans le régime BEC qu'à la résonance, mais plutôt des corrélations entre particules qui surgissent lorsque la longueur de diffusion diverge : dans les régime CBE et BCS, les corrélations sont essentiellement à 2 corps, entre les deux partenaires d'un dimère ou d'une paire de Cooper, ce qu nous permet de simplifier le problème et de développer une théorie relativement simple décrivant quantitativement les propriétés du système. Lorsque l'on entre dans le régime où la longueur de diffusion diverge, on voit cependant apparaître des corrélations impliquant un grand nombre de particules, et rendant complexe la description des propriétés physique du système. Ceci peut s'illustrer en considérant un condensat de molécule et en augmentant la longueur de diffusion à l'aide d'une résonance de Feshbach. Lorsque l'on se trouve loin de la résonance, a est petit et on peut donc ignorer la structure interne des molécules (car celles-ci sont de taille  $\sim a$ , cf. paragraphe 3.2.4). Lorsque l'on augmente a, la taille des molécules augmente et lorsque a devient de l'ordre de la distance movenne entre molécules – soit  $na^3 \sim 1$  – les dimères commencent à se chevaucher, et on ne peut donc plus attribuer un atome à une molécule particulière : chaque atome n'est donc plus uniquement corrélé à son partenaire dans une molécule, mais à tous les atomes voisins.

Bien que la limite unitaire soit la plus complexe à décrire du point

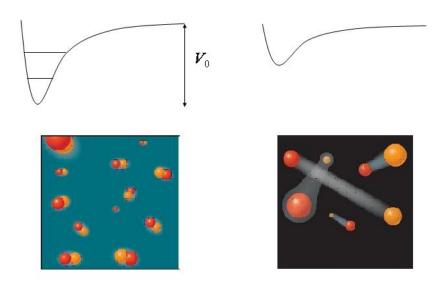


FIG. 3.1 - Principe de la transition CBE-BCS: pour un potentiel de profondeur  $V_0$  suffisamment grande, il existe des états liés à deux corps. Les dimères de de fermions ainsi formés sont des bosons qui, si ils sont suffisamment petits devant la distance interatomique, peuvent être considérés comme ponctuels. Dans ce régime l'état fondamental du système est donc un condensat de molécules. Lorsque le potentiel devient trop faible, il n'existe plus d'état lié et la superfluidité procède d'un appariement suivant le mécanisme de Cooper et impliquant l'intégralité de la mer de Fermi.

de vue microscopique, sa physique à l'échelle macroscopique se révèle en revanche étonnamment simple. Considérons ainsi l'exemple de l'équation d'état à température nulle reliant le potentiel chimique à la densité et permettant de calculer le profil d'un gaz piégé dans l'approximation de densité locale. Par analyse dimensionnelle, on montre que le seul paramètre sans dimension que l'on puisse construire à partir des paramètres du problème  $\hbar$ , m, a et la densité n est simplement  $na^3$  et l'on en déduit donc que

$$\mu = E_F f\left(\frac{1}{na^3}\right),\,$$

où  $E_F = \hbar^2 (6\pi^2 n)^{2/3}/2m$  désigne l'énergie de Fermi d'un gaz parfait de densité n identique à celle du superfluide et la fonction sans dimension f doit être calculée à partir d'une théorie microscopique. Or, lorsque l'on se place à l'unitarité et que l'on suppose qu'en vertu du scénario de transition CBE-BCS les paramètres physiques varient continument lorsque l'on passe par  $a = \infty$ , l'équatio d'état du gaz unitaire à température nulle vaut simplement

$$\mu = \xi E_F$$

où  $\xi = f(0)$  est un simple nombre. L'équation d'état du gaz unitaire est donc au facteur numérique  $\xi$  près la même que celle d'un gaz parfait! Toute la difficulté de l'approche microscopique consiste donc à présent à déterminer la valeur de  $\xi$ . Les travaux théoriques et expérimentaux convergent aujourd'hui vers une valeur de  $\xi$  de l'ordre de 0.42 - à comparer avec  $\xi_{BCS} \sim 0.6$  prédit par la théorie BCS.

# 3.2.4 Appendice : Longueur de diffusion et état faiblement lié

On reprend le potentiel de portée finie du paragraphe 2.1.2, en s'intéressant à présent aux états faiblement liés de ce potentiel. Soit  $E = -\hbar\kappa^2/2\mu$ , avec  $\kappa > 0$ , l'énergie de cet état. Dans la région  $r > r_0$  où le potentiel n'agit pas, l'équation de Schrödinger radiale pour un état de symétrie s s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu}R.$$

En considérant la fonction rR, on voit immédiatement que les solutions de cette équation convergent vers 0 en  $+\infty$  sont proportionnelles à

$$R(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}. (3.1)$$

Comme pour l'étude de la diffusion, on introduit la solution  $v_{\kappa}(r)$  de l'équation de Schrödinger dans la région  $r < r_0$  vérifiant  $v_{\kappa}(r) \sim r$  pour  $r \to 0$ . La solution de l'équation de Schrödinger dans cette région se met donc sous la forme  $R(r) = \lambda v_{\kappa}(r)$  pour une certaine constante de normalisation  $\kappa$ . Si l'on écrit la continuité de R et de sa dérivée, on constate immédiatement que  $\kappa$  est solution de l'équation implicite

$$\kappa = -\frac{1}{r_0} \left( 1 + r_0 \frac{v_{\kappa}'(r_0)}{v_{\kappa}(r_0)} \right).$$

Considérons la situation où il existe un état faiblement lié dans le potentiel pour lequel  $\kappa$  est petit devant la portée du potentiel. Dans ce cas, on peut récrire l'équation précédente comme

$$\kappa = -\frac{1}{r_0} \left( 1 + r_0 \frac{v_0'(r_0)}{v_0(r_0)} \right).$$

Or,  $v_0$  et  $u_0$  sont solutions de la même équation de Schrödinger à énergie nulle, avec les même conditions initiales. On en déduit donc qu'elles sont identiques, ce qui nous permet de poser  $v'_0(r_0)/v_0(r_0) = 1/r_1$ , où  $r_1$  est le même paramètre que dans l'étude du problème de la diffusion. On obtient donc ainsi

$$\kappa = -\frac{1}{r_0} \left( 1 + r_0 / r_1 \right).$$

Cette expression est très semblable à celle de la longueur de diffusion en onde s. En effet, on sait que le déphasage  $\delta_0$  dans l'onde s vaut à basse énergie  $\delta_0 = -ka$ . En identifiant avec les résultats du paragraphe (2.1.2), on voit que a vaut dans cette limite

$$a = \frac{r_0}{1 + r_1/r_0}$$

Puisque  $\kappa$  et  $r_0$  sont positifs, on constate que les signes de a et  $\kappa$  sont donnés par celui de  $1+r_0/r_1$ . On en déduit en particulier qu'il n'existe d'état faiblement lié que si  $1+r_0/r_1>0$ , et donc si a est  $positif^2$ .

Dans le cas où  $r_0/r_1=-1$ , on constate tout d'abord que  $\kappa=0$ , et a diverge. La disparition d'un état lié (correspondant  $\kappa=0$ ) peut donc

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ceci peut paraître étonnant, car on associe souvent longueur de diffusion positive à interactions répulsive. Il faut cependant noter que la longueur de diffusion mesure en réalité le *déphasage* de l'onde de matière pendant la diffusion par le potentiel. Un potentiel attractif comme un puits carré ou un potentiel interatomique plus réaliste peut donc posséder une longueur de diffusion positive ou négative.

être associée à la divergence de la longueur de diffusion, ce que l'on baptise "résonance de diffusion" et qui est à l'origine du phénomène de résonance de Feshbach, où l'on fait disparaître un état lié dans le continuum en utilisant un champ magnétique extérieur.

Au voisinage de la condition de résonance, dans la limite où la longueur de diffusion est grande devant la portée du potentiel,  $\kappa$  s'exprime en fait simplement en fonction de a. L'approximation de portée nulle  $a \gg r_0$  revient en effet à prendre  $r_1 \sim -r_0$ , ce qui nous permet d'écrire que

$$a = \frac{r_0^2/r_1}{r_0/r_1 + 1} \sim -\frac{r_0}{1 + r_0/r_1} \sim \kappa^{-1}.$$

Pour ce qui est de l'expression de l'énergie de l'état faiblement lié, on constate ainsi qu'elle s'exprime simplement à l'aide de la longueur de diffusion, et que l'on a

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu a^2} = -\frac{\hbar^2}{ma^2},$$

dans le cas où les deux particules sont de même masse m et donc  $\mu = m/2$ .

D'après l'équation (3.1), on constate par ailleurs que la partie externe de la fonction d'onde à une largeur caractéristiques  $\kappa^{-1} = a$ . Proche du seuil de dissociation,  $a \gg r_0$ , on peut donc négliger les contributions provenant de la région interne  $r < r_0$ , ce qui nous donne une taille de molécule de l'ordre de a.

#### 3.2.5 Aperçu des approches théoriques

Bien qu'elle ne soit en toute rigueur valable que dans le régime d'interactions faibles a petit et négatif, la théorie BCS de la supraconductivité est par essence variationnelle et peut donc être étendue sur le principe à toutes les valeurs de longueur de diffusion. On montre alors que la théorie reste régulière même à a infini et passe donc sans discontinuité particulière le régime unitaire ce qui confirme cette idée d'une transition continue du régime de superfluidité BCS à celui de condensation de dimères. On constate cependant que la température critique dans le régime de condensation est complètement fausse. En effet dans la théorie BCS, les seules excitations permises sont associées à la brisure des paires de Cooper et conduisent par conséquent à une température critique  $k_BT_c \sim \Delta$  où  $\Delta$  désigne l'énergie de liaison des paires de Cooper (le gap superfluide). Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, la grande énergie de liaison des molécules dans

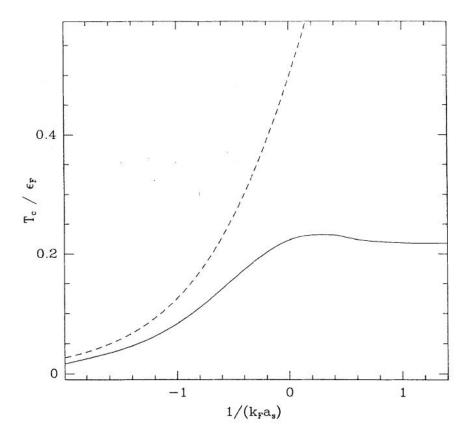


Fig. 3.2 – Évolution de la température critique de formation des paires de Cooper (trait pointillé) et de la phase superfluide (trait plein) dans la théorie de Legget, Nozières et Schmitt-Rink. Dans le régime BCS, les deux courbes coïncident, alors que dans la zone de condensation de molécules, l'introduction des degrés de liberté du centre de masse des paires permet de retrouver la température de condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait (figure extraite de [8]).

le régime BEC extrême conduit à supposer que la température critique devient infiniment grande, ce qui est bien entendu absurde. La raison de ce paradoxe est que la condensation de Bose-Einstein est une accumulation des molécules dans un état d'impulsion nulle. Les bons degrés de liberté à considérer dans ce régime sont donc associés au mouvement du centre de masse des paires de Cooper, qui n'est jamais considéré dans la théorie BCS standard. Nozière, Leggett et Schmitt-Rink sont les premiers à avoir introduit ces nouveaux degrés de liberté dans la théorie et leur modèle aboutit au graphe de la figure (3.2). Dans la limite CBE, il y a bien découplage entre chimie de formation des molécules et apparition de la phase superfluide, dont la température critique ne dépend plus que de la densité atomique, et plus de la force des interactions. Bien que permettant de résoudre le paradoxe posé par la théorie BCS, l'approche décrite ci-dessus reste encore trop simple pour décrire quantitativement le comportement du gas. En effet, si l'on se réfère à la température critique à l'unitarité, cette extension de la théorie BCS prédit  $T_c \sim 0.2 E_F$ , alors que l'on admet aujourd'hui que cette valeur se situe à  $T_c \sim 0.15 E_F$ , soit 30% d'erreur. Cette valeur exacte a été obtenue par des simulations Monte-Carlo exactes de la thermodynamique d'un gaz de fermions en interactions attractives. Elles confirment qualitativement le scénario de transition CBE-BCS et en précisent les aspects quantitatifs, notamment dans le régime unitaire où les corrélations sont les plus importantes et où les théories simplifiées sont les moins pertinentes.

#### 3.3 Étude expérimentale de la transition CBE-BCS

Jusqu'en 2003, le scénario de transition CBE-BCS décrit au paragraphe précédent n'avait pu être testé : Bien que la comparaison des différents superfluides connus de l'hélium 4 aux supraconducteurs à haute température critique semblait confirmer l'existence d'une théorie commune à tous ces systèmes (Fig. 3.3), il s'était avéré impossible d'explorer l'intégralité du diagramme de phase sur un seul système expérimental. Cette situation a changé profondément avec l'introduction des résonances de Feshbach, qui permettent de modifier la longueur de diffusion en déplaçant un niveau moléculaire autour de son seuil de dissociation et donnent donc sur le principe accès à toute la transition.

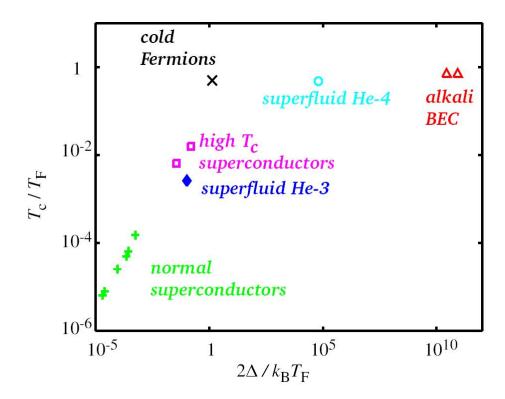


Fig. 3.3 – Le patchwork CBE-BCS. Lorsque l'on compile les données obtenues sur différents systèmes physique, on constate que l'évolution de la température critique d'apparition de la superfluidité en fonction de la fofrce des interactions – ici mesurée par l'énergie de liaison des molécules – semble suivre une loi universel. L'utilisation de résonance de Feshbach sur des gaz de fermions ultra-froids ont permis pour la première fois de confirmer sur un même système expérimental la pertinence de ce modèle.

# 3.3.1 Quelques considérations sur la durée de vie d'un gaz d'atomes froids au voisinage d'une résonance de Feshbach.

Les gaz d'atomes froids étant par essence métastables, travailler au voisinage d'une résonance de Feshbach peut s'avérer plus difficile qu'à première vue puisque l'amplification du taux de collisions élastiques pourrait aussi s'accompagner d'une augmentation du taux de pertes par collisions inélastiques à deux et trois corps. D'ailleurs, les premières expériences réalisées sur des gaz de bosons afin de mettre en évidence des effets au-delà du champ moyen en augmentant la longueur de diffusion allaient dans ce sens : le groupe de C. Wieman à Boulder avait en effet observé l'implosion du condensat dans une gerbe atomique baptisée du nom de Bose-Nova. Par chance, cependant, le principe de Pauli inhibe les collisions inélastiques dans le cas d'un mélange de fermions dans deux états de spin.

- 1. Les expériences étant réalisées en présence du champ magnétique souvent élevé utilisé pour la résonance de Feshbach, on pourrait craindre l'apparition de pertes dipolaires par retournement de spin qui libérerait l'énergie Zeeman du moment magnétique retourné sous forme d'énergie cinétique<sup>3</sup>. Considérons ainsi une paire d'atomes de spin 1/2 polarisés dans des états opposés entrant en collision dans l'onde s. Si durant la collision un des atomes retourne son spin sous l'effet des interactions dipolaires magnétiques, la variation d'une unité de  $\hbar$  du spin totale est absorbé par le moment cinétique orbital et les atomes doivent se quitter dans une onde partielle p ou supérieure. Or, la parité et le caractère tensoriel des interactions magnétiques montrent que les atomes ne peuvent modifier le moment cinétique total que de deux unités, ce qui fait qu'ils se quittent en réalité en onde d. Ceci est cependant impossible : en effet, dans l'onde d, la fonction d'onde orbitale es symétrique par échange de particules, et de même pour l'état de spin puisque les deux atomes dans le canal sortant sont dans un même état de spin. La fonction d'onde total (orbitale + spin) est donc symétrique ce qui est interdit pour des atomes fermioniquess.
- 2. Une autre source de pertes est les collisions à trois corps, où se forment une molécule fortement liée. Cependant, pour être efficaces il faut que les trois atomes mis en jeu se trouvent à des distances de l'ordre de la taille du dimère final, soit quelques angström. Or, comme on considère

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Notons qu'en plus du chauffage et des pertes, ces collisions briseraient aussi l'équilibre des populations de spin qui garantit un appariement BCS optimal.

ici des particules de spin 1/2, ceci signifie que deux atomes de même spin doivent se trouver à courte distance l'un de l'autre, bien plus faible en particulier que la distance interatomique moyenne, ce qui est interdit par le principe de Pauli<sup>4</sup>.

De ces considérations, il résulte que la durée de vie d'un mélange de fermions de spin peut au contraire des bosons être très longue au voisinage d'une résonance de Feshbach, ce qui est effectivement observé expérimentalement.

#### 3.3.2 Profil de densité, énergie d'un gaz de fermions en interactions fortes

La quantité la plus aisée à mesurer dans un piège est le profil de densité<sup>5</sup>. Dans le cas de la limité unitaire, ceci permet par exemple de vérifier l'identité (à un facteur d'échelle près) des profils de densité d'un gaz parfait et d'un gaz à  $|a| = \infty$ .

L'étude du profil de densité dans le piège et en temps de vol permettent par ailleurs de remonter à l'énergie du nuage dans le piège. En effet, le profil de densité in situ permet de mesurer la taille du piège et donc l'énergie potentielle de piégeage  $\sum_{i=x,y,z} m\omega_i^2 \langle x_i^2 \rangle/2$ . En temps de vol, on sait que si le piège s'éteint brutalement, l'énergie conservée durant l'expansion libre est somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction entre atomes (baptisée par conséquent "énergie relâchée"). Or, durant l'expansion, l'énergie d'interaction est rapidement convertie en énergie cinétique. Cette énergie cinétique final est alors mesurée en mesurant le profil de densité du nuage après un temps suffisamment long pour que les effets de taille initiale deviennent négligeables<sup>6</sup>. La comparaison de l'énergie à la limite unitaire permet ainsi de déterminer le paramètres  $\xi$  caractérisant les interactions à la limite unitaire.

#### 3.3.3 Spectroscopie des modes de basse énergie

Une méthode alternative permettant de caractériser l'équation d'état du gaz consiste à mesurer les modes de vibration du nuage puisque ceux-

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>En effet, on montre facilement dans le cas du gaz parfait que la fonction de corrélation à deux fermions de même spin s'annule pour des distances plus petites que  $1/k_F$ .

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>En réalité, le profil de densité intégré dans la direction d'observation, mais dans le cas de piège à symtrie cylindrique, il est possible de remonter à la densité 3D par une transformation dite transformation d'Abel.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>À la limite unitaire, une généralisation du théorème du viriel montre que l'énergie relâchée est égale à l'énergie potentielle, ce qui permet de ne mesurer qu'une des deux composantes

ci dépendent de sa compressibilité<sup>7</sup>. Une étude poussée des fréquences des modes de respiration transverses a été entreprise par le groupe d'Innsbruck [9]. Ce mode est excité simplement en augmentant brutalement les fréquences de piégeage dans la direction orthogonale à son axe de symétrie et en suivant les oscillations ultérieures du rayon du nuage. Le résultat de ces expériences est représenté sur la figure (3.4) où on le compare aux prédictions de deux modèles : d'une part la théorie BCS, et d'autre part les simulations Monte-Carlo [10]. Bien que ces courbes soient essentiellement numériques, certaines valeurs peuvent être calculées analytiquement. En effet, dans le régime BEC, on doit retrouver le comportement d'un condensat de Bose-Einstein de dimères. Pour un piège allongé, ce qui est le cas dans les expériences présentées dans la figure, on trouve en particulier que la fréquence vaut  $2\omega_{\perp}$ , où  $\omega_{\perp}$  est la fréquence transverse du piège. De même, on remarque qu'à l'unitarité, les prédictions BCS et Monte-Carlo coïncident. Ceci se comprend en notant que l'argument dimensionnel utilisé plus haut pour déterminer l'équation d'état du gaz unitaire est complètement générique et se vérifiera donc quelle que soit la théorie utilisée. Or on peut montrer que pour une équation d'état polytropique  $\mu \propto n^{\gamma}$ , la fréquence ne dépend que de  $\gamma$ , et pas du préfacteur. Dans le cas présent  $\gamma =$ 2/3 et l'analyse des équations hydrodynamiques montrent que la fréquence du mode vaut  $\sqrt{10/3}\omega_{\perp}$ .

#### 3.3.4 Le problème de la thermométrie

Dans les expériences d'atomes froids, on mesure en général la température par la technique de temps de vol, où l'on laisse le nuage s'étendre balistiquement de façon à mesurer sa distribution d'impulsion. Cette technique fait cependant l'hypothèse que les particules évoluent librement de façon à ce que leur vitesse ne soit pas modifiée durant le temps de vol. Elle ne pourra être utilisée que dans le cas d'un gaz parfait, ou en faible interaction. Dans le cas de la transition CBE-BCE, et singulièrement à la limite unitaire  $|a|=\infty$ , les interactions entre atomes sont fortes durant l'expansion, ce qui interdit l'utilisation de la méthode de temps de vol et nécessite donc le développement d'une nouvelle technique de thermométrie.

La méthode la plus élégante à se jour consiste à mesurer l'entropie du gaz plutôt que sa température en utilisant la possibilité de varier la longueur de diffusion grâce aux résonances de Feshbach. Supposons ainsi que l'on veuille mesurer S d'un gaz caractérisé par une longueur de diffusion  $a_0$  à un champ

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Et d'après la relation de Gibbs-Duhem, la compressibilité peut aussi s'écrire à l'aide de  $\partial \mu/\partial n$ .

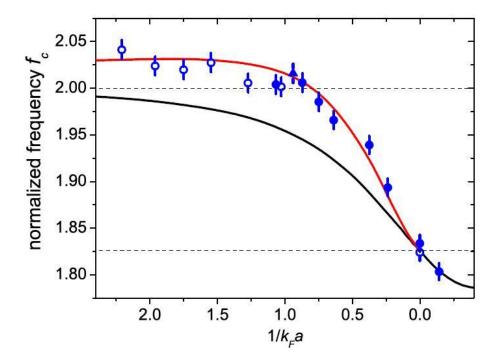


Fig. 3.4 – Mesure de la fréquence de respiration transverse d'un gaz de fermions dans le régime de transition CBE-BCS. La fréquence de vibration est ramenée à la fréquence de piégeage transverse et les courbes en trait plein correspondent respectivement aux prédictions obtenues à partir des calculs Monte-Carlo (rouge) et BCS (noir).

magnétique  $B_0$ . On commence par amener lentement le champ magnétique à une valeur  $B_1$  pour laquelle la longueur de diffusion s'annule<sup>8</sup>. À cette valeur de  $B_1$ , on peut mesurer par la technique standard de temps de vol la température  $T_1$  du gaz. Il n'est cependant pas garanti que cette température soit la même que la température initiale, et dans le cas général celles-ci sont en fait différentes puisque durant la rampe de champ magnétique, c'est l'entropie qui est conservée. Connaissant  $T_1$  et l'équation d'état du gaz parfait, on peut cependant avoir accès à  $S_1$  l'entropie au champ  $B_1$ , qui est d'après la remarque précédente, la même qu'au champ initial  $B_0$ .

Si l'on combine cette mesure aux mesures d'énergie interne discutées ci-dessus, on voit alors qu'il est possible d'avoir accès à l'équation d'état U(S,N) qui décrit complètement les caractéristiques thermodynamiques du gaz. En particulier, on peut alors remonter à la température via l'identité thermodynamique

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_N,$$

qui est en fait la définition de la température. Cette caractéristique U(S) a été mesurée à la limite unitaire  $a=\infty$  par le groupe de D. Jin (JILA) et J.E. Thomas (Duke) en utilisant la technique décrite ci-dessus. Les résultats de cette expérience sont présentés sur la figure (3.5) et sont comparés aux résultats de différentes prédictions théoriques [7].

#### 3.3.5 Mesure de l'énergie d'appariement

L'un des points clefs de la théorie BCS de la superconductivité, et qui reste valide dans toute la transition CBE-BCS, est l'existence d'un gap d'excitation correspondant à l'énergie de liaison des paires de Cooper. Comme pour l'énergie d'ionisation d'un atome isolé, cette énergie d'appariement des paires de fermions peut être mesurée par des techniques spectroscopiques. En l'occurrence, on excite les spins atomiques à l'aide de champs magnétiques radiofréquences de façon à les faire transiter vers un troisième état hyperfin. Sur le principe, l'énergie de liaison des atomes dans la paire doit alors décaler les résonances atomiques permettant ainsi de mesurer le gap. En pratique, la situation est cependant plus subtile et les premières expériences de spectroscopie s'avérèrent en fait peu concluantes. En effet, un décalage des raies peut aussi être la conséquence d'effets plus triviaux tels que le champ

 $<sup>^8 \</sup>rm Une$  telle valeur existe effectivement pour les deux atomes fermioniques utilisés couramment,  $^6 \rm Li$  et  $^{40} \rm K.$ 

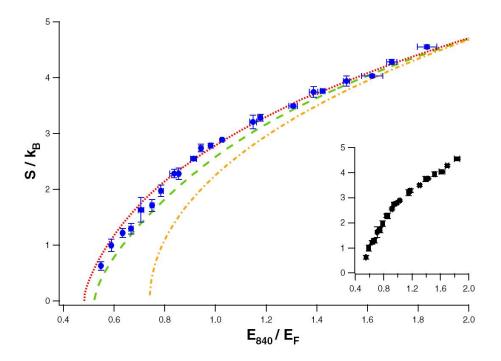


FIG. 3.5 — Thermométrie d'un gaz à la limité unitaire. De haut en bas, Orange : gaz parfait ; Vert : modèle de "pseudo-gap" ; Rouge : Monte-Carlo. Insert détail de la courbe montrant la transition de phase. Figure extraite de [7].

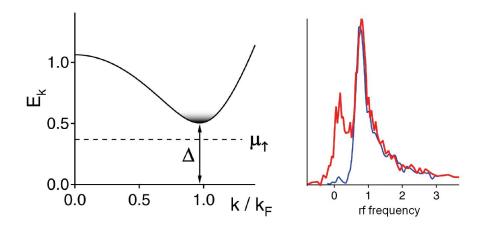


FIG. 3.6 – Gauche : allure schématique du spectre d'un superfluide. L'état fondamental est pris comme origine des énergies et est séparé de la branche d'excitations de paires brisées par un gap  $\Delta$ . Droite : spectre expérimentale de résonance radiofréquence vers un troisième niveau hyperfin. L'origine des fréquences est prise pour la résonance d'atomes isolés et les fréquences sont normalisées à "l'énergie" de Fermi. Les deux courbes correspondent respectivement à la réponse de l'espèce majoritaire (rouge) et minoritaire (bleu). La résonance commune correspond au pics de paires brisées alors que le pic isolé de la courbe rouge est associé aux quasi-particules. Le gap est alors donné par l'écart entre les deux pics, et vaut à l'unitarité  $0.44\ E_F$ .

moyen, qui constitue un décalage global du spectre du système, sans pour autant être associé à une bande interdite. Afin de contourner la difficulté, il faut donc réaliser une mesure différentielle qui permettrait de s'affranchir de ce terme d'un éventuel terme de champ moyen. Pour cela, on se place dans une situation où tous les atomes ne sont pas appariés par exemple en ajoutant un excès d'une des composantes de spin. Dans ce cas, le spectre radio-fréquence présente deux pics de résonance, correspondant d'une part aux paires brisées, et d'autres part aux excitations introduites initialement (Fig. (3.6)). L'énergie du gap est alors égale à la différence de position de ces deux pics. Dans [11], la valeur du gap trouvée par cette technique vaut  $0.44 \ E_F$ , en accord avec les valeurs prédites par les simulations Monte-Carlo.

#### 3.3.6 Superfluidité

Bien que les différentes expériences présentées dans ce qui précèdent corroborent qualitativement et quantitativement le scénario de transition CBE-BCS, aucune d'entre elle n'apporte réellement la preuve de l'existence de l'ordre quantique à longue portée caractéristique de la superfluidité (ou plus prosaïquement d'une fonction d'onde macroscopique décrivant le système). Deux méthodes peuvent être mises en œuvre pour détecter expérimentalement la superfluidité :

- 1. Mesure de fonction de corrélations. Dans les condensats de Bose-Einstein, la fonction de corrélation  $\langle \widehat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \widehat{\Psi}(\boldsymbol{r}') \rangle$  possède une limite non nulle lorsque  $\boldsymbol{r}$  et  $\boldsymbol{r}'$  sont éloignés les uns des autres, ce qui correspond à l'existence de corrélations quantique à longue portée du champ bosonique  $\widehat{\Psi}$ . Dans le cas d'un consat de Bose atomique, cette fonction de corrélation peut être mesurée assez facilement en faisant interférer des atomes issus de deux points distints d'un condensat de Bose-Einstein []. Pour un superfluide fermionique, la situation est un peu plus compliqué, puisque le champ quantique responsable de la superfluidité le paramètre d'ordre de la transition est l'opérateur "gap"  $\widehat{\Psi}_{\uparrow}(\boldsymbol{r})\widehat{\Psi}_{\downarrow}(\boldsymbol{r})$ . La fonction de corrélation à évaluer dans cas là est donc  $\langle \widehat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\boldsymbol{r}')\widehat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\boldsymbol{r}')\widehat{\Psi}_{\uparrow}(\boldsymbol{r})\widehat{\Psi}_{\downarrow}(\boldsymbol{r}) \rangle$ . Puisqu'il faut à présent avoir accès aux corrélations à un plus grand nombre de particules, cette quantité n'a pour le moment jamais été mesurée expérimentalement.
- 2. Tourbillons quantiques. On remarque qu'aussi bien pour le condensat de Bose-Einstein que le superfluide fermionique, le paramètre d'ordre est un nombre complexe, ce qui se traduit dans le langage de la théorie de Landau des transitions de phase par l'existence dans les deux cas d'une symétrie brisée U(1) dans la phase superfluide. Comme dans les condensats de Bose-Einstein, la phase du paramètre d'ordre (ou plutôt son gradient) est proportionnel au champ de vitesse superfluide, ce qui implique un champ de vitesse irrotationnel dans le volume du superfluide. La mise en rotation du nuage ne peut par conséquent s'opérer que par l'apparition de singularités dans le paramètres d'ordres, des vortex (ou tourbillons) quantiques autour desquels la phase de  $\Delta$  varie d'un nombre entier de fois  $2\pi$ . À grande vitesse de rotation, ces tourbillons s'agencent selon un réseau triangulaire baptisé réseau d'Abrikosov. Le groupe du MIT est parvenu à réaliser un piège dipôlaire tournant permettant la mise en rotation du nuage. Les images prises dans la direction de l'axe de rotation sont représentées sur la Fig.

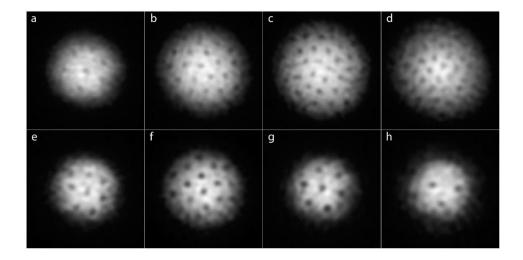


Fig. 3.7 – Observation de vortex dans un superfluide fermionique. Les positions des tourbillons sont repérés par la dépression en leur centre. Les différentes images correspondent à plusieurs valeurs de champ magnétique le long de la transition CBE-BCS, (a) 740 G, (b) 766 G, (c) 792 G, (d) 812 G, (e) 833 G, (f) 843 G, (g) 853 G et (h) 863 G – la résonance de Feshbach se situe quant à elle à  $B \sim 832$  G. Données extraites de [13]

(3.7) et montre sans ambiguïté aucune le réseau de vortex attendu dans toute l'étendue de la transition CBE-BCS.

# Bibliographie

- [1] B. DeMarco, J. L. Bohn, J.P. Burke, Jr., M. Holland, and D.S. Jin, *Measurement of p-wave threshold law using evaporatively cooled Fermionic atoms*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4208 (1999).
- [2] J. Dalibard, Notes de cours de Mécanique Quantique, http://www.phys.ens.fr/~dalibard/Notes\_de\_cours/DEA\_MQ.pdf
- [3] B. DeMarco et D.S. Jin, Science **285**, 1703 (1999).
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, Mécanique quantique, Tome II, Hermann (1973).
- [5] F. Werner, Phys. Rev. A 78, 025601 (2008).
- [6] W. Ketterle et M. Zwierlein, *Making, probing and understanding ultracold Fermi gases*, Comptes-rendus de l'école CLXIV Enrico Fermi (2006); arXiv :0801.2500.
- [7] L. Luo, B. Clancy, J. Joseph, J. Kinast et J. E. Thomas Measurement of the Entropy and Critical Temperature of a Strongly Interacting Fermi Gas, Phys. Rev. Lett. 98, 080402 (2007).
- [8] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria et J. R. Engelbrecht, Crossover from BCS to Bose superconductivity: Transition temperature and timedependent Ginzburg-Landau theory, Phys. Rev. Lett. 71, 3202 (1993).
- [9] A. Altmeyer, S. Riedl, C. Kohstall, M. Wright, R. Geursen, M. Bartenstein, C. Chin, J. Hecker Denschlag et R. Grimm, *Precision measure*ments of collective modes in the BEC-BCS crossover, Phys. Rev. Lett. 98, 040401 (2007).
- [10] G. E. Astrakharchik, R. Combescot, X. Leyronas et S. Stringari, Equation of State and Collective Frequencies of a Trapped Fermi Gas Along the BEC-Unitarity Crossover, Phys. Rev. Lett. 95, 030404 (2005).
- [11] A. Schirotzek, Y. Shin, C.H. Schunck et W. Ketterle, *Determination* of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy, Phys. Rev. Lett. **101**, 140403 (2008).

44 BIBLIOGRAPHIE

[12] I. Bloch, T.W. Hänsch, T. Esslinger, Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition, Nature **403**, 166 (2000).

[13] M.W. Zwierlein, J.R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C.H. Schunck et W. Ketterle, *Vortices and Superfluidity in a Strongly Interacting Fermi Gas*, Nature **435**, 1047 (2005).